Unidad Didáctica: Introducción al estudio de las isometrías del plano con puntos fijos, a través de los grupos de Leonardo.

Moratalla de la Hoz, Ascensión. ascensión.moratalla.delahoz@upm.es [a)] **y**
Sanz García, Mª Agripina. asanz@caminos.upm.es [b)]**.**

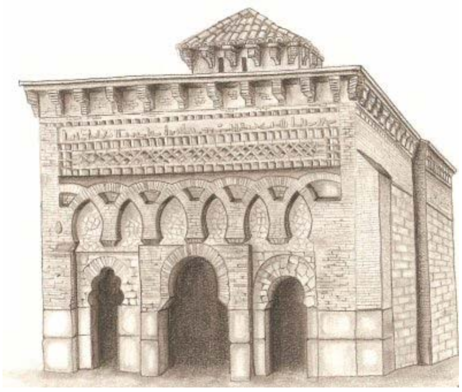
a) Departamento de Matemática Aplicada a la Edificación, al Medio Ambiente y al Urbanismo. E.T.S. Arquitectura de Madrid. Universidad Politécnica de Madrid, España.
b) Departamento de Matemáticas e Informática aplicadas a la Ingeniería Civil E.T.S.I. de Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Madrid, España.

RESUMEN

El presente trabajo tiene como finalidad introducir al lector en el estudio de las isometrías del plano a través de un análisis geométrico de las bóvedas de la Mezquita del Cristo de la Luz (Toledo, España). El análisis se realiza en función de los grupos de simetría de la figura que se obtiene al proyectar sobre el plano la disposición de las nerviaciones de cada una de las bóvedas. La actividad se completa con un programa en Maple para obtener el diseño correspondiente a un grupo de simetría de Leonardo.

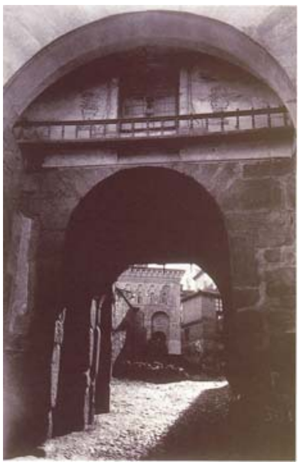
Palabras clave:
Isometrías; grupos de Leonardo; geometría y arte.

1 LA MEZQUITA



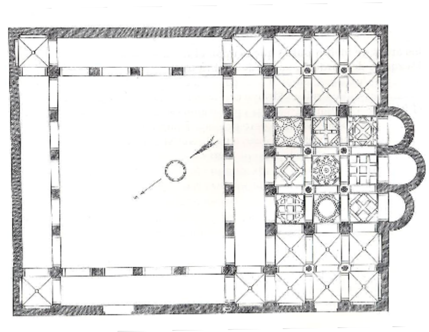
La obra que nos ocupa y a cuyo análisis geométrico dedicamos este artículo es una pequeña pero deliciosa obra arquitectónica que se encuentra en la ciudad de Toledo, España.

Una ciudad amurallada en la que se dieron cita tres culturas la visigoda, la musulmana y la cristiana y en la que podemos encontrar infinidad de tesoros arquitectónicos.



La Mezquita de Bab al-Mardum o Cristo de la Luz, nombre con el que se la conoce hoy en día, es una mezquita de la época califal de los Taifa, aproximadamente del año 1.000 d.C. y fue construída como oratorio ligado a una puerta de acceso a la ciudad (Bab al-Mardum, que se traduce como puerta del mayordomo) para uso de los recién llegados a Toledo o para la preparación a la salida.

En la época del rey Alfonso VI (1200 d.C.) fue transformada en un templo de culto cristiano dedicado al Cristo de la Luz, realizándose entonces la construcción de un ábside en su parte posterior de estilo mudéjar, siendo este la más antigua muestra de arte mudéjar de la que se tiene constancia.



La planta de la parte inicial es prácticamente cuadrada (8,60m x 7,74m) y genera a partir de los cuatro soportes centrales, nueve compartimentos abovedados de dimensiones 1,85m x 1,72m.

Estas cuatro columnas están unidas por arcos de herradura y son la base para la organización del alzado: una zona baja, donde se insinúan los compartimentos, una zona media con ventanas y una zona alta integrada por los nueve compartimentos claramente diferenciados y cubiertos por bóvedas, destacando el central por su mayor altura, 10,5 m.

De manera que el edificio tiene un aspecto cúbico de altura 8 metros que gracias a la cúpula central adquiere una mayor esbeltez.

En cuanto al exterior, podemos apreciar la continuidad de su distribución interior en las fachadas N-O y S-O pues en cada una de ellas encontramos tres puertas que en el caso de la fachada N-O son del mismo tamaño mientras que en la fachada S-O, por ser la entrada principal, la puerta central es ligeramente más amplia debido, según Gómez Moreno, a una posible reforma coincidente con la construcción del ábside mudéjar.

Fachada S-O

FachadaN-O

2. ANÁLISIS GEOMÉTRICO DE LAS BÓVEDAS

Pasemos al interior de la mezquita para hacer un estudio geométrico de sus bóvedas. Como ya destacamos anteriormente el espacio interior está dividido en nueve compartimentos con cubiertas abovedadas cuyo diseño analizamos a continuación.

Proyectando sobre el plano la disposición de las nerviaciones de cada una de las bóvedas, obtenemos una figura en dos dimensiones.

Todas las bóvedas, salvo la central, están diseñadas a partir de un cuadrado, en distintas posiciones, resaltando en algunos casos sus diagonales o las diagonales del cuadrado que las enmarca. Estas bóvedas que muestran una traza diferente en cada uno de los nueve tramos, son réplicas completas o fragmentadas de los modelos de Córdoba (s.X).

Figura 1:
En particular en esta figura, podemos apreciar que el dibujo se puede obtener por la combinación de dos cuadrados, siendo uno de ellos el resultado de girar el otro, dando lugar a una estrella de ocho puntas.

Figura2.
En este caso los cuadrados se contienen unos a otros.

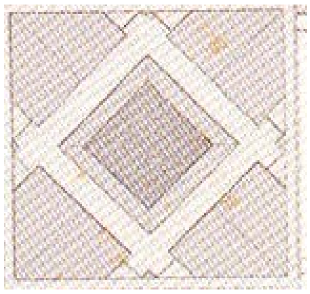


Figura 3
Aquí se combinan diagonales de los cuadrados interior y exterior

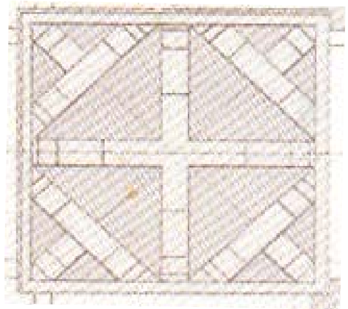


Figura 4.
Este motivo resalta solamente las diagonales del cuadrado exterior.

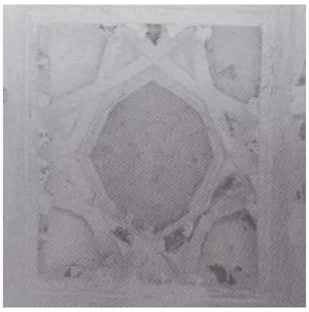
Figura 5
Curiosamente el diseño de esta bóveda recuerda la organización de la planta central de la Mezquita.

Figura 6

Una combinación de cuadrados y diagonales nos proporciona este elaborado trazado.

El conjunto de movimientos del plano que dejan invariantes los diseños de las bóvedas anteriores, está formado por cuatro simetrías axiales, cuyos ejes se cortan en el centro de la figura, y giros de amplitud k=90º, para k=1,2,3,4, con centro en dicho punto, cuya descripción es $D_4=\{G^{90^a}, G^{180^a}, G^{270^a}, G^{360^a}, S_1, S_2, S_3, S_4\}$. El grupo de simetría al que da lugar este conjunto de transformaciones se conoce como grupo cíclico de Leonardo D_4 cuya característica principal es que la figura tiene un punto fijo respecto a las isometrías que la dejan invariante que coincide con su centro.

Los dos modelos siguientes tienen una apariencia estrellada cuyo grupo de simetría es D_4.



Si nos ceñimos a la estrella central podemos apreciar otras isometrías que la dejan invariante, dando lugar a un grupo de simetría distinto al anterior que incluyen giros de amplitud 45º

El compartimento central presenta una traza diferente a las anteriores pues está enmarcado en un octógono cuyo grupo de simetría es el grupo diedral $D_8=\{G^{45k}, S_r$, k = 1,..8, r = 1,...8$\}$.

3 ESTUDIO DE LAS ISOMETRÍAS DESDE EL PUNTO DE VISTA MATEMÁTICO

Transformaciones ortogonales.

Un endomorfismo f: $R^n \to R^n$ se dice ortogonal si conserva el producto escalar definido en el espacio euclídeo R^n

Por ser f una aplicación lineal y ortogonal conserva las normas, las distancias y los ángulos.

El conjunto **GO(R^n)={f/ f: $R^n \to R^n$ es lineal y ortogonal}**, es un grupo respecto de la composición de aplicaciones llamado grupo ortogonal de R^n.

Clasificación de transformaciones ortogonales.

En R^2 las únicas transformaciones ortogonales son los giros alrededor del origen y las simetrías axiales con ejes por el origen.

En R^3 las únicas son la rotación alrededor de un eje por el origen, la simetría especular respecto a un plano que contiene al origen y la simetría rotacional.

Isometrías.

Un movimiento rígido o isometría es una aplicación F: $R^n \to R^n$ que conserva las distancias.

Son isometrías las transformaciones ortogonales, las traslaciones y la composición de ambas.

Se demuestra que toda isometría es una transformación ortogonal o bien una traslación compuesta con una transformación ortogonal.

Grupo de simetría de una figura plana.

Entendemos por figura plana cualquier subconjunto de R^2. Una figura F puede ser estudiada "estáticamente", analizando sus propiedades métricas, o bien "dinámicamente", analizando bajo qué movimientos rígidos permanece invariante.

Consideramos todas las isometrías que transforman la figura en sí misma,
$S(F) =\{f \in GM(R^2)$tal que $f(F)=F\}$, y lo llamamos grupo de simetría de la figura F.

Grupos de simetría de Leonardo.

Un grupo de simetría S(F) de una figura plana F, se llama grupo puntual o de Leonardo, si es un grupo finito y existe un punto de F fijo por todos los elementos de S{F}. A ese punto se le llama centro de simetría de la figura F.

Estos grupos tuvieron gran interés en el Renacimiento para diseñar plantas de capillas adyacentes a un núcleo central, sin romper la simetría central de ese núcleo.

Leonardo hizo un estudio sistemático de estos grupos con vistas a establecer los métodos óptimos para resolver el problema de simetría.

Puesto que los grupos de Leonardo se caracterizan por dejar un punto fijo pasemos a analizar qué isometrías del plano tienen dicha característica.

En primer lugar si S(F) es un grupo con un punto fijo P, podemos afirmar que dicho grupo no contiene traslaciones, por tanto en S(F) sólo habrá giros con centro en el punto P y simetrías respecto de ejes que contengan a P

Si el giro con centro P y ángulo α está en S(F) también estarán los giros con centro en P y ángulo kα. Por ser un grupo finito para k=n obtendremos que nα=2π por tanto α=2π/n. Entonces S(F) contendrá los giros que se obtienen por composición reiterada de $G_P^{\frac{2\pi}{n}}$ A este grupo se le conoce por grupo cíclico generado por $G_P^{\frac{2\pi}{n}k}$ y lo designaremos por C_n

$$C_n = \left\{ G_P^{\frac{2\pi}{n}k}, k = 1, 2, ...n \right\}$$

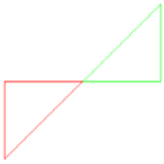
Pero los grupos cíclicos no son los únicos grupos de Leonardo.

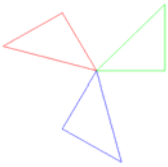
Existen otros grupos denominados grupos diedrales que designaremos por D_n . Estos grupos además de contener giros alrededor del punto fijo P, contienen simetrías axiales cuyos ejes pasan por P de manera que la composición de dos de estas simetrías es un giro con centro en P

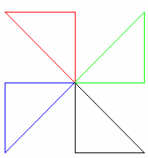
$$D_n = \left\{ G_P^{\frac{2\pi}{n}k}, S_{r_k}, k = 1, 2, ..., n \right\}$$

4 DISEÑO DE GRUPOS DE LEONARDO CON HERRAMIENTAS INFORMÁTICAS

En la siguiente práctica con Maple, vamos a generar los distintos grupos de Leonardo cíclicos C_2, C_3, C_4, …

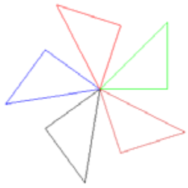






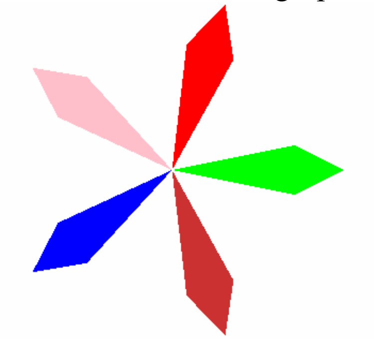
con el fin de mostrar un proceso generalizador.

El procedimiento seguido para obtener la figura con grupo de simetría C_5, que se muestra, es el siguiente:

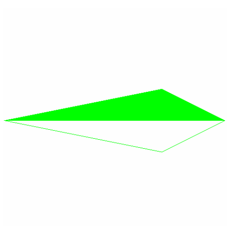


Partiendo del triángulo verde y con un giro en el centro de la figura y ángulo $\frac{2\pi}{5}n$ para n=1, 2, 3, 4, 5 obtenemos los distintos triángulos que conforman la figura. El programa elaborado en maple es sencillo y se puede consultar en el anexo.

Veamos la estrategia seguida en este diseño con el grupo de Leonardo D_5.

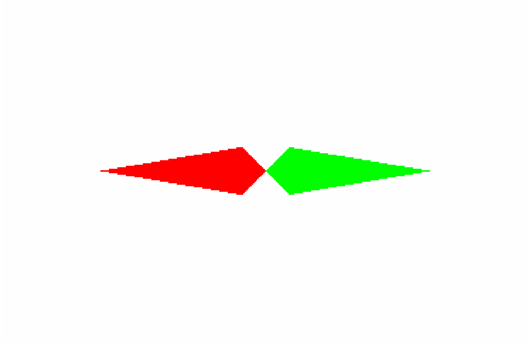
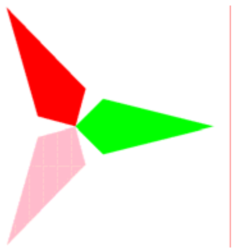
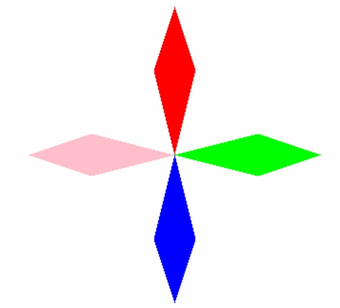


La imagen inicial es un triángulo al que hemos aplicado una simetría para obtener el motivo de color verde



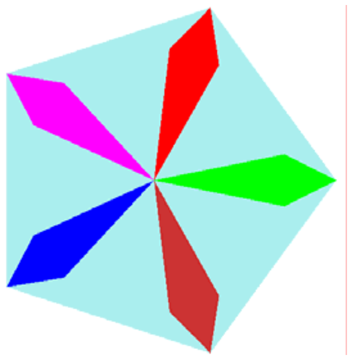
y a continuación hemos realizado un giro de centro el centro de la figura y ángulo $\frac{\pi}{5}$ obteniendo el triángulo rojo y continuando con el proceso descrito anteriormente.

Comenzamos siempre con diseños diedrales correspondientes a D_2, D_3, D_4 que se muestran a continuación

y se generaliza D_n, para cualquier n.

Por último señalar un resultado de interés geométrico;
Para todo $n \geq 3$ el grupo diedral de n es exactamente el grupo de simetría del polígono regular de n lados.
En el ejemplo anterior,el grupo de simetría D_5 de la figura, coincide con el grupo de simetría del pentágono.

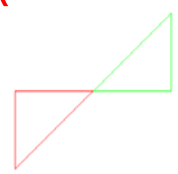


5 PROGRAMACIÓN

GRUPOS CÍCLICOS.
El siguiente programa genera una figura con grupo de Leonardo C_{12} La figura inicial es un triángulo nombrado como T cuyos vértices son A, B y C.
Se crea una tabla Angulo donde guardamos los ángulos que utilizaremos en los distintos giros y se transforma la figura T con estas rotaciones

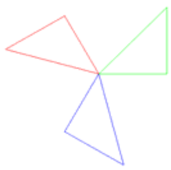
Grupo de Leonardo G2
Comenzamos definiendo un triángulo, T cuyos vértices son A, B y C .
Giramos T un ángulo π alrededor del punto Q y la figura resultante la llamamos T2
Dibujamos T y T2

```
> restart:with(geometry):
> point(A,0,0):point(B,1,0):point(C,1,1):
> triangle(T,[A,B,C]):
> point(Q,0,0):rotation(T2,T,Pi,counterclockwise,Q):
>
> draw([T(color=green),T2(color=red)]);
```



Grupo de Leonardo G3
Siguiendo las pautas anteriores, el triángulo T lo giramos 2π/3 y obtenemos T2, a con tinuación giramos T un ángulo 4π/3 , alrededor de Q y resulta T3

```
> restart:with(geometry):
> point(A,0,0):point(B,1,0):point(C,1,1):
> triangle(T,[A,B,C]):point(Q,0,0):
>
rotation(T2,T,2*Pi/3,counterclockwise,Q):rotation(T3,T,2*Pi
*2/3,counterclockwise,Q):
> draw([T(color=green),T2(color=red),T3(color=blue)]);
```



Recordemos que los grupos de Leonardo responden a la descripción

$$C_n = \left\{ G_P^{\frac{2\pi}{n}k}, k = 1, 2, \ldots n \right\}$$

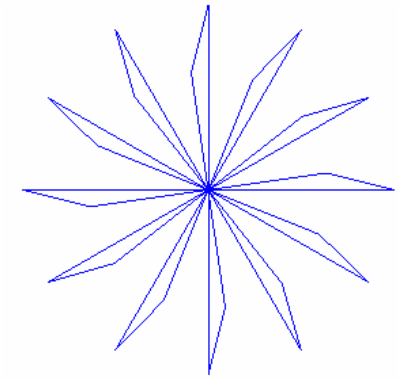
Por lo tanto según vaya aumentando n, más triángulos tendremos que definir. Se hace necesario establecer una generalización del proceso, que en términos de programación se traduce en procedimientos iterativos.
Con el siguiente programa se puede obtener figuras del grupo C_n y se ha elegido n=12

```
restart:with(geometry):

Angulo := table():
n := 12:
for i from 1 to n do Angulo[i] := 2*Pi*i/n end do:

> point(A,0,0):point(B,11,0):point(C,7,1):
triangle(T,[A,B,C]):point(Q,0,0):

> for j from 1 to n do
rotation(T||j,T,Angulo[j],counterclockwise,Q):
end do:
draw([seq(op([T||j(color=blue)]),j=1..n)]);
```



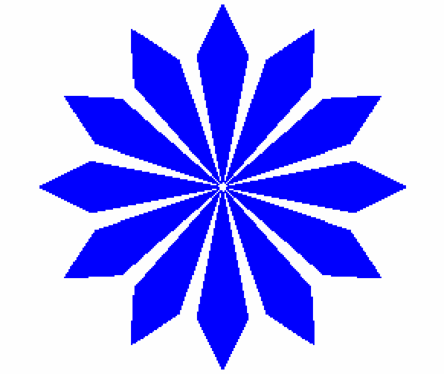
GRUPOS DIEDRALES
Para la obtención de una figura con grupo diedral D_{12} elaboramos el siguiente programa:
Una vez definido el triángulo T, se halla su simétrico, F, respecto de la recta r, y a continuación se transforman T y F con giros de amplitud $\frac{2\pi}{12}n$

```
> restart:with(geometry):
Angulo := table():
n := 12:
for i from 1 to n do Angulo[i] := 2*Pi*i/n end do:

> point(A,0,0):point(B,7,0):point(C,5,1):
> triangle(T,[A,B,C]):point(Q,0,0):line(r,[Q,B]):
```

```
> reflection(F,T,r):

> for j from 1 to n do
rotation(T||j,T,Angulo[j],counterclockwise,Q):
rotation(F||j,F,Angulo[j],counterclockwise,Q):
end do:
draw([seq(op([T||j(color=blue),F||j(color=blue)]),j=1..n)],
filled=true);
```



```
>
```

6 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ALSINA, C. y TRILLAS, E. (1984) Lecciones de Álgebra y Geometria. Ed. Gustavo Gili, S.A.,Barcelona.
2. COXETER, H.S.M. y GREITZER, S.L. (1993) Retorno a la Geometría. DLS Euler, Editores.
3. IZQUIERDO BENITO, R., MUÑOZ HERRERA, J.P. y PÉREZ HIGUERA, T., (1999) Mezquita de Bab Al Mardum. Cristo de la Luz. Ed. Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha, Consejería de Cultura. Toledo.
4. MORATALLA DE LA HOZ, A. y SANZ GARCÍA, Mª A., (1998). Geometría en la Arquitectura. Serie Geometría y Arquitectura (I). Publicaciones del Instituto Juan de Herrera, E.T.S. Arquitectura de Madrid. UPM.
5. MORATALLA DE LA HOZ, A. y SANZ GARCÍA, Mª A., (1999) Simetría. Serie Geometría y Arquitectura (II). Publicaciones del Instituto Juan de Herrera, E.T.S. Arquitectura de Madrid. UPM.
6. QUARONI, L. (1987). Proyectar un edificio. Ocho lecciones de arquitectura, Xarait Ediciones. Madrid.