

Unidad didáctica 3: Semejanzas

Ascensión Moratalla de la Hoz¹ y M^a Agripina Sanz García²

1: Departamento de Matemática aplicada a la Edificación, al Medio Ambiente y al Urbanismo.

E.T.S. Arquitectura de Madrid. Universidad Politécnica de Madrid, España.

ascension.moratalla.delahoz@upm.es

2: Departamento de Matemáticas e Informática aplicadas a la Ingeniería Civil
E.T.S.I. de Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Madrid, España.

asanz@caminos.upm.es

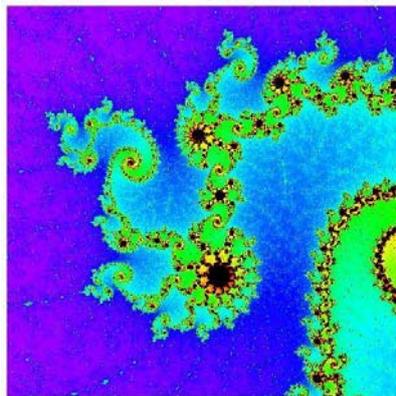
El concepto matemático de semejanza se encuentra representado en multitud de ejemplos de la vida cotidiana, sin ir más lejos en procesos relacionados con el crecimiento de seres vivos o con problemas de escala.

En este trabajo recogemos el estudio de unos conjuntos muy característicos que intrínsecamente contienen dicho concepto y sorprenden por sus propiedades matemáticas y su belleza. Nos referimos a los fractales autosemejantes.

1. La geometría de lo irregular

"He encontrado la fuerza esencial de la geometría y temo que nuestros jóvenes hayan sido privados demasiado tiempo de este placer"

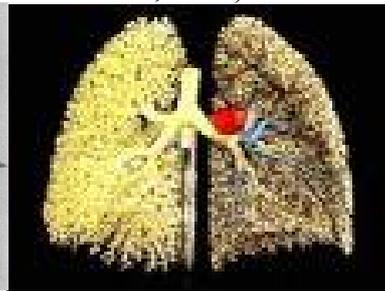
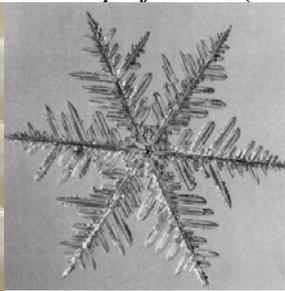
(Guggenheimer)



"¿Por qué se suele decir que la Geometría es fría y áspera? En parte, por su incapacidad para describir la forma de una nube, de una montaña, de una costa o de un árbol. Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos,...



No es que la Naturaleza exhiba un grado mayor de complejidad, sino que presenta un nivel completamente diferente de complejidad’. (B. Mandelbrot, 1977).



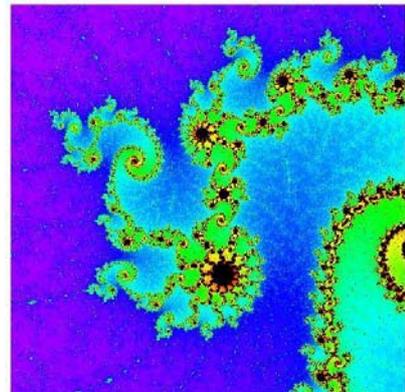
Benoît Mandelbrot desarrolló lo que hoy conocemos con el nombre de la *GEOMETRÍA FRACTAL*, término acuñado por él, que designa objetos geométricos de estructura irregular presentes en muchos comportamientos y formas de la naturaleza.

No existe un único procedimiento para obtener fractales, siendo el resultado objetos matemáticos bien distintos, por tanto tampoco contamos con una definición que agrupe a todos ellos,

aunque sí podemos señalar sus rasgos característicos:

- La simplicidad de su construcción.
- La aparente complejidad del producto final.

Esta geometría fractal se ha desarrollado intensamente en los últimos años, ayudada también por la capacidad de cálculo de los ordenadores y la facilidad de visualización de estos procesos.



2. Antecedentes de los fractales

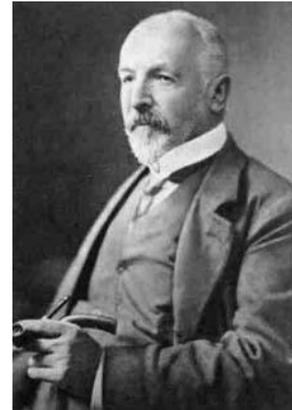
A lo largo del siglo XX fueron apareciendo conjuntos de difícil clasificación, desde el punto de vista de la geometría euclídea. Entre ellos se encuentran

- El conjunto de Cantor.
- Las Curvas continuas de propiedades sorprendentes: curva de Koch, curva de Hilbert...

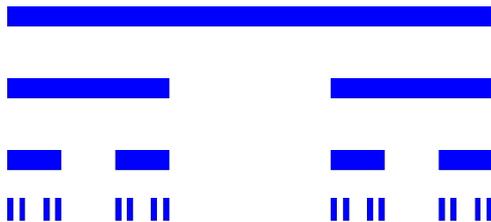
Todos ellos son conocidos como fractales clásicos.

El conjunto de Cantor

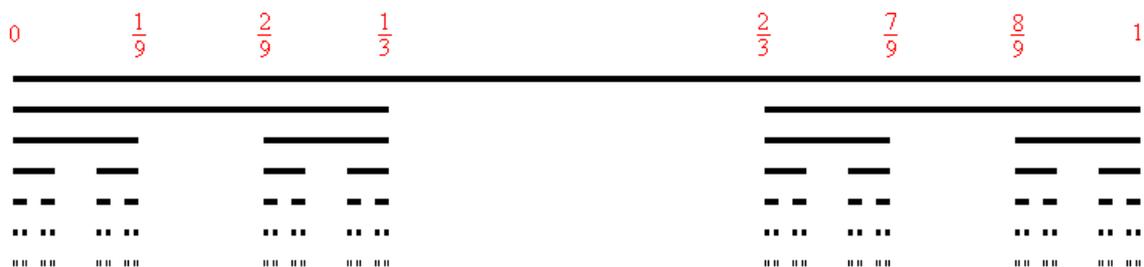
Fue descrito en 1883 por George Cantor, pero fue mencionado en 1875 (posiblemente antes) por el matemático irlandés Henry Shmith.



Es un conjunto que se construye de una forma sencilla mediante un proceso iterativo.



Se parte de un segmento de longitud 1
 Se divide el segmento inicial en tres partes iguales
 Se elimina la parte central sin los extremos
 Se repite el proceso sobre cada segmento obtenido



Tras una iteración infinita, el resultado final es un conjunto no numerable de longitud cero que tiene tantos puntos como el espacio tridimensional.

La curva de Koch

La curva de Koch es una curva del plano, continua en todos sus puntos y no diferenciable en ninguno.



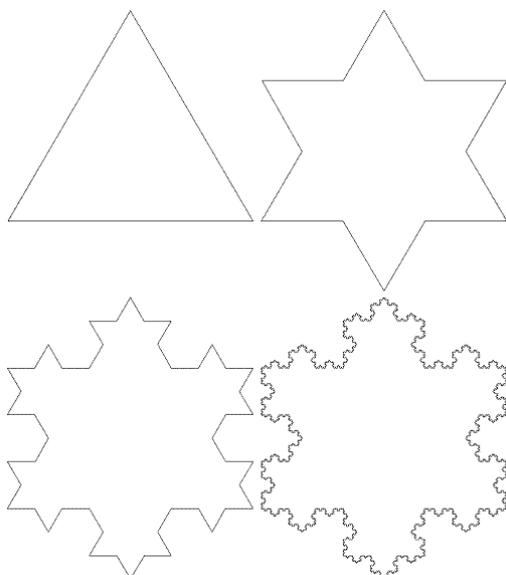
(1870-1924)

- Se genera de la siguiente manera:
- Se parte de un segmento de lado 1.
 - Se divide el segmento en 3 partes iguales.
 - Se elimina el segmento central.
 - Se sustituye por dos segmentos con ángulo 60° .
 - Se repite el proceso ilimitadamente.



La longitud de esta curva es infinita.

Si aplicamos un algoritmo análogo al descrito para la curva, a cada uno de los lados de un triángulo equilátero obtenemos un conjunto que se denomina a curva de Koch.



En la etapa k disponemos de $3 \cdot 4^k$ segmentos, de longitud 3^{-k} cada uno de ellos. Así, la longitud total de la curva en esa etapa es $3 \cdot (4/3)^k$.

Es evidente que esta cantidad crece indefinidamente cuando $k \rightarrow \infty$

Si designamos con Δ el área del triángulo de partida, el área de la figura obtenida en la etapa k se escribe

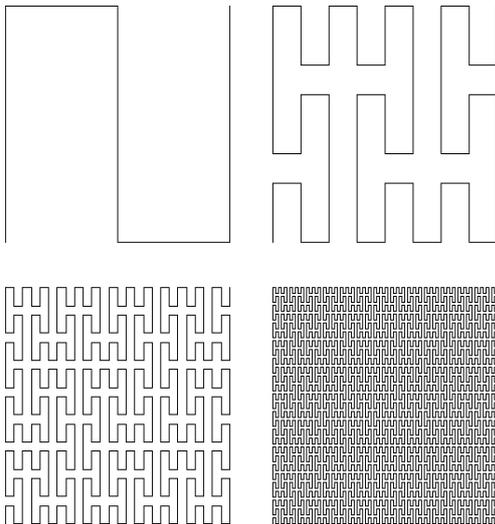
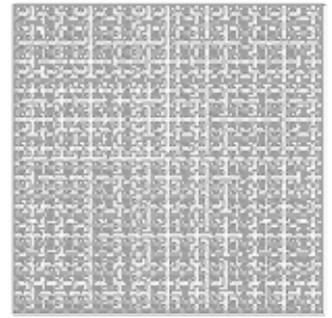
$$A_k = \Delta \left(1 + \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{4}{9} \right)^i \right)$$

cuyo límite, cuando $k \rightarrow \infty$, es $\frac{8}{5} \Delta$

La Curva de Hilbert



Hilbert fue un destacado matemático alemán (1862-1943). Interesado por los fundamentos de la matemática, publicó en 1899 “Fundamentos de la Geometría” donde sustituye los axiomas de Euclides por un conjunto formal de 21 axiomas. El enfoque de Hilbert marcó el cambio al sistema axiomático moderno.

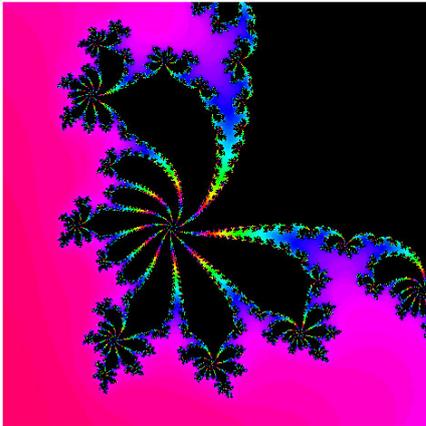


La curva de Hilbert pertenece a un tipo de curvas que pasan por todos los puntos de un cuadrado de lado la unidad. Es continua y no diferenciable en ningún punto.

El primer matemático en obtener una curva de este tipo fue Peano (1858-1932), matemático y filósofo italiano conocido por sus contribuciones a la teoría de conjuntos. En 1890 publicó un artículo titulado “**Sur une courbe qui remplit toute une aire plane**” donde describía el conjunto conocido como curva de Peano.

Si una curva es unidimensional cómo es posible que llene un espacio bidimensional. Esta característica es lo que hizo atractivo el análisis de estas curvas. Como resultado se llegó a una definición rigurosa de dimensión topológica de un espacio.

3. Fractales autosemejantes



Los fractales autosemejantes se caracterizan porque cada una de sus partes es semejante al todo, repitiéndose este proceso indefinidamente.

Su estructura, forma y características permanecen constantes al variar la escala de observación



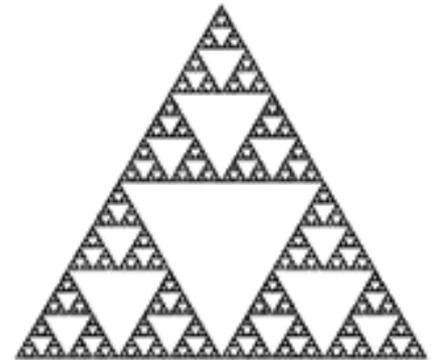
Pero no todos los fractales autosemejantes se generan con el mismo procedimiento. En este trabajo nos centraremos en aquellos que para su construcción se utilicen las semejanzas, concepto que definiremos formalmente más adelante.

Triángulo de Sierpinski

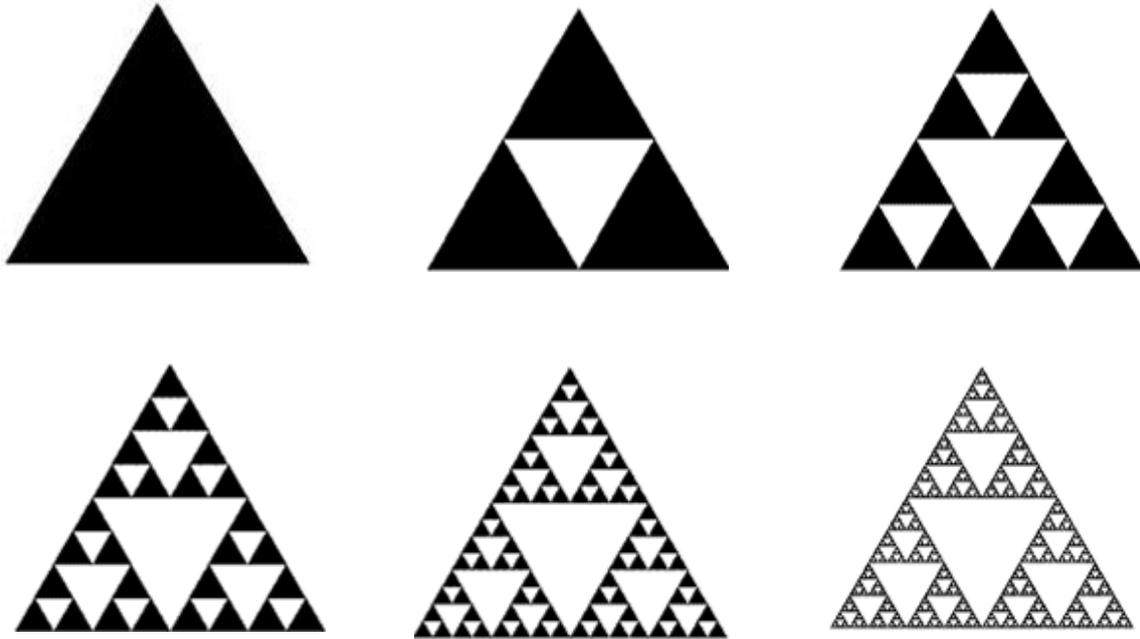


(1882-1969)

El triángulo de Sierpinski es el resultado que se obtiene al repetir indefinidamente el siguiente proceso



- Se parte de un triángulo equilátero T_0 , de lado unidad.
- Se halla el punto medio de cada lado de T_0 .
- Se unen dichos puntos dando lugar a triángulos semejantes a T_0 , de lado $1/2$
- Se elimina el triángulo central.
- Se repite el proceso ilimitadamente sobre cada uno de los triángulos obtenidos



Analizando desde un punto de vista Euclideo la figura, es decir midiendo longitudes y áreas obtenemos un curioso resultado.

En el paso k -ésimo, F , tendrá 3^k triángulos con:

Longitud del lado: $\left(\frac{1}{2}\right)^k$

Altura: $\left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{\sqrt{3}}{2}$

Si definimos el área de F como la suma de las áreas de todos los triángulos que componen F , este conjunto tiene área

$$A(F) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k 3^k$$

que es cero, cuando $k \rightarrow \infty$

Definimos la longitud de F como la suma de los perímetros de todos los triángulos que componen F , este conjunto tiene longitud :

$$L(F) = 3 \left(\frac{1}{2}\right)^k 3^k$$

que es infinita cuando $k \rightarrow \infty$

Por tanto tenemos un conjunto de longitud infinita y área cero sobre un triángulo equilátero. Esto nos sugiere que este conjunto no se puede definir adecuadamente con la geometría euclídea. ¿Qué dimensión topológica tiene este conjunto?

¿No será necesario definir un nuevo concepto de dimensión que describa adecuadamente este tipo de conjuntos?.

4. Semejanzas. Conjuntos autosemejantes.

Las semejanzas son transformaciones definidas en sobre un espacio afín Euclídeo.

Una transformación afín $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice que es una semejanza si cumple $\|XY\| = k \|f(X)f(Y)\|$, siendo X, Y puntos de \mathbb{R}^n , $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ considerando la norma euclídea.

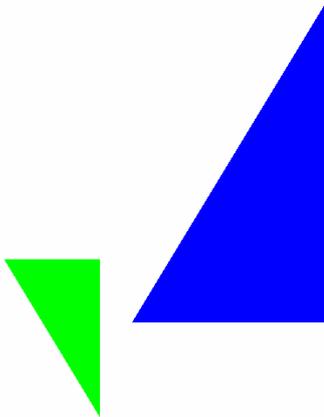
El conjunto $\text{Sem}(\mathbb{R}^n) = \{f/ f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ es semejanza}\}$, es un grupo respecto de la composición de aplicaciones llamado grupo equiforme de \mathbb{R}^n .

En el caso que $k=1$ o $k=-1$, f es una isometría, en otro caso es una homotecia, por tanto una semejanza es de uno de estos tipos:

- Homotecia
- Isometrías
- Composición de isometrías con homotecias

Se definen entonces los conjuntos semejantes :

Sean F y F' conjuntos de \mathbb{R}^n , F y F' son semejantes si existe una semejanza que transforme F en F' .



En el caso particular de estas figuras del plano, se cumplen las siguientes propiedades:

Si A, B y C son los vértices del triángulo inicial y A', B' y C' sus transformados, los lados semejantes son proporcionales y los ángulos, salvo orientación, son iguales.

$$\frac{\|AB\|}{\|A'B'\|} = \frac{\|AC\|}{\|A'C'\|} = \frac{\|BC\|}{\|B'C'\|} = k$$

$$\angle ABC = \angle A'B'C', \angle CAB = \angle C'A'B', \angle ACB = \angle A'C'B'$$

En cuanto a las áreas, su relación es la siguiente:

$$\text{Area}(\triangle ABC) = k^2 \text{Area}(\triangle A'B'C')$$

Un conjunto F del plano es autosemejante si existen semejanzas g_1, \dots, g_n de razones k_1, \dots, k_n menores que uno tales que

$$F = g_1(F) \cup \dots \cup g_n(F)$$

El conjunto de Cantor, la curva de Hilbert y el triángulo de Sierpinski son ejemplos de conjuntos autosemejantes.

Analicemos las semejanzas que dan lugar al triángulo de Sierpinski. Partiendo del triángulo T_0 , definimos homotecias de razón $\frac{1}{2}$ con centro en cada uno de los vértices de T_0 y obtenemos los tres triángulos semejantes al inicial que forman una figura que nombramos como T_1



5. Dimensión de Hausdorff

Para un conjunto autosemejante del plano,

$$F = g_1(F) \cup \dots \cup g_n(F)$$

con g_1, \dots, g_n semejanzas de razones k_1, \dots, k_n menores que uno, definimos la dimensión de Hausdorff de F como la solución de la ecuación

$$k_1^d + \dots + k_n^d = 1$$

Si las razones de semejanzas son todas iguales a k entonces la dimensión es

$$k = -\frac{\log n}{\log k}$$

Para el caso del triángulo de Sierpinski, hemos visto que las semejanzas son tres homotecias de razón $\frac{1}{2}$ por tanto

$$\left(\frac{1}{2}\right)^d + \left(\frac{1}{2}\right)^d + \left(\frac{1}{2}\right)^d = 1$$

De donde se obtiene que: $3=2^d$

$$d = \frac{\log 3}{\log 2}$$

cuyo valor aproximado es 1,58496.

Para los otros fractales autosemejantes descritos anteriormente obtenemos los siguientes datos

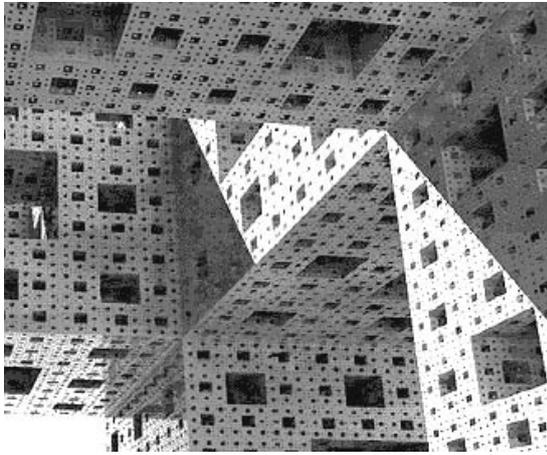
Conjunto de Cantor: $d = \log 2 / \log 3 = 0,62093$

Curva de Koch: $d = \log 4 / \log 3 = 1,262$.

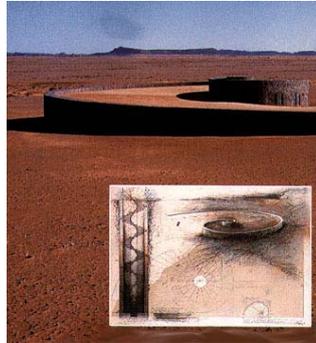
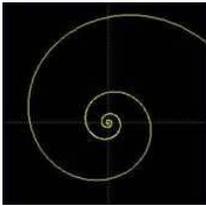
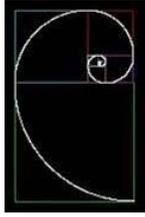
6. Arquitectura fractal.

La geometría fractal ha influido en el pensamiento de los arquitectos, llevándoles a plasmar estos conceptos en sus obras.

Arquitectura fractal



H. Vöth



Espiral áurea



Water cubo, Libeskind