

La Geometría del sepulcro de San Vicente de Ávila

Autores: A. Moratalla de la Hoz. ascension.moratalla.delahoz@upm.es

Departamento de Matemática Aplicada

A. Sanz García. asanz@caminos.upm.es

Dpto de Matemáticas e Informática aplicadas a la ingeniería civil

Colabora: Y. Breña Parra

Universidad UPM

RESUMEN

La Matemática es una ciencia que está presente en todo aquello que nos rodea. Con este artículo pretendemos ver con ojos matemáticos una obra de arte, el sepulcro de San Vicente de Ávila (Basilica de los santos mártires de Ávila)

Palabras claves:

Simetría, frisos, isometrías, matemáticas y arte.

ABSTRACT

Mathematics is a science which is present in everything surrounding us. In this article we try to see a masterpiece with mathematical eyes: the sepulchre in St. Vincent's Church in Avila (Basilica of the holy martyrs in Avila, Spain)

Keywords

Simmetry, art, mathematics, isometries, frieze group

1. INTRODUCCIÓN

El estudio de las Matemáticas resulta en muchos casos, algo abstracto que poco tiene que ver con la realidad en la que vivimos. La esencia de la teoría matemática se capta mejor cuando se parte de un problema en particular, que tenga una representación en el mundo físico de la experiencia.

Analizamos un ejemplo concreto de la Arquitectura: el sepulcro de San Vicente de Ávila, obra cumbre de la escultura románica, restaurado en el año 2008 por la Fundación del Patrimonio Histórico de Castilla y León, desde distintos enfoques: histórico, artístico, arquitectónico y matemático. Proponiendo al final, el uso de herramientas informáticas que engloban los conceptos matemáticos y de diseño.

2. La obra desde el punto de vista histórico-artístico



Ávila, ciudad amurallada, situada a cien kilómetros al Noroeste de Madrid (España), es visita obligada para los amantes del arte. Románico, gótico, barroco y renacentista se mezclan en singulares edificios dentro y fuera del recinto amurallado.

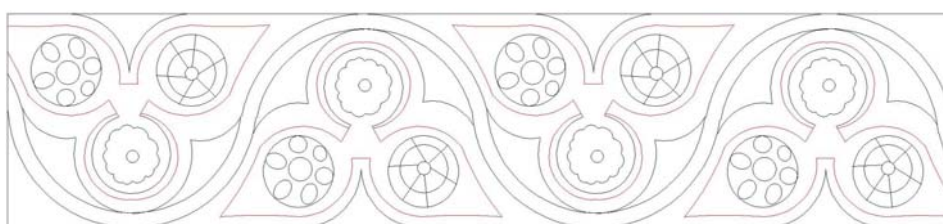
La Basílica de los Santos Mártires (s. XII) se asienta sobre edificio hispano-visigodo, frente a la muralla de Ávila. En su interior se encuentra el sepulcro de San Vicente que tiene una reconocida importancia para la historiografía del arte medieval. La reciente restauración ha rescatado la bellísima policromía original.

Desde la cumbre del cenotafio, un tejadillo de trama romboidal desciende hasta el primer cuerpo de escenas de la vida de los mártires, enmarcadas por dobles cordones sogueados. A partir de ellos una cubierta gallonada, dorada, rotulada por una orla de lazos consecutivos hilados dentro de una sinusoidal, da paso al segundo cuerpo con relieves de escenas benedictinas entre arquillos pentalobulados. Se trata de un túmulo de planta rectangular que se alza en el brazo meridional del transepto, sobre doce arquillos

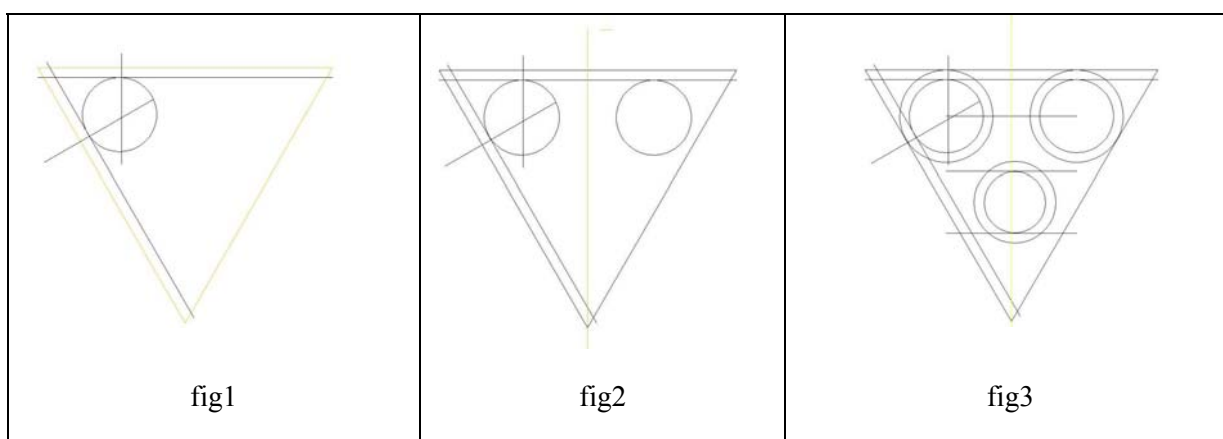
Fijémonos en el friso que decora el cenotafio.

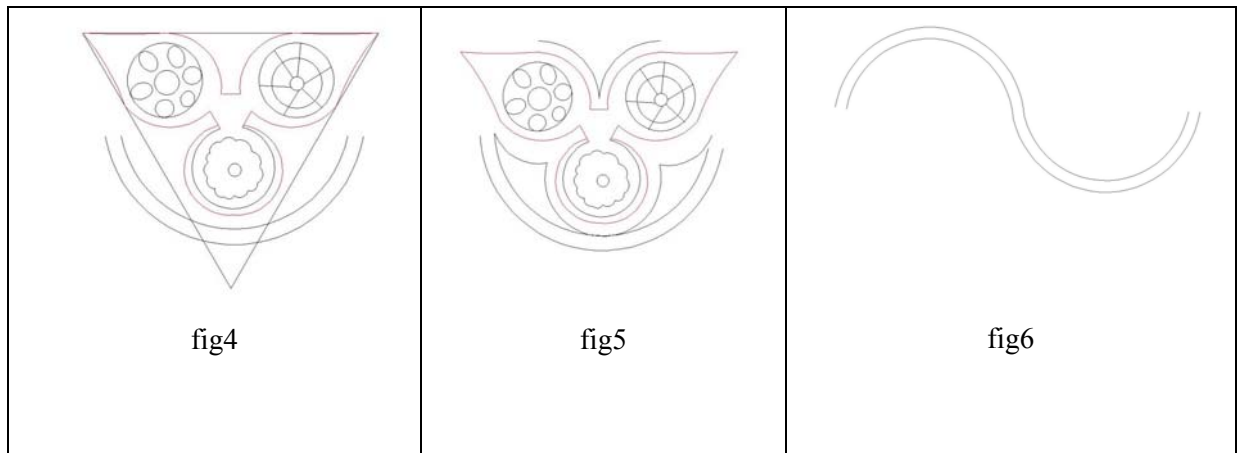


Esquemáticamente quedaría representado por la siguiente figura

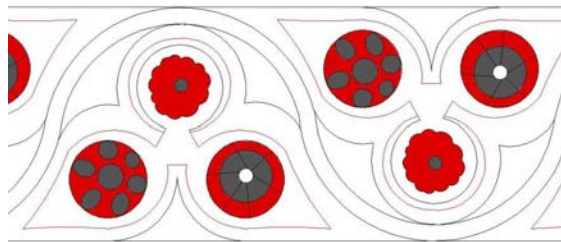


en la cual destaca un motivo que se repite y se obtiene a partir de la construcción geométrica que se muestra en el siguiente secuencia





Observemos las isometrías que intervienen en el diseño. Para construir la figura 5 se ha utilizado una simetría respecto de una de las medianas del triángulo equilátero de partida, pero al añadir la decoración florar, esta simetría se ha perdido. Si aplicamos una simetría de eje r perpendicular a la mediana mencionada que contenga al baricentro del triángulo y a continuación una traslación de vector paralelo a r , conseguiremos el módulo, que por repetición, da lugar al friso.



Estas isometrías y su composición dejan invariante la recta r así como al friso en su conjunto.

Una pequeña variación en la decoración del motivo daría lugar a un friso con una geometría diferente. Si las flores que decoran las hojas de la figura 5 fuesen iguales, el friso sería simétrico respecto de ejes perpendiculares a r . Los giros de 180° con centro en la recta invariante y la simetría con deslizamiento descrita anteriormente también pertenecerían al grupo de simetría de este friso modificado. Por tanto ambos frisos no tendrían el mismo grupo de simetría.

4. Contenido matemático.

A lo largo de este artículo hemos hecho referencia a conceptos matemáticos incluidos en un primer curso universitario de Matemáticas:

- Transformaciones ortogonales
Transformaciones ortogonales.
Clasificación de transformaciones ortogonales en $\mathbb{R}^2$
Clasificación de transformaciones ortogonales en $\mathbb{R}^3$
- Isometrías
Isometrías.
Clasificación de isometrías en $\mathbb{R}^2$
Clasificación de isometrías en $\mathbb{R}^3$
Composición de isometrías.
- Puntos fijos y Subespacios invariantes de una isometría.

Transformaciones ortogonales.

Un endomorfismo $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice ortogonal si conserva el producto escalar definido en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$

Por ser f una aplicación lineal y ortogonal conserva las normas, las distancias y los ángulos.

El conjunto $\mathbf{GO}(\mathbb{R}^n) = \{f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ es lineal y ortogonal}\}$, es un grupo respecto de la composición de aplicaciones llamado grupo ortogonal de $\mathbb{R}^n$.

Clasificación de transformaciones ortogonales.

En $\mathbb{R}^2$ las únicas transformaciones ortogonales son los giros alrededor del origen y las simetrías axiales con ejes por el origen.

En $\mathbb{R}^3$ las únicas son la rotación alrededor de un eje por el origen, la simetría especular respecto a un plano que contiene al origen y la simetría rotacional.

Isometrías.

Un movimiento rígido o isometría es una aplicación $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que conserva las distancias.

Son isometrías las transformaciones ortogonales, las traslaciones y la composición de ambas.

Se demuestra que toda isometría es una transformación ortogonal o bien una traslación compuesta con una transformación ortogonal.

Puntos fijos y subespacios invariantes de una isometría.

Un subespacio W de $\mathbb{R}^n$ se dice invariante por la isometría $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ si $f(W) \subset W$. En el caso de isometrías, su carácter biyectivo hace que se cumpla que $f(W) = W$.

Así para las isometrías de $\mathbb{R}^2$ se cumple que los subespacios invariantes son las rectas y los puntos.

Grupo de simetría de una figura plana.

Entendemos por figura plana cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Una figura F puede ser estudiada "estáticamente", analizando sus propiedades métricas, o bien "dinámicamente", analizando bajo qué movimientos rígidos permanece invariante.

Consideramos todas las isometrías que transforman la figura en sí misma,

$S(F) = \{f \in GM(\mathbb{R}^2) \text{ tal que } f(F) = F\}$, y lo llamamos grupo de simetría de la figura F .

Grupos de simetría de un friso.

Un grupo de simetría $S(F)$ de una figura plana F , se llama grupo de un friso si existe una recta r de vector a , fija por todos los elementos de $S(F)$ y que contenga como únicas traslaciones al grupo generado por la traslación t_a . A esta recta se le llama recta invariante del friso F .

Las isometrías que dejan invariantes el friso además de dichas traslaciones son giros con centro en puntos P de r , simetrías respecto del eje r y simetrías respecto de ejes r' perpendiculares a r y simetrías con deslizamiento.

5. Uso de herramientas informáticas en el diseño

El uso de estas herramientas es interesante por el gran número de ejemplos que se pueden generar con un mínimo esfuerzo así como por la visualización gráfica de los resultados. Con la librería *geometry* del programa simbólico Maple, diseñaremos nuestro propio friso.

Se designa por r a la recta invariante del friso, u al vector de dirección de la recta r , A los puntos de r y G_A a los giros de 180° alrededor de A .

G1. El grupo $G1$ corresponde a los frisos cuyo grupo de simetría está generado por traslaciones de vector u : $S(G1) = \{t_{nu} / n \in \mathbb{Z}\}$

El motivo del friso es un triángulo T de vértices A, B, C sin simetría central que trasladamos en la dirección de u

```
> restart:with(geometry):
> point(A, 0, 0):point(B, 2, 1):point(C, 1, 2):
triangle(T, [A,B,C]):
n := 8:
for i from 1 to n do
dsegment(u, point(M, 0, 0), point(N, 2*i, 0)):
translation(T||i, T, u):end do:
draw([seq(op([T||j(color=blue)]), j=1..n)], (filled=true
));
```

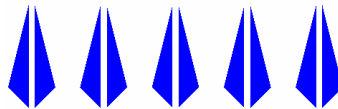


G2. El grupo de simetría de estos frisos está generado por traslaciones de vector u y simetrías axiales con eje perpendicular a r .


```

restart:with(geometry):
> point(A,0,1):point(B,1,0):point(C,1,5):
> triangle(T,[A,B,C]):
point(P1,1.15,0):point(P2,1.15,5):
> n := 5:
for i from 1 to n do
dsegment(u,point(M,0,0),point(N,3.5*i,0)):
line(l,[P1,P2]):
reflection(F,T,l):
translation(T||i,T,u):
translation(F||i,F,u):
end do:
draw([seq(op([T||j(color=blue),F||j(color=blue)]),j=1.
.n)],(filled=true));

```



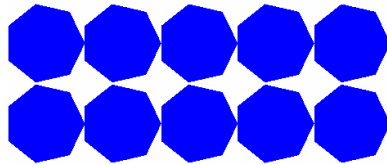
G3. Para obtener frisos de este grupo de simetría, se aplica a la figura una simetría respecto de r y traslaciones de vector nu

```

restart:with(geometry):
> RegularPolygon(Tt,7,point(o,0.7,1),1):
> point(P1,0,0):point(P2,1,0):
> n := 5:
for i from 1 to n do
dsegment(u,point(M,0,0),point(N,1.9*i,0)):
line(l,[P1,P2]):
reflection(Ff,Tt,l):
translation(Tt||i,Tt,u):
translation(Ff||i,Ff,u):
end do:

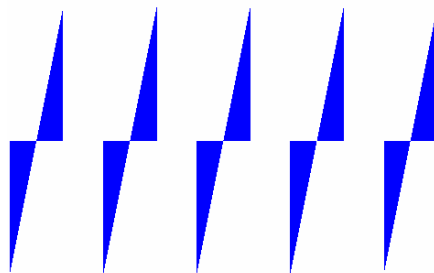
```

```
draw([seq(op([Tt||j(color=blue),Ff||j(color=blue)]),j=
1..n)],(filled=true));
```



G4. Las isometrías generadoras de este tipo de friso son G_A y traslaciones de vector u

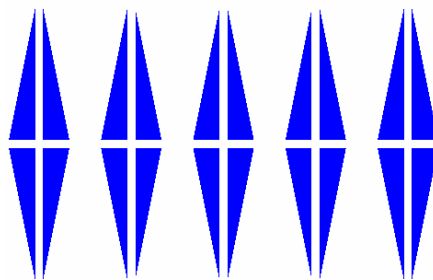
```
> restart:with(geometry):
> point(A,0,0):point(B,1,0):point(C,1,5):
> triangle(T,[A,B,C]):point(Q,0,0):
> n := 5:
for i from 1 to n do
rotation(F,T,Pi,counterclockwise,Q):
dsegment(u,point(M,0,0),point(N,3.5*i,0)):
translation(T||i,T,u):
translation(F||i,F,u):
translation(Q||i,Q,u):end do:
draw([seq(op([T||j(color=blue),F||j(color=blue)]),j=1.
.n)],(filled=true));
```



G5. Si se añade a las isometrías generadoras de G_4 , simetrías de eje r se obtiene el sistema generador para este caso

```
> restart:with(geometry):
> point(A,0,0):point(B,1,0):point(C,1,5):
> triangle(F1,[A,B,C]):
point(P1,1.15,0):point(P2,1.15,5):
point(Q1,0,-0.15):point(Q2,1,-0.15):
> n := 5:for i from 1 to n do
dsegment(u,point(M,0,0),point(N,3.5*i,0)):
line(l1,[P1,P2]):reflection(F2,F1,l1):
line(l2,[Q1,Q2]):reflection(F3,F1,l2):reflection(F4,F2
,l2):
translation(F1||i,F1,u):
translation(F2||i,F2,u):
translation(F3||i,F3,u):
translation(F4||i,F4,u):
end do:

draw([seq(op([F1||j(color=blue),F2||j(color=blue),F3||
j(color=blue),F4||j(color=blue)]),j=1..n)],(filled=true));
```



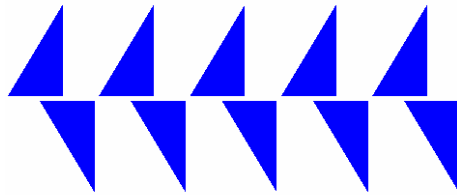
G6. Este tipo corresponde el friso del cenotafio. Son isometrías generadoras de este friso la simetría con deslizamiento $L = t_u \circ S_r$ y t_u

```
> restart:with(geometry):
> point(A,0,0):point(B,3,0):point(C,3,5):
> triangle(T,[A,B,C]):
point(P1,0,-0.15):point(P2,1,-0.15):
```

```

> n := 5:
for i from 1 to n do
dsegment(u, point(M, 0, 0), point(N, 5*i, 0)):
line(l, [P1, P2]):
reflection(H, T, l):
dsegment(v, point(M, 0, 0), point(Nn, 3.5/2, 0)):
translation(F, H, v):
translation(T|i, T, u):
translation(F|i, F, u):
end do:
draw([seq(op([T|j(color=blue), F|j(color=blue)]), j=1.
.n)], (filled=true));

```



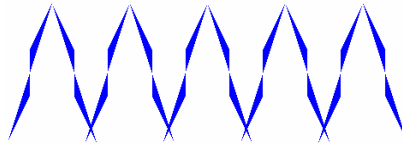
$G7 = \langle S_r, G_A, t_u \rangle$ son las isometrías que generan estos frisos

```

> restart:with(geometry):
> point(A, 0, 0):point(B, 0, 1):point(C, 1, 3):
> triangle(F1, [A, B, C]):
> point(Q, 0, 0):rotation(F2, F1, Pi, counterclockwise, Q):
point(P1, 1, 0):point(P2, 1, 3):line(l, [P1, P2]):reflection
(F3, F1, l):reflection(F4, F2, l):
n := 5:for i from 1 to n do
dsegment(u, point(M, 0, 0), point(N, 3.5*i, 0)):
translation(F1|i, F1, u):
translation(F2|i, F2, u):
translation(F3|i, F3, u):
translation(F4|i, F4, u):

```

```
end do:  
draw([seq(op([F1|j(color=blue),F2|j(color=blue),F3|j  
j(color=blue),F4|j(color=blue)]),j=1..n)],(filled=true));
```



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ALSINA, C. y TRILLAS, E. (1984) Lecciones de Álgebra y Geometría. Ed. Gustavo Gili, S.A., Barcelona
- [2] CEDEBERG, J. N. (1989) A course in modern Geometries. Ed. Springer-Verlag.
- [3] COXETER, H.S.M. y GREITZER, S.L. (1993) Retorno a la Geometría. DLS Euler, Editores.
- [4] FUNDACIÓN DEL PATRIMONIO HISTÓRICO DE CASTILLA LEÓN, 2008. Cuadernos de Restauración nº 6. Cenotafio de San Vicente de la Basílica de los Santos de Ávila.
- [5] MORATALLA DE LA HOZ, A. y SANZ GARCÍA, M^a A., (1999) Simetría. Serie Geometría y Arquitectura (II). Publicaciones del Instituto Juan de Herrera, E.T.S. Arquitectura de Madrid. UPM.
- [6] SANZ GARCÍA, M^a A. y MORATALLA DE LA HOZ, (1998). Geometría en la Arquitectura. Serie Geometría y Arquitectura (I). Publicaciones del Instituto Juan de Herrera, E.T.S. Arquitectura de Madrid. UPM.