Tema 5

Sucesiones

1. Calcule los siguientes límites:

(a) $\lim \left[\dfrac{\sqrt[4]{n^2+2n}}{\sqrt{n-1}}\right]^n$

(b) $\lim \sqrt[n]{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}}$

(c) $\lim \left(\log(n+1) - \sqrt{\log n \cdot \log(n+1)}\right)$

(d) $\lim \left(1+\operatorname{sen}\dfrac{1}{n}\right)^n$

(e) $\lim \left(\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}}\right)^{\sqrt{n}}$

(f) $\lim \left[\dfrac{4^n(n!)^2}{(2n)!}\right]^2 \cdot \dfrac{1}{n}$

(g) $\lim \dfrac{(\sqrt[3]{n}-1)^2}{\sqrt[3]{(\sqrt{n}+1)^4}}$

(h) $\lim \left(\sqrt{n^2+3n+1} - \sqrt{n^2+n+2}\right)$

(i) $\lim \left(\sqrt[3]{n^3+8n^2} - \sqrt[3]{n^3-8n^2}\right)$

(j) $\lim \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\sqrt{\dfrac{n+1}{2}}$

(k) $\lim \dfrac{2}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}}\cdot k$

(l) $\lim \left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$

(m) $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n+n}}\right)$

(n) $\lim \dfrac{\frac{n}{1}+\frac{n-1}{2}+\frac{n-2}{3}+\cdots+\frac{3}{n-2}+\frac{2}{n-1}+\frac{1}{n}}{\ln(n!)}$

(o) $\lim \dfrac{1\cdot\operatorname{sen}\alpha + 2^2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}+\cdots+n^2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{n}}{n^2}$

2. Sea (x_n) una sucesión convergente de número reales tal que $x_n = (-1)^n a_n$ y $a_n > 0$ para todo n. Calcule el límite de x_n.

3. Dése un ejemplo de una sucesión no convergente que tenga alguna subsucesión convergente (indicando cuál). Dése también un ejemplo de una sucesión que no posea ninguna subsucesión convergente.

4. Sea (x_n) una sucesión de números reales. Consideremos las siguientes afirmaciones:

   (a) (x_n) es una sucesión de Cauchy

   (b) (x_n) está acotada

   (c) (x_n) tiene una subsucesión convergente

   Indique qué implicaciones entre ellas son ciertas en todo caso y dé un ejemplo para las falsas.

5. Sea $(x_n)_{n=1}^{+\infty}$ una sucesión de números reales. Dé un ejemplo en el que

$$\lim_{n\to+\infty} |x_n| = l \text{ } y \lim_{n\to+\infty} x_n \neq l$$

y otro en el que

$$\lim_{n\to+\infty} |x_n| \textit{ existe pero } \lim_{n\to+\infty} x_n \textit{ no existe}$$

6. Calcule, si existe, $\lim_{n\to+\infty}(\cos n\pi \operatorname{sen} n\pi)$.

7. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ una sucesión de números reales tal que $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$, $a \in R$. ¿Podrá tener la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ una cantidad infinita de términos negativos si $a > 0$?.

Series numéricas

1. Estudie el carácter de las series

   (a) $\sum \dfrac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$ (b) $\sum \dfrac{4^n(3n^2-4n+5)}{n!}$ (c) $\sum \dfrac{4n^3+1}{(n+1)!}\cdot 5^n$

   (d) $\sum \log\left(1+\dfrac{7}{6n^2+5n-6}\right)$ (e) $\sum \dfrac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$

   (f) $\sum P(n)x^n$, siendo $P(n)$ un polinomio de grado k y $x>0$.

2. Estudie el carácter de las siguientes series y sume las que sean convergentes:

   (Indicación: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$)

   (a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2n+3}{n^3+n^2-2n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(4n-1)^2-1}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3+n^2}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+1+(n-1)!}{(n+1)!}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^3-n^2+n-1}{n!}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n^2+1}{(n+2)!}\cdot 2^n$

   (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4n^3+5}{(n+1)!}5^n$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n-2}{(2n-1)(n+1)n^2}$ (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(n+1)}{3^n}$

3. En un triángulo equilátero de lado l se inscribe otro triángulo equilátero, y en este otro, y asi sucesivamente. Hallar la suma de las áreas de dichos triángulos.

4. ¿Por qué ha de ser $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ si $\sum x_n$ es convergente?

5. Sea $\sum a_n$ una serie de términos no negativos convergente. ¿Qué se puede asegurar sobre la convergencia o divergencia de la serie $\displaystyle\sum \frac{\ln(1+a_n)}{e^{a_n}}$?

6. Sea $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ una sucesión de números reales. ¿Es cierto que $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ es convergente si y sólo si $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_{n+1}-a_n)$ es convergente?.

7. Considérese la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n arctg\frac{1}{n}$. ¿Es convergente?. ¿Es absolutamente convergente?.

8. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ una sucesión de números reales estrictamente positivos. Si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}<1$, ¿ qué se puede afirmar acerca de la convergencia de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$?.

9. Sabiendo que las siguientes series son convergentes calcule su suma:

   (a) $A = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+...$
   (b) $B = 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+...$
   (c) $C = \frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+...$
   (d) $D = 1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{2}{9}+...+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}-\frac{2}{3n+3}+...$

10. Investigue la convergencia absoluta de las series:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!}(1+\cos^2 t)$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}\operatorname{sen}(nt)$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n+n^2t^2}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{n^2}$

según los valores de t.

Series de potencias

1. Halle el campo de convergencia de las series de potencias:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(n^2+n)x^{n-1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{4^{n+1}}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{2^n}(x+3)^n$ (f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n+1}{3n-1}(x+5)^n$

2. Intervalo de convergencia, convergencia en los extremos del mismo y suma de las series:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(3n+2)x^n$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{4n-1}}{4n-1}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}nx^n$

   en su intervalo de convergencia.

3. (a) Demostrar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)(n+2)}$ es convergente y hallar su suma. (Indicación: expresar $\displaystyle\frac{2n+1}{n(n+1)(n+2)}$ como $\displaystyle\frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}+\frac{c}{n+2}$ para ciertas constantes $a,b,c\in R$.)

   (b) Dada la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{n\,8^n}$, determinar su intervalo de convergencia (estudiando también los extremos del mismo) y sumarla en él.

4. Dada la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{3n+1}}{3n+1}$, hallar:

   (a) Radio de convergencia. (Hasta 1 punto.)

   (b) Convergencia en los extremos del intervalo de convergencia. (Hasta 2 puntos.)

   (c) Suma de la serie. (Hasta 4 puntos.)

   (d) Suma de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(3n+1)8^n}$. (Hasta 3 puntos.)

5. Desarrolle en serie de MacLaurin las funciones:

(a) $f_1(x) = \dfrac{x}{1+2x}$

(b) $f_2(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$

(c) $f_3(x) = \dfrac{2x+3}{(1-x)(2-x)}$

(d) $f_4(x) = (1+x)e^{-x}$

(e) $f_5(x) = \log \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(f) $f_6(x) = \dfrac{x^2+x}{(1-x)^3}$

(g) $f_7(x) = \dfrac{1+x}{1+x+x^2}$

(h) $f_8(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$