Tema 6

Funciones de varias variables

1. Halle los puntos de la curva $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - t \end{cases}$ en que el módulo de la velocidad es mínimo.

2. Dada la circunferencia
$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\text{sen}t \end{cases} \qquad a > 0$$
halle los vectores tangente y normal en un punto genérico. Calcule además la curvatura y el radio de curvatura.

3. Calcule la curvatura y la torsión de
$$\sigma(t) = \left(t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{t}\right)$$
en función del parámetro t.

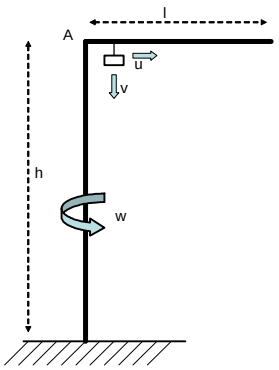
4. Consideremos la hélice parametrizada por
$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\text{sen}t \\ z = bt \end{cases} \qquad a > 0,\ b \neq 0$$
Calcule :
   (a) el triedro de Frenet
   (b) la curvatura y la torsión
   (c) las ecuaciones de los planos osculador, normal y rectificante en un punto genérico.

   Discuta el caso $b = 0$

5. Sea $\sigma : (0, \pi) \longrightarrow \mathbf{R^2}$ definida por
$$\sigma(t) = \left(\text{sen}t, \cos t + \log\left(tg\frac{t}{2}\right)\right) \qquad (tractriz)$$
compruebe que σ es diferenciable, que la velocidad no se anula más que en $t = \frac{\pi}{2}$, y que la longitud del segmento de la tangente a la tractriz entre el punto de tangencia y el eje OY es igual a 1.

6. En una grúa como la de la figura, la carga se encuentra originalmente en el punto A de coordenadas $(0, 0, h)$. En el instante $t = 0$ empieza a moverse con velocidad horizontal u y vertical v, mientras la grúa gira con velocidad angular w. Las dimensiones lineales son las de la figura.
   (a) Describir la trayectoria de la carga.
   (b) Determinar el instante en que toca el suelo.
   (c) Coordenadas del punto en el que toca el suelo y velocidad en ese instante.

.



7. Estudiar la continuidad, existencia y continuidad de las derivadas parciales y diferenciabilidad de las funciones

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (c) $f(x,y) = \begin{cases} xy^2\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (f) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

8. Hallar todas las derivadas parciales de orden 1 y orden 2 de las funciones

   (a) $f(x,y) = e^{xy} + x^y + y^x + e^\pi$

   (b) $f(x,y,z) = \operatorname{arctg}(xyz)$

   (c) $f(x,y,z) = x^2y^2e^z + y^2z^2e^x + z^2x^2e^y$

9. La distribución de temperaturas en una placa de metal viene dada por la función $T(x,y) = 20 - 4x^2 - y^2$. Calcule la dirección y sentido en la que aumenta la temperatura más rápidamente, partiendo del punto $(2,-3)$.

10. Determine el valor de las constantes a, b y c para que la derivada direccional de $f(x,y,z) = e^{ax+by+cz}$ en el punto $(0,0,0)$ tenga un valor máximo de 3 en la dirección y sentido de $\vec{v} = (1,-1,1)$.

11. Consideremos la superficie xy+yz+zx=1. Calcule la ecuación del plano tangente en el punto $(1,1,0)$ y la ecuación de la recta normal.

12. Sean $A \subset R^2$ un abierto y $f : A \to R$ una función de clase $C^{(3}(A)$. Escriba el polinomio de Taylor de orden 2 de f en el punto $(x_0, y_0) \in A$.

13. Sea $f : \Omega \subset R^2 \to R$ una función diferenciable. Sus únicos puntos críticos son $(27, 42)$, $(0, 3)$, $(-1, -1)$ y los valores en dichos puntos son $f(27, 42) = 105$, $f(0, 3) = -2$, $f(-1, -1) = 0$. ¿Alcanza la función f sus valores máximo y mínimo absolutos en $\{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$?. ¿Y en $\{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 1\}$?.

14. Calcule los máximos y mínimos absolutos de la función $z = +\sqrt{3 + 2x - y^2 - x^2}$ en su dominio de definición.

15. Calcule los extremos absolutos de la función $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{xy}$ en el dominio $\{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

16. Halle las dimensiones del paralelepípedo de mayor volumen que se puede inscribir en el elipsoide :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

17. Halle los puntos de la curva $4x^2 + y^2 - 16x + 12 = 0$ que se encuentran más cerca y los que se encuentran más lejos del origen de coordenadas, determinando:

    (a) Puntos críticos.

    (b) Puntos a distancia mínima.

    (c) Puntos a distancia máxima.

18. Siendo $z = u^2 v$, $u = x + y$, $v = xy$, hallar las derivadas parciales $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

    (a) Aplicando la regla de la cadena.

    (b) Sustituyendo u y v por sus valores en función de x, y.

19. Siendo $z = z(u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, hallar las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$

    (a) Siendo $f(x, y) = xuy$

    (b) Siendo $f(x, y) = x\dfrac{\partial u}{\partial x}z$

20. Sea $f(x, y) = \displaystyle\int_0^{\frac{y}{2}} \operatorname{sen}(x + 2t)\, dt$, $g(x, y) = f(xe^y, x + y)$. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = g(x, y)$ en el punto $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$.

21. Sea $f : R^2 \to R$ una función de clase $C^{(1}$ con $\nabla f(2, 0) = (1, -3)$ y sea $g(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$. Calcule $\frac{\partial}{\partial y}(f \circ g)(1, 1)$.

22. Sean $u(x, y) = \operatorname{sen}(x - y) + \cos(x + y)$ y $\begin{cases} x = st \\ y = s^2 - t^2 \end{cases}$. Calcule $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ y $\dfrac{\partial u}{\partial t}$

23. Sea $f : R^2 \to R$ una función de clase $C^2(R^2)$, $f(u, v)$, que verifica:

    - $f(0, -1) = 1$

- $\frac{\partial f}{\partial u}(0,-1) = \frac{\partial f}{\partial v}(0,-1) = 0$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(0,-1) = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(0,-1) = 2$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(0,-1) = 0$

y $g : R^2 \to R^2$, $g(x,y) = (x^2 + y, xy)$. Si $h = f \circ g$, demuéstrese que $(1,-1)$ es un punto crítico de h y determínese su naturaleza.

24. Sean A el conjunto R^2 sin el punto (0,0) y $f : R^2 \to R^2$ definida por $f(x,y) = (x^2 - y^2, xy)$. Justifique si f admite una inversa local en todo punto de A. ¿Tiene inversa global en A?.

25. Demuestre que la ecuación $xy + z + 3xz^5 = 4$ define a z como función implícita de x e y en un entorno del punto $(x,y,z) = (1,0,1)$. Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}(1,0)$.

26. Compruebe que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} xu + yv - 4 = 0 \\ xy - uv + 4 = 0 \end{cases}$$

define a u y v como funciones diferenciables de x e y en un entorno del punto cuyas coordenadas son $x = 2$, $y = 0$, $u = 2$, $v = 2$.

Sabiendo que u tiene derivadas parciales de segundo orden continuas, obtenga su polinomio de Taylor de grado 2 alrededor del punto $(x,y) = (2,0)$.

27. (a) Demuestre que $f(x,y) = (xye^{xy}, x + y)$ admite una inversa local en $(1,0)$. Si designamos a esta inversa por $g(x,y)$, calcule $Jg(0,1)$ (matriz jacobiana de g en $(0,1)$).

    (b) Demuestre que la ecuación
    $$xu + ye^{2x-u} = 2$$
    define implícitamente a u como función de x, y en un entorno del punto $(x,y,u) = (1,0,2)$. Si designamos a esta función por $u(x,y)$, calcule $\nabla u(1,0)$.

    (c) Calcule $\nabla(u \circ g)(0,1)$.

28. Sean $f : R^3 \to R^2$ y $g : R^+ \times R \to R$ ($R^+ = \{x \in R : x > 0\}$) definidas por:
    $$f(x,y,z) = (e^x + y^2, e^z + y)$$
    $$g(u,v) = v^2 + \log u$$
    Calcule, si existe, la matriz Jacobiana de $g \circ f$ en el punto $(0,0,0)$.

29. Dadas las funciones:
    $f : R^2 \to R^2$ $\qquad f(x,y) = (y + cosx, x + e^y)$
    $g : R^2 \to R$ $\qquad g(t,u) = t + u$
    Se pide:

    (a) Derivada de $F = g \circ f$ en el punto (0, 0) según el vector $\vec{v} = (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}})$.

    (b) Máximo valor de la derivada direccional de F en (0, 0).

    (c) Comprobar que la ecuación $F(x,y) = 2$ define a y como función implícita de x en un abierto que contiene al punto (0, 0).

    (d) Calcular la derivada de esa función implícita en el punto $x = 0$.

30. Compruebe que las curvas $3x - 2y + x^3 - x^2y = 0$, $x^2 - 2x + y^2 - 3y = 0$ son ortogonales en el origen.