Tema 4

Integral de Riemann

1. Calcule las siguientes integrales indefinidas:

   Inmediatas o con cambio elemental de variable:

   1) $\int sen\, x \cdot \cos\, x\, dx$ 2) $\int \frac{1}{x}(\log x)^3\, dx$ 3) $\int xe^{x^2}\, dx$

   4) $\int \frac{x}{\cos^2 x^2}\, dx$ 5) $\int \frac{e^x - 3e^{2x}}{1+e^x}\, dx$ 6) $\int sech\, x\, dx$

   7) $\int cotg\, x\, dx$ 8) $\int \frac{dx}{a^2e^x + b^2e^{-x}}$ 9) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}\, dx$

   10) $\int \frac{dx}{senx \cdot cosx}$ 11) $\int \frac{x}{a^4+x^4}\, dx$

   Relaciones trigonométricas y cambios de variable trigonométricos:

   12) $\int \frac{dx}{sen\, x}$ 13) $\int \frac{dx}{cos\, x}$ 14) $\int \frac{dx}{sen^2x \cdot cos^2x}$

   15) $\int cos^3x\, dx$ 16) $\int cos^4x\, dx$ 17) $\int sen^4x\, dx$

   18) $\int \frac{dx}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

   Fracciones simples y Hermite:

   19) $\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\, dx$ 20) $\int \frac{dx}{x(1+x^2)^2}$ 21) $\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)x}\, dx$

   22) $\int \frac{dx}{1+x^4}$

   Por partes:

   23) $\int \frac{2x-4}{(x-1)(x^2-4x+8)^2}\, dx$ 24) $\int arc\, senx\, dx$ 25) $\int x^3e^{-x^2}\, dx$

   26) $\int \frac{x}{cos^2x}\, dx$ 27) $\int senx \cdot \log\,(cosx)\, dx$

   28) $\int arc\, tgx \cdot \frac{x}{(1+x^2)^2}\, dx$

Irracionales:

29) $\int \sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}\, dx$ 30) $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}$

Irracionales cuadráticos:

31) $\int \dfrac{dx}{(x+1)\sqrt{2x^2+3x-1}}$ 32) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ 33) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{-x^2+2x+1}}$

34) $\int \dfrac{dx}{x+\sqrt{x^2-1}}$ 35) $\int \dfrac{x}{\sqrt{-x^2+2x+1}}\, dx$ 36) $\int x\sqrt{x^2+x+1}$

37) $\int \dfrac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$

Trigonométricas:

38) $\int \dfrac{dx}{sen^3 x \cdot cos^3 x}$ 39) $\int \dfrac{dx}{a^2 sen^2 x + b^2 cos^2 x}$ 40) $\int \dfrac{dx}{senx\,(a+b\,cosx)}$

2. Compruebe que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^n x\, dx = \dfrac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{n-2} x\, dx$ $(n \geq 2)$ y deduzca el valor de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^n x dx$, cualquiera que sea $n \in N$. (Esto es lo que se llama una *Fórmula de reducción.*)

3. Halle una fórmula de reducción para las integrales:

   a) $I_m = \int \dfrac{x^m}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ *b)* $I_m = \int \dfrac{dx}{x^m\sqrt{1-x^2}}$

4. Calcule las integrales definidas:

   a) $\int_1^4 \dfrac{1+\sqrt{x}}{x^2}\, dx$ *b)* $\int_0^1 \dfrac{x}{x^2+3x+2}\, dx$ *c)* $\int_0^1 \dfrac{x^3}{1+x^8}\, dx$ *d)* $\int_e^{e^2} \dfrac{dx}{x\log x}$

   e) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} tgx\, dx$ *f)* $\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^2 x\, dx$ *g)* $\int_a^b e^{ax} cos(mx)\, dx$

5. Derive las funciones $f(x) = \int_0^{x^2} \dfrac{1}{1+sen^2\, t}\, dt$, $g(x) = \int_{cos\, x}^2 \dfrac{1}{1+sen^4\, t}\, dt$.

6. Calcule los límites siguientes:

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^{x^2} sen\sqrt{t}\, dt}{x^3}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\int_0^x (arc\,tg\ t)^2 dt}{\sqrt{x^2+1}}$

7. Establezca la desigualdad $1 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{sen\, x}{x}\, dx \leq \dfrac{\pi}{2}$

8. Use las reglas del trapecio y de Simpson para estimar las siguientes integrales.

   (a) $\int_1^2 x^2\,dx$, $n = 4$

   (b) $\int_0^1 4x^3\,dx$, $n = 2$

   (c) $\int_0^3 \frac{1}{1+x^3}\,dx$, $n = 6$

   (d) $\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$, $n = 4$

9. Discuta el carácter de las siguientes integrales impropias:
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}},\quad \int_0^1 \frac{dx}{x^4-x^3},\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{senx\cdot cosx}},\quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}},\quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx,\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$$

10. Calcule las siguientes integrales impropias: $\int_0^1 \frac{5}{x^2}\,dx$, $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$, $\int_2^3 \frac{10}{(3-x)^{\frac{5}{2}}}\,dx$, $\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$,
$\int_0^2 \log x\,dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$, $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$, $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}}$, $\int_{-\infty}^2 xe^x\,dx$

11. Calcule la longitud de la curva $y = ch\,x$ comprendida entre $x = -1$ y $x = 1$.

12. Calcule la longitud de un trozo de la espiral logarítmica $\rho = ae^{m\theta}$, $(\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2)$

13. Calcule la longitud de la cardioide $\rho = a(1 - cos\theta)$, $(a > 0)$

14. Calcule el área encerrada por la recta $x + 2y = 4$ y la parábola $y^2 = 4 + x$.

15. Calcule el área encerrada por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

16. Calcule el área de la región común a los círculos $\rho \leq 3\sqrt{2}\,r\,cos\theta$ y $\rho \leq 3\,r\,sen\theta \quad (r > 0)$

17. Calcule el área limitada por los tres lazos de la curva $\rho = a\,cos\,3\theta, \quad a > 0$.

18. Calcule el área interior a la cardioide $\rho = 1 + cos\,\theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ y exterior a la circunferencia $\rho = 1$.

19. Halle el volumen del toro engendrado al girar el círculo $(y - R)^2 + x^2 \leq r^2 \quad (0 < r < R)$ alrededor del eje OX.

20. Calcule el volumen del cuenco obtenido al girar alrededor del eje OY la región comprendida entre las curvas $y = x^2$ y $y = x^3$

21. Calcule el volumen del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$

22. Un sólido tiene una base en forma de elipse cuyos ejes mayor y menor miden 10cm y 8cm, respectivamente. Calcule su volumen sabiendo que toda sección del mismo, perpendicular al eje mayor es un triángulo isósceles de altura igual a 6cm.

23. En un valle con forma de medio elipsoide se construye una presa que se supone plana. El valle tiene las siguientes dimensiones: longitud 8 km., anchura máxima 4 km., profundidad máxima 100 m.. La presa está situada a 7 km. del fondo del valle. Calcule:

    - La capacidad máxima del pantano
    - El volumen de agua almacenada cuando la máxima cota es 20 m.

24. **Integrales Eulerianas**

- Consideremos la integral impropia:

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx \qquad\qquad p \in R$$

(a) Compruebe que la integral converge para todo $p > 0$.

(b) Llamaremos función Gamma, Γ, a la función:

$$\Gamma : (0, +\infty) \longrightarrow R \;\; \Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$$

Compruebe que:

i. $\Gamma(1) = 1$

ii. Si $p > 1$, $\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1)$. Nótese, como consecuencia, que si $n \in N$, $\Gamma(n+1) = n!$

- Consideremos la integral impropia:

$$\int_0^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \qquad\qquad p, q \in R$$

(a) Compruebe que la integral es convergente $\forall p, q > 0$

(b) Llamaremos función Beta a la función:

$$\beta : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \longrightarrow R \;\; \beta(p, q) \longrightarrow \int_0^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

Compruebe las siguientes propiedades:

i. $\beta(p, q) = \beta(q, p)$ (Indicación: utilice el cambio $t = 1 - x$)

ii. $\beta(p, 1) = \beta(1, p) = \frac{1}{p}$

iii. $q > 1 \Longrightarrow \beta(p, q) = \frac{q-1}{p}\beta(p + 1, q - 1)$ (Indicación: integre por partes)

iv. $\beta(m, n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$ para $m, n \in N$ (Indicación: aplique reiteradamente la propiedad anterior)

v. $\beta(p, q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{2p-1}\alpha \, cos^{2q-1}\alpha \, d\alpha$ (Indicación: haga el cambio $x = sen^2\alpha$)