Prácticas de repaso

1. **Sucesiones numéricas**

   Hallar los límites

   (a) $\lim_n \dfrac{\ln(3n^2+7n+5)}{\ln(n^4+5n^3+2)}$.

   (b) $\lim_n(\sqrt[3]{n^3+2n^2}-\sqrt[3]{n^3-2n^2})$.

   (c) $\lim_n \dfrac{1}{n}\left[(n+1)(n+2)\cdots(n+n)\right]^{\frac{1}{n}}$.

   (d) $\lim_n \sqrt{n}\dfrac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$.

   (e) $\lim_n \left(1+\ln\dfrac{n^2-5n+3)}{n^2+3n-5)}\right)^{2n-5}$.

2. **Series numéricas**

   (a) Carácter de las series $\sum \sqrt[n]{P(n)}$ y $\sum \dfrac{1}{\sqrt[n]{P(n)}}$, donde $P(n)$ es un polinomio de grado k.

   (b) Suma de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{8n^3-2n}$.

   (c) Suma de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$, sabiendo que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

   (d) Suma de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

   (e) Suma de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^3-n^2+n-1}{n!}$.

3. **Series de potencias**

   (a) Hallar el radio de convergencia, convergencia en los extremos y suma de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^n}{(n-1)!}$.

   (b) Hallar el radio de convergencia, convergencia en los extremos y suma de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$.

   (c) Hallar el radio de convergencia, convergencia en los extremos y suma de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)4^{n+1}}$.

   (d) Hallar el radio de convergencia, convergencia en los extremos y suma de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)3^{n-1}}$.

   (Sugerencia: Súmese la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}$.

   (e) Hallar el radio de convergencia, convergencia en los extremos y suma de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)2^n}$.

(f) Hallar el radio de convergencia, convergencia en los extremos y suma de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$.

(g) Dada la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$, hallar:

i. Radio de convergencia.
ii. Convergencia en los extremos del intervalo de convergencia.
iii. Suma de la serie.
iv. Suma de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(3n+1)8^n}$.

4. **Desarrollos en serie de potencias**: Obtener los siguientes desarrollos:

(a) $f(x) = \operatorname{sen} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$. (Utilícese la serie general de Mc Laurin asociada comprobando antes que la derivada n-ésima es $f^{(n}(x) = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.)

(b) $f(x) = \cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$. (Derívese el anterior.)

(c) $f(x) = \dfrac{x^2+x}{(1-x)^3} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$

(d) $f(x) = \operatorname{sh} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. (Sugerencia: $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$)

(e) $f(x) = \operatorname{ch} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$. (Sugerencia: $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ o derivar el anterior)

(f) $f(x) = \sqrt[3]{1+x} = 1 + \dfrac{1}{3}x + \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(3n-4)!!!}{(3n)!!!} x^n$.

5. **Curvas**

(a) Parametrizar las curvas

i. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
ii. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
iii. $y^2 = 2px$, p cte.
iv. $y^2 = x^3$
v. Intersección de $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 - x = 0$

(b) Hallar los vectores tangente, normal principal y binormal, curvatura, torsión y los planos osculador, normal y rectificante en los puntos indicados de las curvas:

i. $\bar{x} = (1+t, -t^2, 1+t^3)$ en $t = 0$.
ii. $\bar{x} = (t^2(t-1), t^2(t-1), t^2(t+1))$ en $t = 1$.

(c) ¿Es plana la curva $\bar{x} = \left(t, \dfrac{1+t}{t}, \dfrac{1-t^2}{t}\right)$?

(d) Hallar las intersecciones del plano $z = 0$ con las rectas tangentes a la hélice $\bar{x} = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $t > 0$

Soluciones de las prácticas de repaso

1. **Sucesiones numéricas**

   (a) $\frac{1}{2}$.

   (b) $\frac{4}{3}$.

   (c) $\frac{4}{e}$.

   (d) $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

   (e) $\frac{1}{e^{16}}$.

2. **Series numéricas**

   (a) Son divergentes.

   (b) $\ln 2 - \frac{1}{2}$.

   (c) $\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$.

   (d) 3.

   (e) $3e$.

3. **Series de potencias**

   (a) Converge en todo R. Suma: $x(x+1)e^x$.

   (b) Converge en $(-1, 1]$. Suma: $\ln(1+x)$.

   (c) Converge en $[-4, 4)$. Suma: $\ln \frac{4}{4-x}$.

   (d) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$.

   (e) Converge en $[-2, 2)$. Suma: $\ln \left(\frac{2}{2-x}\right)^2$.

   (f) Converge en $[-1, 1]$. Suma: $\ln \sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$.

   (g) i. 1.

      ii. Converge en $x = 1$ y no en $x = -1$.

      iii. $\frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2 - x + 1) + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}\pi}{18}$

      iv. $\frac{1}{3}\ln 3 + \frac{\sqrt{3}\pi}{9} - 1$

   (h) **Desarrollos en serie de potencias**: La solución está en el enunciado.

4. **Curvas**

(a) i. $x = a\cos t,\ \ y = b\,\mathrm{sen}\, t$.

ii. $x = a\,\mathrm{ch}\, t,\ \ y = b\,\mathrm{sh}\, t$.

iii. $y = t,\ \ x = \dfrac{t^2}{2p}$.

iv. $y = t,\ \ x = t^{\frac{2}{3}}$.

v. $x = \cos^2 t,\ \ y = \mathrm{sen}\, t \cos t,\ \ z = \mathrm{sen}\, t$.

(b) i. $\vec{t} = (1,0,0), \vec{n} = (0,-1,0), \vec{b} = (0,0,-1)$. Curvatura 2, torsión -3, Plano osculador $z = 1$, normal $x = 1$ y rectificante $y = 0$.

ii. $\vec{t} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2), \vec{n} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1), \vec{b} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)$. Curvatura $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$, torsión 0 (la curva es plana), Plano osculador $x = y$, normal $x + y + 2z = 4$ y rectificante $x + y - z + 2 = 0$.

(c) Si

(d) $x = \cos t + t\,\mathrm{sen}\, t,\ \ y = \mathrm{sen}\, t - t\cos t$.