

CAPÍTULO 14

Métodos numéricos lineales multipaso

Los métodos numéricos de resolución de ecuaciones diferenciales que se han considerado en el capítulo anterior proporcionan el valor aproximado z_{n+1} de la solución de un problema de valor inicial en el punto x_{n+1} a partir de otro valor aproximado z_n de la solución en el punto x_n . Para obtener z_{n+1} se han tenido que calcular previamente los valores aproximados de la solución en los puntos de la malla x_1, x_2, \dots, x_n . Parece entonces razonable desarrollar fórmulas numéricas que aprovechen la información obtenida en etapas anteriores para obtener el valor aproximado z_{n+1} . Se obtienen de esta forma los métodos lineales multipaso, que constituyen el segundo gran grupo de métodos numéricos para resolver un problema de valor inicial y que son el objetivo de estudio de este capítulo. Por una mayor simplicidad se supone que los métodos que se presentan son de paso fijo, es decir, la diferencia entre x_{n+1} y x_n es siempre constante, $x_{n+1} - x_n = h$, aunque existen otros métodos de paso variable, como se comentará en la *sección 5ª*.

14.1. DEFINICIÓN

Se considera el problema de valor inicial:
$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Definición 14.1.1:

Un **método lineal de k pasos** viene determinado por una expresión de la forma:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot z_{n+j} = h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j \cdot f(x_{n+j}, z_{n+j}), \quad n \geq 0,$$

donde α_j y β_j son números reales.

Se suele representar a $f(x_{n+j}, z_{n+j})$ como f_{n+j} , por lo que se obtiene la expresión:

$$\alpha_0 \cdot z_n + \alpha_1 \cdot z_{n+1} + \dots + \alpha_k \cdot z_{n+k} = h \cdot [\beta_0 \cdot f_n + \dots + \beta_k \cdot f_{n+k}] \quad (14.1.1)$$

Para que el método sea de k pasos se debe imponer que $|\alpha_0| + |\beta_0|$ sea distinto de cero y que el coeficiente α_k también sea distinto de cero. Sin pérdida de generalidad es posible, por tanto, normalizar el método imponiendo que $\alpha_k = 1$. Se trata entonces de obtener a través de esta fórmula el valor de z_{n+k} suponiendo conocidos los valores de z_n, z_{n+1}, \dots y de z_{n+k-1} .

Se observa que tanto los métodos de un paso como los métodos multipaso vienen definidos por una ecuación en diferencias.

El objetivo de este capítulo es obtener fórmulas de estas características que proporcionen una aproximación razonable a la solución del problema de valor inicial al que se aplican.

Si el coeficiente β_k es igual a cero se dice que el método es **explícito** o

de tipo abierto. En este caso se obtiene el valor de z_{n+k} directamente despejando en la ecuación:

$$z_{n+k} = -(\alpha_0 \cdot z_n + \alpha_1 \cdot z_{n+1} + \dots + \alpha_{k-1} \cdot z_{n+k-1}) + h[\beta_0 \cdot f_n + \dots + \beta_{k-1} \cdot f_{n+k-1}]$$

Si β_k es distinto de cero se dice que el método es **implícito** o de tipo cerrado. En un método implícito para despejar z_{n+k} es preciso despejarlo también en f_{n+k} para lo que en general es necesario aplicar a la ecuación en diferencias un procedimiento de iteración adecuado a las características de la fórmula.

Una primera observación es que para poder aplicar un método lineal multipaso se necesita conocer previamente los **valores de arranque**. Si la fórmula es de k pasos se necesita conocer como valores de partida el valor de z_0, z_1, \dots , y de z_k , es decir, los valores de arranque de la fórmula. Como el problema de valor inicial sólo proporciona el primero de ellos, $z_0 = y_0$, los restantes valores se pueden obtener aplicando en primer lugar una fórmula de un paso, como puede ser alguno de los métodos de Taylor, de Runge-Kutta o el método de Euler.

Una segunda observación es que los métodos actuales combinan fórmulas de diferente número de pasos, y también aumentan o disminuyen el tamaño del paso, h , en la medida en que lo permite el control del error que se va cometiendo al aplicar las fórmulas.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 14.1.1: Utilizando el teorema del valor medio se obtiene que:

$\varphi(x_{n+2}) - \varphi(x_n) = 2h \cdot \varphi'(c)$ donde c es un punto intermedio entre x_n y x_{n+2} . Si se toma como $c = x_{n+1}$ se tiene: $\varphi(x_{n+2}) - \varphi(x_n) = 2h \cdot \varphi'(x_{n+1})$.

Si se supone que $\varphi(x)$ es la solución del problema de valor inicial

$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ se tiene que $\varphi'(x_{n+1}) = f(x_{n+1}, \varphi(x_{n+1}))$, y por tanto $\varphi(x_{n+2}) - \varphi(x_n)$

$= 2h \cdot f(x_{n+1}, \varphi(x_{n+1}))$, lo que da origen al método:

$$z_{n+2} - z_n = 2h \cdot f_{n+1},$$

que es uno de los métodos de Nyström.

Ejemplo 14.1.2: Comparar la fórmula anterior con la expresión general de un método multipaso y determinar el número de pasos y sus coeficientes.

Al comparar $z_{n+2} - z_n = 2h \cdot f_{n+1}$ con: $\alpha_0 \cdot z_n + \alpha_1 \cdot z_{n+1} + \dots + \alpha_k \cdot z_{n+k} = h \cdot [\beta_0 \cdot f_n + \dots + \beta_k \cdot f_{n+k}]$ se obtiene que $\alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_0 = -1$, $\beta_2 = 0$, $\beta_1 = 2$, $\beta_0 = 0$, por lo que es un método explícito de dos pasos.

Ejercicios

14.1. Comparar el método de Nyström:

$$z_{n+3} - z_{n+1} = \frac{h}{3} \cdot (7f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n)$$

con la expresión general de un método multipaso y determinar sus coeficientes y el número de pasos.

14.2. En los métodos de Milne-Simpson:

a) $z_{n+2} = z_n + 2h \cdot f_{n+2}$

b) $z_{n+2} = z_n + \frac{h}{3} \cdot (f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n)$

comparar con la expresión general de un método multipaso determinando sus coeficientes y el número de pasos. Determinar si son métodos implícitos o explícitos.

14.2. MÉTODOS DE ADAMS

Los métodos de *Adams* son los métodos lineales multipaso más antiguos, ya que datan del siglo XIX. John C. Adams (1819 – 1892), al analizar, en 1846, irregularidades en la órbita de Saturno hizo la conjetura de la existencia de otro planeta, por lo que cuando fue observado Urano, que hasta entonces no se conocía, sus métodos adquirieron fama, incluso fuera de la comunidad científica. Los métodos que se conocen como métodos de *Adams*, éste no los publicó. Fueron publicados en 1885 los métodos que hoy se conocen como métodos de Adams-Bashforth o métodos explícitos, por *Bashford*, en un trabajo relacionado con el tratamiento numérico de problemas de capilaridad, tensión superficial y sobre la forma de una gota, aunque en dicho trabajo comentó que ya eran conocidos desde 1855 por *Adams*. Los métodos implícitos, o métodos de Adams-Moulton, aparecen en 1926, en un trabajo relacionado con problemas de balística.

A pesar de su antigüedad los métodos de Adams son los métodos lineales multipaso más utilizados y, debido a sus buenas propiedades, continúan en la actualidad siendo empleados mediante modernos algoritmos y, salvo problemas particulares, son los únicos métodos lineales multipaso de interés de propósito general. Aunque durante los años 1960-1970 se utilizaron muchos otros métodos, como los métodos de Nyström o los métodos de Milne-Simpson de los ejemplos y ejercicios del apartado anterior, todos ellos han perdido interés con la experiencia obtenida en el uso de los

ordenadores y con el conocimiento adquirido sobre la convergencia de un método.

Los métodos de Adams son pues los más populares dentro de los métodos multipaso. Tienen la forma

$$z_{n+k} - z_{n+k-1} = h \cdot [\beta_0 \cdot f_n + \dots + \beta_k \cdot f_{n+k}].$$

Las formulas de Adams son entonces fórmulas multipaso en las que los coeficientes α_{n+j} son todos cero salvo α_{n+k} y α_{n+k-1} , que valen 1 y -1 respectivamente. Los coeficientes β_{n+j} deben además tomar unos valores específicos que permitan obtener buenas aproximaciones a la hora de aplicar las fórmulas.

Si el coeficiente β_k es igual a cero se tienen los *métodos de Adams explícitos*, que se conocen como *métodos de Adams-Bashforth*.

Si β_k es distinto de cero, los métodos son *implícitos* y se conocen como *métodos de Adams-Moulton*.

Los métodos de Adams suelen aparecer representados de la forma:

$$z_{n+1} - z_n = h \cdot [\beta_0 \cdot f_{n-k+1} + \dots + \beta_k \cdot f_{n+1}].$$

Se construyen partiendo de la idea de aproximar la ecuación diferencial mediante la fórmula que se obtiene integrando la ecuación diferencial: $y' = f(x, y)$ en el intervalo $[x_n, x_{n+1}]$:

$$\int_{x_n}^{x_n+h} y' \cdot dx = \int_{x_n}^{x_n+h} f(x, y(x)) \cdot dx \Rightarrow$$

$$y(x_n + h) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_n+h} f(x, y(x)) \cdot dx$$

El valor $y(x_n + h)$ de la solución $y(x)$ en el punto $x_n + h$ se puede expresar entonces como:

$$y(x_n + h) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_n+h} f(x, y(x)) \cdot dx$$

La dificultad en la fórmula anterior estriba en el hecho de que no es posible integrar $f(x, y(x))$ sin conocer la solución $y(x)$. Sin embargo, al conocer los k puntos $(x_n, z_n), \dots, (x_{n-k+1}, z_{n-k+1})$, se puede sustituir la función $f(x, y)$ por el único polinomio $P_k(x)$ de grado $k - 1$ que verifica que:

$$P_k(x_i) = f(x_i, z_i), \text{ con } i = n - k + 1, \dots, n,$$

y a continuación integrar el polinomio en vez de la función:

$$z_{n+1} = z_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_k(x) \cdot dx$$

Los métodos de *Adams-Moulton* resultan más precisos pero tienen la dificultad de ser implícitos, por lo que conllevan el tener que resolver una ecuación.

En las secciones siguientes se construyen de manera detallada los diferentes métodos de Adams utilizando polinomios interpoladores por el método de *Lagrange*, o mejor, por el método de *Newton*, pero antes se verán algunas de las expresiones de estos métodos que permitan familiarizarse con ellos.

Por ejemplo, la expresión que se obtiene de un método multipaso de

Adams-Bashforth de cuatro pasos con un error de truncamiento de orden $O(h^5)$ y que, si no se advierte el orden, es el que se suele denominar simplemente como método de *Adams-Bashforth* es:

$$z_{n+4} = z_{n+3} + \frac{h}{24}(55f_{n+3} - 59f_{n+2} + 37f_{n+1} - 9f_n)$$

donde f_k representa el valor $f(x_k, z_k)$. Se observa que para poder comenzar a aplicar este método se deben conocer cuatro **valores iniciadores** z_0, z_1, z_2 y z_3 , con los que se puede calcular z_4 ; a partir de ese punto, para calcular el siguiente valor se utilizan valores de z ya calculados más uno nuevo en cada paso.

El método de *Adams-Moulton* más usado es el de tres pasos, que tiene la fórmula:

$$z_{n+3} = z_{n+2} + \frac{h}{24}(9f_{n+3} + 19f_{n+2} - 5f_{n+1} + f_n)$$

con un error de truncamiento de orden $O(h^5)$. Se observa que para calcular f_{n+3} se debe conocer ya z_{n+3} , por lo que se tiene una ecuación implícita que se debe resolver. Es pues una fórmula cerrada.

14.2.1. Métodos de Adams-Bashforth

Las fórmulas de Adams-Bashforth de k pasos se obtienen al sustituir la función $f(x, y(x))$ que aparece en la expresión

$$y(x_n + h) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_n+h} f(x, y(x)) \cdot dx$$

por el polinomio interpolador de la función en los puntos $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k+1}$, en los que se supone que ya es conocido el valor de la solución en $z_n, z_{n-1}, \dots, z_{n-k+1}$. Se sustituye entonces en la fórmula anterior la función $f(x, y(x))$ por el único polinomio $P_{k-1}(x)$ que verifica que:

$$P_{k-1}(x_i) = f(x_i, z_i), \text{ para } n - k + 1 \leq i \leq n$$

y se integra el polinomio en vez de la función. Se tiene entonces:

$$z_{n+1} = z_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_{k-1}(x) \cdot dx.$$

Se busca el polinomio interpolador que pasa por un único punto $(x_n, f(x_n, z_n))$, siendo $f(x_n, z_n) = f_n$. Dicho polinomio es de grado cero, es decir, es una constante que coincide con el valor de f_n : $P_0(x) = f_n \Rightarrow$

$$z_{n+1} = z_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_0(x) \cdot dx = z_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f_n \cdot dx = z_n + f_n \int_{x_n}^{x_{n+1}} dx =$$

$$z_n + f_n \cdot (x_{n+1} - x_n) = z_n + f_n \cdot h \Rightarrow z_{n+1} = z_n + f_n \cdot h,$$

Se obtiene el método de Euler. Por tanto el método de Euler coincide con el método de Adams-Bashforth de un paso.

Para obtener el método de Adams-Bashforth de dos pasos se busca el polinomio interpolador que pase por los puntos:

$$(x_n, f(x_n, z_n)) = (x_n, f_n) \text{ y } (x_{n-1}, f(x_{n-1}, z_{n-1})) = (x_{n-1}, f_{n-1}).$$

Es una recta, un polinomio de grado uno, $P_1(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_n)$. Para

$x = x_n$ se obtiene $P_1(x_n) = f_n = a_0 = P_0(x)$. Para $x = x_{n-1}$ se obtiene $P_1(x_{n-1}) =$

$$f_{n-1} = a_0 + a_1 \cdot (x_{n-1} - x_n) \Rightarrow a_1 = \frac{f_n - f_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}. \text{ Se denota a } f_n - f_{n-1} = \nabla f_n, \text{ que se}$$

denomina **diferencia regresiva** de f_n . Al ser $x_n - x_{n-1} = h$, se tiene

$$P_1(x) = P_0(x) + \frac{\nabla f_n}{h} \cdot (x - x_n).$$

Sustituyendo en la fórmula:

$$z_{n+1} = z_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_1(x) \cdot dx = z_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} (P_0(x) + \frac{\nabla f_n}{h} (x - x_n)) \cdot dx =$$

$$z_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_0(x) \cdot dx + \frac{\nabla f_n}{h} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_n) \cdot dx = z_n + f_n \cdot h + \frac{\nabla f_n}{h} \cdot \frac{h^2}{2} =$$

$$z_n + f_n \cdot h + \frac{h}{2} \cdot \nabla f_n,$$

por lo que se obtiene:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot (f_n + \frac{1}{2} \cdot \nabla f_n) \Rightarrow$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2} \cdot (3f_n - f_{n-1}),$$

que es el método de Adams-Bashforth de 2 pasos.

También se puede escribir según la expresión general de los métodos de k pasos:

$$z_{n+2} = z_{n+1} + \frac{h}{2} \cdot (3f_{n+1} - f_n).$$

En general, usando la definición de los polinomios interpoladores de Newton, se tiene que el polinomio que pasa por los k puntos:

$$(x_n, f_n), (x_{n-1}, f_{n-1}), \dots, (x_{n-k+1}, f_{n-k+1}),$$

es $P_{k-1}(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_n) + a_2 \cdot (x - x_n) \cdot (x - x_{n-1}) + \dots + a_k \cdot (x - x_n) \dots (x - x_{n-k+1})$ siendo $a_n = \frac{1}{n! h^n} \nabla^n f_n$, donde:

$$\nabla^0 f_n = f_n;$$

$$\nabla^1 f_n = \nabla f_n = f_n - f_{n-1};$$

$$\nabla^2 f_n = \nabla(\nabla f_n) = \nabla(f_n - f_{n-1}) = \nabla f_n - \nabla f_{n-1} = f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2};$$

y en general, se puede demostrar por inducción, que la expresión del **operador de diferencias regresivas** es:

$$\nabla^p f_n = \binom{p}{0} \cdot f_n - \binom{p}{1} \cdot f_{n-1} + \dots + (-1)^p \cdot \binom{p}{p} \cdot f_{n-p}. \quad (14.2.1)$$

Al calcular $z_{n+1} = z_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_{k-1}(x) \cdot dx$, los coeficientes coinciden con los de los métodos anteriores y sólo es preciso obtener un único coeficiente, el último, pues:

$$P_{k-1}(x) = P_{k-2}(x) + a_k \cdot (x - x_n) \dots (x - x_{n-k+1}) \Rightarrow$$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} P_{k-1}(x) \cdot dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_{k-2}(x) \cdot dx + \frac{1}{k! h^k} \nabla^k f_n \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_n) \dots (x - x_{n-k+1}) \cdot dx$$

Se denomina:

$$\gamma_i = \frac{1}{i!h^{i+1}} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x-x_n)\dots(x-x_{n-i+1}) \cdot dx$$

se tiene que:

$$z_{n+1} = z_n + h[\gamma_0 \cdot \nabla^0 + \gamma_1 \cdot \nabla^1 + \dots + \gamma_{k-1} \cdot \nabla^{k-1}]f_n.$$

Definición 14.2.1:

La expresión general de un **método de Adams-Bashforth de k pasos** es:

$$z_{n+1} = z_n + h[\gamma_0 \cdot \nabla^0 + \gamma_1 \cdot \nabla^1 + \dots + \gamma_{k-1} \cdot \nabla^{k-1}]f_n$$

donde:

$$\gamma_i = \frac{1}{i!h^{i+1}} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x-x_n)\dots(x-x_{n-i+1}) \cdot dx.$$

Se ha utilizado esta expresión para obtener que: $\gamma_0 = 1$; $\gamma_1 = \frac{1}{2}$. De la

misma forma pueden obtenerse los siguientes coeficientes: $\gamma_2 = \frac{5}{12}$; $\gamma_3 = \frac{3}{8}$;

$\gamma_4 = \frac{251}{720}$; $\gamma_5 = \frac{95}{288}$; $\gamma_6 = \frac{19087}{60480}$ Los métodos de *Adams-Bashforth* se

pueden expresar como:

$$z_{n+1} = z_n + h[\nabla^0 + \frac{1}{2} \nabla^1 + \frac{5}{12} \nabla^2 + \frac{3}{8} \nabla^3 + \dots]f_n$$

El cálculo de las integrales correspondientes resulta cada vez más engorroso por lo que conviene encontrar otros caminos. Se puede demostrar por inducción que:

$$\gamma_i + \frac{\gamma_{i-1}}{2} + \dots + \frac{\gamma_0}{i+1} = 1.$$

Al sustituir las diferencias regresivas mediante la expresión 14.2.1 y aumentar el valor de n para tener escritos los métodos en su expresión general se obtienen otras expresiones de los métodos de *Adams-Bashforth* de 2, 3, 4 y 5 pasos:

$$z_{n+2} = z_{n+1} + \frac{h}{2}(3f_{n+1} - f_n)$$

$$z_{n+3} = z_{n+2} + \frac{h}{12}(23f_{n+2} - 16f_{n+1} + 5f_n)$$

$$z_{n+4} = z_{n+3} + \frac{h}{24}(55f_{n+3} - 59f_{n+2} + 37f_{n+1} - 9f_n)$$

$$z_{n+5} = z_{n+4} + \frac{h}{720}(1901f_{n+4} - 2774f_{n+3} - 2616f_{n+2} - 1274f_{n+1} + 251f_n)$$

14.2.2. Métodos de Adams-Moulton

La diferencia esencial entre los métodos de Adams-Bashforth y los métodos de Adams-Moulton es que mientras los primeros son explícitos, los segundos son implícitos. La construcción de estos últimos es similar a la de los métodos de Adams-Bashforth, pero en este caso se sustituye la función por el polinomio interpolador que pasa por los puntos:

$$(x_{n+1}, f_{n+1}), (x_n, f_n), (x_{n-1}, f_{n-1}), \dots, (x_{n-k+1}, f_{n-k+1}).$$

Si se busca el polinomio interpolador que pasa por un único punto (x_{n+1}, f_{n+1}) , dicho polinomio es de grado cero, por lo que el polinomio es una

constante: $P_0(x) = f_{n+1}$.

$$z_{n+1} = z_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_0(x) \cdot dx = z_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f_{n+1} \cdot dx = z_n + f_{n+1} \cdot h$$

que es el método de Euler regresivo o implícito.

Para obtener el siguiente método de Adams-Moulton se busca el polinomio interpolador que pase por los puntos (x_{n+1}, f_{n+1}) y (x_n, f_n) . Es un polinomio de grado uno, $P_1(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_{n+1})$.

Para $x = x_{n+1}$ se obtiene $P_1(x_{n+1}) = f_{n+1} = a_0 = P_0(x)$.

Para $x = x_n$ se obtiene $P_1(x_n) = f_n = a_0 + a_1 \cdot (x_n - x_{n+1}) \Rightarrow a_1 = \frac{f_{n+1} - f_n}{x_{n+1} - x_n}$. Al ser $x_{n+1} - x_n = h$ y al denotar a $f_{n+1} - f_n$ como ∇f_{n+1} mediante la

diferencia regresiva de f_{n+1} se obtiene $P_1(x) = P_0(x) + \frac{\nabla f_{n+1}}{h} \cdot (x - x_{n+1})$.

Sustituyendo en la fórmula:

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= z_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_1(x) \cdot dx = \\ z_n &+ \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_0(x) \cdot dx + \frac{\nabla f_{n+1}}{h} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_{n+1}) \cdot dx = \\ z_n &+ f_{n+1} \cdot h + \frac{\nabla f_{n+1}}{h} \left(\frac{-h^2}{2} \right), \end{aligned}$$

por lo que se obtiene:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot (f_{n+1} - \frac{1}{2} \nabla f_{n+1}) = z_n + h \cdot (\nabla^0 - \frac{1}{2} \nabla^1) f_{n+1} = z_n + \frac{h}{2} \cdot (f_{n+1} + f_n).$$

que es un método implícito de un paso, la regla del trapecio.

Para $k = 2$ se busca el polinomio interpolador que pase por los puntos (x_{n+1}, f_{n+1}) , (x_n, f_n) y (x_{n-1}, f_{n-1}) . Es un polinomio de segundo grado, $P_2(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_{n+1}) + a_2 \cdot (x - x_{n+1}) \cdot (x - x_n)$.

Para $x = x_{n+1}$ se obtiene $P_2(x_{n+1}) = f_{n+1} = a_0 = P_0(x)$.

Para $x = x_n$ se obtiene $P_2(x_n) = f_n = a_0 + a_1 \cdot (x_n - x_{n+1}) \Rightarrow a_1 = \frac{f_{n+1} - f_n}{x_{n+1} - x_n} = \frac{\nabla f_{n+1}}{h}$.

Para $x = x_{n-1}$ se obtiene $P_2(x_{n-1}) = f_{n-1} = a_0 + a_1 \cdot (x_{n-1} - x_{n+1}) + a_2 \cdot (x_{n-1} - x_{n+1}) \cdot (x_{n-1} - x_n) \Rightarrow a_2 = (f_{n-1} - a_0 - a_1 \cdot (x_{n-1} - x_{n+1})) / ((x_{n-1} - x_{n+1}) \cdot (x_{n-1} - x_n)) = \frac{\nabla^2 f_{n+1}}{2h^2}$.

Se verifica que $P_2(x) = P_1(x) + \frac{\nabla^2 f_{n+1}}{2h^2} \cdot (x - x_{n+1}) \cdot (x - x_n)$, por lo que integrando:

$$z_{n+1} = z_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_2(x) \cdot dx = z_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_1(x) \cdot dx + \frac{\nabla^2 f_{n+1}}{2h^2} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_{n+1}) \cdot (x - x_n) \cdot dx =$$

$$z_n + f_{n+1} \cdot h - \frac{h}{2} \cdot \nabla f_{n+1} + \frac{\nabla^2 f_{n+1}}{2h^2} \cdot h^3 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \Rightarrow$$

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot \left(\nabla^0 - \frac{1}{2} \cdot \nabla^1 - \frac{1}{12} \cdot \nabla^2\right) f_{n+1} = z_n + \frac{h}{12} \cdot (5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1}).$$

que es el método de Adams-Moulton de 2 pasos.

Definición 14.2.2:

La expresión general de un **método de Adams-Moulton de k pasos** es:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot [\gamma^*_0 \cdot \nabla^0 + \gamma^*_1 \cdot \nabla^1 + \dots + \gamma^*_k \cdot \nabla^k] f_{n+1}$$

siendo:

$$\gamma^*_0 = 1 \text{ y } \gamma^*_i = \frac{1}{i! h^{i+1}} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_{n+1}) \dots (x - x_{n-i+2}) \cdot dx$$

Se ha obtenido ya que: $\gamma^*_0 = 1$ y $\gamma^*_1 = -\frac{1}{2}$; $\gamma^*_2 = -\frac{1}{12}$. Al utilizar la

fórmula anterior se obtiene que $\gamma^*_3 = -\frac{1}{24}$, $\gamma^*_4 = -\frac{19}{720}$, $\gamma^*_5 = -\frac{3}{160}$, $\gamma^*_6 = -$

$\frac{863}{60480}$... por lo que:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot [\nabla^0 - \frac{1}{2} \nabla^1 - \frac{1}{12} \nabla^2 - \frac{1}{24} \nabla^3 \dots] f_{n+1}$$

Al sustituir las diferencias regresivas mediante la *expresión 14.2.1* y aumentar el valor de n para tener escritos los métodos en su expresión general se obtienen otras expresiones de los métodos de Adams-Moulton de 1, 2, 3 y 4 pasos:

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n) \quad \text{Regla del trapecio}$$

$$z_{n+2} = z_{n+1} + \frac{h}{12}(5f_{n+2} + 8f_{n+1} - f_n)$$

$$z_{n+3} = z_{n+2} + \frac{h}{24}(9f_{n+3} + 19f_{n+2} - 5f_{n+1} + f_n)$$

$$z_{n+4} = z_{n+3} + \frac{h}{720}(251f_{n+4} + 646f_{n+3} - 264f_{n+2} + 106f_{n+1} - 19f_n)$$

Se puede demostrar por inducción que los coeficientes γ_i^* de las fórmulas de Adams-Moulton verifican la relación:

$$\gamma_i^* + \frac{\gamma_{i-1}^*}{2} + \dots + \frac{\gamma_0^*}{i+1} = 0 \quad \text{con } \gamma_0^* = 1.$$

Los coeficientes γ_i^* y γ_i de las fórmulas de Adams implícitas y explícitas están además relacionados entre sí. Se puede comprobar fácilmente que:

$$\gamma_0^* = \gamma_0 \quad \text{y que } \gamma_i^* = \gamma_i - \gamma_{i-1}.$$

Esta relación entre los coeficientes de las dos familias de métodos permite expresar de otra manera las fórmulas de Adams-Moulton, con lo que se tiene otra expresión general de los **métodos de Adams-Moulton de k pasos**:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot [\gamma_0 \cdot \nabla^0 + \gamma_1 \cdot \nabla^1 + \dots + \gamma_{k-1} \cdot \nabla^{k-1}] f_n + \gamma_k \cdot h \cdot \nabla^k f_{n+1}.$$

Esta manera de representar las fórmulas de Adams implícitas tiene interés en la práctica porque permite relacionarlas con las correspondientes fórmulas explícitas. Así, si $z_{n+1}^{[0]}$ representa el valor obtenido al aplicar al problema $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, en la etapa n la fórmula de Adams-Bashforth de k pasos, la fórmula anterior permite asegurar que el valor z_{n+1} que se

obtiene con la fórmula de Adams-Moulton correspondiente de k pasos es

$$z_{n+1} = z_{n+1}^{[0]} + \gamma_k \cdot h \cdot \nabla^k f_{n+1}.$$

La expresión anterior permite hacer uso de las fórmulas de Adams implícita y explícita de forma simultánea, sin apenas coste adicional, siguiendo los pasos correspondientes. Son los métodos de predicción-corrección que evitan tener que despejar z_{n+1} en f_{n+1} , de manera que permiten “predecir” su valor mediante Adams-Bashforth y “corregirlo” mediante Adams-Moulton. Así, en la etapa n se tienen los siguientes pasos:

- Se calcula el valor de $z_{n+1}^{[0]}$ con la fórmula de Adams-Bashforth de k pasos.
- Se evalúa la función $f(x, y)$ en el punto $(x_{n+1}, z_{n+1}^{[0]})$, es decir, se calcula $f_{n+1}^{[0]} = f(x_{n+1}, z_{n+1}^{[0]})$.
- Se calcula el valor de $z_{n+1}^{[1]}$ con la fórmula de Adams-Moulton de k pasos.
- Se evalúa de nuevo la función $f(x, y)$ en el punto $(x_{n+1}, z_{n+1}^{[1]})$, es decir, se calcula $f_{n+1}^{[1]}$.
- Se calcula, a partir de $z_{n+1}^{[1]}$, el valor de $z_{n+2}^{[0]}$ con la fórmula de Adams-Bashforth de k pasos y se repite el proceso.

Es interesante comparar los resultados obtenidos utilizando un método explícito de *Adams-Bashforth* de k pasos con los obtenidos usando un método implícito de *Adams-Moulton* de $k - 1$ pasos, pues ambos requieren k evaluaciones de la función f por paso y, como se verá más adelante, su error

de truncamiento es del orden de $O(h^k)$. Se puede apreciar que en general los métodos de *Adams-Moulton* dan mejores resultados, tienen un error global menor y son más estables, pero tienen el inconveniente de tener que resolver una ecuación implícita, como se aprecia en el siguiente ejemplo:

Resultados de aplicar el **método de Adams-Bashforth** de cuatro pasos y el **método de Adams-Moulton** de tres pasos con tamaño de paso $h = 0,1$ y iniciadores los valores exactos a: $y' = 1 - y + x$, $y(0) = 1$, para aproximar la solución en $x = 1$.

Exacto	<i>Adams-Bashforth</i>	Error	<i>Adams-Moulton</i>	Error
1,36787944	1,36788995	$1,052 \times 10^{-5}$	1,36787859	$8,418 \times 10^{-7}$

En general, la eficiencia de los distintos métodos está muchas veces relacionada con el tipo de problema al que se van a aplicar, por lo que es conveniente reflexionar sobre las **ventajas** e **inconvenientes** de cada método. Para arrancar un método de k pasos se necesitan k puntos iniciales de la solución que se deben obtener mediante un método de un paso. Esta es una de las desventajas de los métodos lineales multipaso. Estos valores iniciadores z_j , $j = 0, \dots, k - 1$, si se supone que son aproximaciones de $y(x_j)$, es natural que converjan a y_0 cuando h tiende a cero. Por tanto es importante asegurar que el método de un paso con el que se generan los valores

iniciadores sea también consistente del mismo orden.

Otra desventaja es que aunque el error de truncamiento, tanto en el método de *Adams-Bashforth* de cuatro pasos como en el método de *Adams-Moulton* de tres pasos, es de igual orden al de *Runge-Kutta* 4, éste es más preciso.

Una ventaja de los métodos de *Adams* respecto de los métodos de *Runge-Kutta* 4, es el número de veces que se debe evaluar a la función. Un método de *Runge-Kutta* de orden cuatro necesita en n pasos $4n$ evaluaciones, mientras que uno de *Adams-Bashforth* de cuatro pasos necesita $n - 4$ más los iniciadores. Luego si la función es complicada, el método de *Adams* es más eficiente.

Los métodos de *Runge-Kutta* tienen la ventaja de ser autoiniciadores, estables, dar una buena precisión y ser fáciles de computar, y el inconveniente, además del ya comentado, de no proporcionar una estimación de la precisión para saber si el tamaño de paso es adecuado.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 14.2.1: Comprobar los valores que se obtienen de los coeficientes en los métodos de Adams utilizando las expresiones:

$$\text{a) } \gamma_i + \frac{\gamma_{i-1}}{2} + \dots + \frac{\gamma_0}{i+1} = 1.$$

$$b) \gamma^*_i + \frac{\gamma^*_{i-1}}{2} + \dots + \frac{\gamma^*_0}{i+1} = 0.$$

$$c) \gamma^*_i = \gamma_i - \gamma_{i-1}.$$

$$a) \text{ Para } i = 0 \Rightarrow \frac{\gamma_0}{0+1} = 1 \Rightarrow \gamma_0 = 1.$$

$$\text{Para } i = 1 \Rightarrow \gamma_1 + \frac{\gamma_0}{1+1} = 1 \Rightarrow \gamma_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Para } i = 2 \Rightarrow \gamma_2 + \frac{\gamma_1}{2} + \frac{\gamma_0}{2+1} = 1 \Rightarrow \gamma_2 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}.$$

$$b) \gamma^*_i + \frac{\gamma^*_{i-1}}{2} + \dots + \frac{\gamma^*_0}{i+1} = 0 \text{ con } \gamma^*_0 = 1, \text{ para } i = 1 \Rightarrow \gamma^*_1 + \frac{\gamma^*_0}{1+1} = 0 \Rightarrow$$

$$\gamma^*_1 = -\frac{1}{2}, \text{ para } i = 2 \Rightarrow \gamma^*_2 + \frac{\gamma^*_1}{2} + \frac{\gamma^*_0}{2+1} = 0 \Rightarrow \gamma^*_2 = +\frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}.$$

$$c) \gamma^*_i = \gamma_i - \gamma_{i-1}; \gamma^*_1 = \gamma_1 - \gamma_0 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}. \gamma^*_2 = \gamma_2 - \gamma_1 = \frac{5}{12} - \frac{1}{2} = -$$

$$\frac{1}{12}.$$

Ejemplo 14.2.2: Aplicar los métodos de Adams-Bashforth de dos y tres pasos al problema de valor inicial $y' = y$, $y(0) = 1$, con $h = 0,1$ para aproximar $y(0,5)$, utilizando como $z_0 = 1$, y a) los valores iniciadores obtenidos mediante el método de Euler; b) los valores iniciadores obtenidos mediante el método de Runge-Kutta.

$$x_n = 0,5 = x_0 + n \cdot h = n \cdot h = 0,1 \cdot n \Rightarrow n = 5.$$

Los métodos de Adams-Bashforth de dos y tres pasos son:

$$z_{n+2} = z_{n+1} + \frac{h}{2}(3f_{n+1} - f_n)$$

$$z_{n+3} = z_{n+2} + \frac{h}{12}(23f_{n+2} - 16f_{n+1} + 5f_n)$$

y al aplicarlos con $f(x, y) = y$ se obtiene:

$$z_{n+2} = z_{n+1} + \frac{h}{2}(3z_{n+1} - z_n)$$

$$z_{n+3} = z_{n+2} + \frac{h}{12}(23z_{n+2} - 16z_{n+1} + 5z_n)$$

Para calcular z_2 con la fórmula de Adams-Bashforth de dos pasos se precisa conocer $z_0 = 1$ y z_1 que se calcula mediante el método de Euler:

$$z_1 = z_0 + h \cdot z_0 = 1,1.$$

$$\text{Se calcula } z_2 = z_1 + \frac{h}{2}(3z_1 - z_0) = 1,1 + 0,1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \cdot 1,1 - \frac{3}{2} = 1,215.$$

$$z_3 = z_2 + \frac{h}{2}(3z_2 - z_1) = 1,34225; \quad z_4 = 1,4828375, \quad z_5 = z(0,5) = 1,638150625.$$

Si se toma como método de arranque la fórmula de Runge-Kutta 4 se obtiene que $z_0 = 1$, $z_1 = 1,105170833$. Se calcula $z_2 = z_1 + \frac{h}{2}(3z_1 - z_0) = 1,220946458$; $z_3 = 1,348829885$, $z_4 = 1,490107045$ y $z_5 = z(0,5) = 1,646181607$.

Para calcular z_3 con la fórmula de Adams-Bashforth de tres pasos se precisa conocer previamente z_0 , z_1 y z_2 . Si se obtienen con el método de Euler se tiene: $z_0 = 1$, $z_1 = 1,1$ y $z_2 = 1,21$. Se calcula

$$z_3 = z_2 + \frac{h}{12}(23z_2 - 16z_1 + 5z_0) = 1,336916667, \text{ y del mismo modo } z_4 =$$

1,477659028 y $z_5 = z(0,5) = 1,633038119$. Y si se utiliza como método de arranque Runge-Kutta 4 se tiene: $z_0 = 1$, $z_1 = 1,105170833$ y $z_2 = 1,22140257$. Se calcula $z_3 = z_2 + \frac{h}{12}(23z_2 - 16z_1 + 5z_0) = 1,349815285$, y del mismo modo $z_4 = 1,49172499$ y $z_5 = z(0,5) = 1,648555349$.

Puesto que el valor exacto es $y(0,5) = e^{0,5} \cong 1,648721271$ se observa que el mejor resultado se obtiene usando la fórmula de Adams-Bashforth de tres pasos arrancando con Runge-Kutta 4; la segunda mejor aproximación se obtiene usando la fórmula de Adams-Bashforth de dos pasos arrancando con Runge-Kutta 4. Sin embargo se obtiene peor resultado con la fórmula de Adams-Bashforth de tres pasos arrancando con el método de Euler que con la fórmula de Adams-Bashforth de dos pasos arrancando con el método de Euler. La razón es que la mejor calidad de la fórmula de Adams-Bashforth de tres pasos queda arruinada al utilizar un mal método de arranque (Euler). Se estudiará, como en los métodos de un paso, el concepto de orden de consistencia y de orden de convergencia y se comprobará que se debe usar un método de arranque cuyo orden de consistencia sea al menos igual al del método multipaso usado.

Ejemplo 14.2.3: Aplicar los métodos de Adams-Moulton de tres y dos pasos al problema de valor inicial $y' = y$, $y(0) = 1$, con $h = 0,1$ para aproximar $y(0,5)$, utilizando como $z_0 = 1$, y a) los valores iniciadores obtenidos mediante el método de Euler; b) los valores iniciadores obtenidos mediante el método de Runge-Kutta 4.

$$x_n = 0,5 = x_0 + n \cdot h = n \cdot h = 0,1 \cdot n \Rightarrow n = 5.$$

El método de Adams-Moulton de tres pasos es:

$$z_{n+3} = z_{n+2} + \frac{h}{24}(9f_{n+3} + 19f_{n+2} - 5f_{n+1} + f_n)$$

y al aplicarlo con $f(x, y) = y$ se obtiene:

$$z_{n+3} = z_{n+2} + \frac{h}{24}(9z_{n+3} + 19z_{n+2} - 5z_{n+1} + z_n)$$

Para calcular z_3 se precisa conocer $z_0 = 1$, $z_1 = 1,1$ y $z_2 = 1,21$ para lo que se utiliza el método de Euler. Se obtiene que $z_3 = 1,337186147$, $z_4 = 1,477840745$, $z_5 = z(0,5) = 1,633267629$.

Si se toma como método de arranque Runge-Kutta 4 se obtiene que $z_0 = 1$, $z_1 = 1,105170833$ y $z_2 = 1,22140257$ y utilizando el método: $z_3 = 1,349858924$, $z_4 = 1,491825192$ y $z_5 = z(0,5) = 1,648722219$.

Los métodos de Adams-Moulton exigen, al ser implícitos, resolver en cada paso una ecuación, que en este ejemplo es sencilla, pero puede complicarse en otros.

El método de Adams-Moulton de dos pasos es:

$$z_{n+2} = z_{n+1} + \frac{h}{12}(5f_{n+2} + 8f_{n+1} - f_n),$$

y al aplicarlo con $f(x, y) = y$ se obtiene:

$$z_{n+2} = z_{n+1} + \frac{h}{12}(5z_{n+2} + 8z_{n+1} - z_n).$$

Para calcular z_2 se precisa conocer $z_0 = 1$ y z_1 , para lo que se utiliza el método de Euler: $z_1 = 1,1$. Se obtiene que:

$$z_2 = z_1 + \frac{h}{12}(5z_2 + 8z_1 - z_0) = 1,1 + \frac{0,1}{12}(5z_2 + 8(1,1) - 1), \text{ de donde se}$$

despeja z_2 . Se obtiene de igual modo que:

$$z_3 = 1,343508507, z_4 = 1,484812493, z_5 = z(0,5) = 1,640978179.$$

Si se toma como método de arranque Runge-Kutta 4 se obtiene que $z_5 = z(0,5) = 1,648747592$.

Puesto que el valor exacto es $y(0,5) = e^{0,5} \cong 1,648721271$ se observa que el mejor resultado se obtiene usando la fórmula de Adams-Moulton de tres pasos arrancando con la fórmula de Runge-Kutta 4 ($z_5 = 1,648722219$), luego usando la fórmula de Adams-Moulton de dos pasos arrancando con la fórmula de Runge-Kutta 4 ($z_5 = 1,648747592$) y que se arruina el método de Adams-Moulton de tres pasos al utilizar el método de Euler (Adams-Moulton de dos pasos: $z_5 = 1,640978179$; Adams-Moulton de tres pasos: $z_5 = 1,633267629$).

Si se comparan entre sí los métodos de Adams-Bashforth y de Adams-Moulton del ejemplo anterior, usando como método de arranque el de Runge-Kutta 4, se obtiene:

- Adams-Moulton de tres pasos: $z_5 = 1,648722219$;
- Adams-Moulton de dos pasos: $z_5 = 1,648747592$;
- Adams-Bashforth de tres pasos: $z_5 = 1,648555349$;

- Adams-Bashforth de dos pasos: $z_5 = 1,646181607$;
- Valor exacto: $y(0,5) = e^{0,5} \cong 1,648721271$.

Se observa en este ejemplo la mayor precisión de los métodos de Adams-Moulton.

Ejemplo 14.2.4: Utilizar el método de Adams-Bashforth de dos pasos, un tamaño de paso $h = 0,2$ y como valor iniciador el proporcionado por Runge-Kutta 4, para aproximar $y(0,8)$ de la solución de $y' = x + y - 1$, $y(0) = 1$. Utilizar la fórmula dada mediante las tablas de diferencias regresivas:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot \left(\nabla^0 + \frac{1}{2} \cdot \nabla^1 \right) f_n.$$

La forma usual de organizar estos cálculos es utilizando una hoja de cálculo, con lo que es posible simplificar el proceso

En la primera columna se escribe n , que varía desde 0 hasta el último valor que se quiera calcular, en este caso, $n = 4$.

En la segunda columna se calcula $x_n = x_0 + n \cdot h = 0 + 0,2 \cdot n = 0,2 \cdot n$.

Se calcula el valor iniciador usando el método de Runge-Kutta:

$$x_0 = 0; z_0 = y_0 = 1; f(x, z) = x + z - 1 \Rightarrow f(x_0, z_0) = f(0, 1) = 0,$$

$$z_1 = z_0 + \frac{h}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \text{ siendo } k_1 = f(x_0, z_0) = 0; k_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, z_0 + \frac{h}{2} \cdot k_1\right) = 0,1; k_3 = 0,11; k_4 = 0,222 \Rightarrow z_1 = 1,0214.$$

Se llevan las siguientes expresiones a la hoja de cálculo:

$$\nabla^0 f_n = f(x_n, z_n) = x_n + z_n - 1.$$

$$\nabla^1 f_n = \nabla^0 f_n - \nabla^0 f_{n-1}.$$

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot \left(\nabla^0 + \frac{1}{2} \nabla^1 \right) f_n.$$

y se obtiene:

n	x_n	z_n	$\nabla^0 f_n = f(x_n, z_n) = x_n + z_n - 1$	$\nabla^1 f_n = \nabla^0 f_n - \nabla^0 f_{n-1}$
0	0	1	0	
1	0,2	1,0214	0,2214	0,2214
2	0,4	1,08782	0,48782	0,26642
3	0,6	1,212026	0,812026	0,324206
4	0,8	1,4068518	1,2068518	0,3948258

Por lo que $z(0,8) = z_4 = \mathbf{1,4068518}$.

Ejercicios

14.3. En la tabla adjunta: a) Completar los valores que faltan:

X	3	4	5	6	7	8	9	10	11
f(x)	15	24	35		63	80	99		143

b) Calcular las diferencias regresivas y utilizarlas para obtener el polinomio interpolador de Newton de segundo grado que pasa por los puntos: (3, 15), (4, 24) y (5, 35).

(Solución: a) 48 y 120; b) $P_2(x) = 15 + 9 \cdot (x - 3) + (x - 3) \cdot (x - 4)$)

14.4. Escribir las expresiones de los métodos de Adams-Bashforth

de 2, 3, 4 y 5 pasos utilizando diferencias regresivas. Utilizar la expresión 14.2.1 para obtener:

$$z_{n+2} = z_{n+1} + \frac{h}{2}(3f_{n+1} - f_n)$$

$$z_{n+3} = z_{n+2} + \frac{h}{12}(23f_{n+2} - 16f_{n+1} + 5f_n)$$

$$z_{n+4} = z_{n+3} + \frac{h}{24}(55f_{n+3} - 59f_{n+2} + 37f_{n+1} - 9f_n)$$

$$z_{n+5} = z_{n+4} + \frac{h}{720}(1901f_{n+4} - 2774f_{n+3} - 2616f_{n+2} - 1274f_{n+1} + 251f_n)$$

14.5. Escribir las expresiones de los métodos de Adams-Moulton de 2, 3 y 4 pasos utilizando los coeficientes γ^*_i y diferencias regresivas. Escribir las expresiones de esos mismos métodos utilizando los coeficientes γ_i . Utilizar la expresión 14.2.1 para obtener:

$$z_{n+2} = z_{n+1} + \frac{h}{12}(5f_{n+2} + 8f_{n+1} - f_n)$$

$$z_{n+3} = z_{n+2} + \frac{h}{24}(9f_{n+3} + 19f_{n+2} - 5f_{n+1} + f_n)$$

$$z_{n+4} = z_{n+3} + \frac{h}{720}(251f_{n+4} + 646f_{n+3} - 264f_{n+2} + 106f_{n+1} - 19f_n)$$

14.6. Calcular los valores de γ_4 , γ_5 , γ_6 , γ^*_3 , γ^*_4 y γ^*_5 utilizando las expresiones:

$$\text{a) } \gamma_i + \frac{\gamma_{i-1}}{2} + \dots + \frac{\gamma_0}{i+1} = 1,$$

$$\text{b) } \gamma^*_i + \frac{\gamma^*_{i-1}}{2} + \dots + \frac{\gamma^*_0}{i+1} = 0,$$

$$c) \gamma^*_i = \gamma_i - \gamma_{i-1}.$$

$$(Solución: \gamma_4 = \frac{251}{720}, \gamma_5 = \frac{95}{288}, \gamma_6 = \frac{19087}{60480}, \gamma^*_3 = \frac{-19}{720}, \gamma^*_4 = \frac{-3}{160}, \gamma^*_5 = \frac{-863}{60480}).$$

14.7. Calcular los valores de γ_2 , γ_3 y γ^*_3 utilizando las expresiones:

$$a) \gamma_i = \frac{1}{i!h^{i+1}} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_n) \dots (x - x_{n-i+1}) \cdot dx.$$

$$b) \gamma^*_i = \frac{1}{i!h^{i+1}} \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_{n+1}) \dots (x - x_{n-i+2}) \cdot dx.$$

14.8. Escribir el polinomio interpolador de Newton de grado cuatro

$$\text{de } f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 5} \text{ para } x \text{ igual a } -2, -1, 0, 1 \text{ y } 2.$$

$$(Sol: P_4(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{10}(x-2)(x-1) - \frac{1}{15}(x-2)(x-1)x - \frac{1}{30}(x-2)(x-1)x(x+1)).$$

14.9. Utilizando la fórmula de Adams-Bashforth de dos pasos con

$$\text{diferencias regresivas: } z_{n+1} = z_n + h \cdot (\nabla^0 + \frac{1}{2} \nabla^1) f_n. \text{ aproximar la}$$

solución en $x = 1,2$ del problema de valor inicial $y' = 1 - y + x$,

$y(1) = 1$, con tamaño de paso $h = 0,1$ utilizando como valores

iniciadores $z_0 = 1$ y z_1 el obtenido mediante:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot (\frac{1}{2} f_n + \frac{1}{2} f(x_n + h, z_n + h \cdot f(x_n, z_n))).$$

$$(Solución: z_1 = 1,11 ; z_2 = 1,2415).$$

14.10. Aplicar los métodos de Adams-Bashforth de tres y cuatro pasos al problema de valor inicial $y' = 1 - y + x$, $y(0) = 1$, para aproximar la solución en $x = 1$ con tamaño de paso $h = 0,1$ utilizando como valores iniciadores $z_0 = 1$, y a) los valores iniciadores obtenidos mediante el método de Euler; b) los valores iniciadores obtenidos mediante el método de Runge-Kutta 4. Calcular el error global cometido.

14.11. Aplicar los métodos de Adams-Moulton de tres y cuatro pasos al problema de valor inicial $y' = 1 - y + x$, $y(0) = 1$, para aproximar la solución en $x = 1$ con tamaño de paso $h = 0,1$ utilizando como valores iniciadores $z_0 = 1$, y a) los valores iniciadores obtenidos mediante el método de Euler; b) los valores iniciadores obtenidos mediante el método de Runge-Kutta 4. Calcular el error global cometido. Discutir el resultado obtenido comparándolo con el del ejercicio anterior.

14.3. CONVERGENCIA, CONSISTENCIA Y ESTABILIDAD DE LOS MÉTODOS LINEALES MULTIPASO

14.3.1. Definición de convergencia

La definición de convergencia coincide con la dada en los métodos de un paso, pero es necesario asegurar que los valores iniciadores están bien elegidos.

Definición 14.3.1:

Un método lineal de k pasos:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot z_{n+j} = h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j \cdot f(x_{n+j}, z_{n+j}), \quad n \geq 0, \quad (14.3.1)$$

es **convergente** en $[a, b]$ si para todo $x \in [a, b]$, para cualquier problema de *Cauchy* bien planteado (con las condiciones de regularidad mencionadas): $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, con una única solución $\varphi: (a, b) \rightarrow \mathfrak{R}$ y para cualesquiera condiciones iniciales $z_0(h), \dots, z_{k-1}(h)$, que satisfagan que tienden a $y(x_0)$ cuando h tiende a cero, se verifica que:

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ x_0 + nh = x}} \|z_n - \varphi(x)\| = 0, \quad (14.3.2)$$

siendo z_n la solución de la ecuación de diferencias 14.3.1.

La expresión 14.3.2 es equivalente a decir que: $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ x_0 + nh = x}} z_n = \varphi(x)$, o a decir

que el error global $e(h) = \varphi(x) - z_n$ tiende a cero cuando h tiende a cero.

Definición 14.3.2:

Se dice que el método es **convergente de orden p** si $\|z_n - y(x)\| = O(h^p)$.

Una cuestión esencial a la hora de seleccionar un método multipaso es la elección adecuada de los coeficientes α_j y β_j , así como los valores iniciadores z_0, \dots, z_{k-1} , de manera que la solución aproximada que se obtenga al aplicarlo a la resolución de un problema de valor inicial converja en el sentido de la definición anterior a la solución del problema buscado.

Es importante, por lo tanto, establecer procedimientos sencillos que permitan garantizar la convergencia de un método.

La definición de convergencia que se acaba de introducir plantea la misma dificultad que tenía en el caso de los métodos de un paso. Sirve para saber si un método no es convergente, pero no se puede utilizar para saber si es convergente ya que sería preciso aplicar el método a **todo** problema de valor inicial bien propuesto. Por ello se requieren nuevos conceptos.

La convergencia de un método lineal multipaso está directamente relacionada con los conceptos de consistencia y estabilidad, como en el caso de los métodos de un paso, pero a diferencia de estos, un método lineal multipaso puede ser consistente pero no estable, y por consiguiente no

convergente. En las siguientes secciones se estudian detenidamente ambos conceptos.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 14.3.1: Estudiar la convergencia del método:

$$z_{n+2} - 2z_{n+1} + z_n = h(2f_{n+1} - 2f_n).$$

El método $z_{n+2} - 2z_{n+1} + z_n = h(2f_{n+1} - 2f_n)$ **no** es convergente pues al aplicarlo a $y' = y$, $y(0) = 1$ se obtiene la ecuación en diferencias lineal y homogénea $z_{n+2} - 2(1+h)z_{n+1} + (1+2h)z_n = 0$ cuya solución general es $z_n = C_1 + C_2(1+2h)^n$. Si se toman como valores iniciadores $z_0 = 1$ y $z_1 = 1 + 2h$, que tienden a $y_0 = 1$ cuando h tiende a cero, entonces $C_1 = 0$ y $C_2 = 1$, por lo que $z_n = (1+2h)^n$. Como $x_n = x = x_0 + n \cdot h = n \cdot h \Rightarrow h = \frac{x}{n} \Rightarrow z_n =$

$$\left(1 + \frac{2x}{n}\right)^n.$$

Al calcular su límite, cuando n tiende a infinito se obtiene e^{2x} , distinto de la solución exacta $\varphi(x) = e^x$.

Ejemplo 14.3.2: Analizar la convergencia del método: $z_{n+2} - z_n = 2hf_{n+1}$.

Si se aplica el método $z_{n+2} - z_n = 2hf_{n+1}$ al mismo problema de valor inicial con $z_0 = 1$ y $z_1 = 2$ se obtienen también valores muy dispares a $\varphi(x) = e^x$. Sin embargo, en este caso, aplicando la definición, no se puede asegurar

nada sobre la convergencia del método puesto que $z_1 = 2$ es muy distinto de $y_0 = 1$ y no tiende a este valor cuando h tiende a cero. Se observa, por tanto, que para poder analizar la convergencia se debe conocer que los valores iniciadores se aproximan al valor inicial y_0 cuando el tamaño del paso tiende a cero.

14.3.2. Orden de consistencia y error de truncamiento

Con el fin de simplificar la notación, se introduce a continuación la siguiente definición, que se utilizará en las restantes secciones del capítulo.

Definición 14.3.3:

Se denomina **operador asociado al método** lineal de k pasos:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot z_{n+j} = h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j \cdot f(x_{n+j}, z_{n+j}), \quad n \geq 0,$$

al operador $L[\psi, x, h] = \sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot \psi(x + jh) - h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j \cdot \psi'(x + jh)$ siendo ψ una

función real suficientemente regular.

Definición 14.3.4:

Se denomina **error de truncamiento** del método lineal de k pasos:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot z_{n+j} = h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j \cdot f(x_{n+j}, z_{n+j}), \quad n \geq 0,$$

al aplicarlo al problema de valor inicial $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, con solución φ :

(a, b) $\rightarrow \mathfrak{R}$ a la expresión:

$$T_{n+k} = L[\varphi, x, h] = \sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot \varphi(x + jh) - h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j \cdot \varphi'(x + jh).$$

Esta definición de error de truncamiento coincide con la del *capítulo 13* para los métodos explícitos de un paso, pues sigue siendo la diferencia entre la solución exacta en un punto y el valor obtenido al aplicar el método suponiendo que los valores anteriores coincidieran con la solución exacta, ya que si $\alpha_k = 1$ entonces:

$$z_{n+k} = - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \varphi(x_{n+j}) + h \sum_{j=0}^k \beta_j f(x_{n+j}, \varphi(x_{n+j})) = - \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \varphi(x_{n+j}) + h \sum_{j=0}^k \beta_j \varphi'(x_{n+j}),$$

por lo que:

$$T_{n+k} = \varphi(x_{n+k}) - z_{n+k} = \varphi(x_{n+k}) + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \varphi(x_{n+j}) - h \sum_{j=0}^k \beta_j \varphi'(x_{n+j}) = L[\varphi, x, h]. \quad \square$$

Definición 14.3.5:

Se denomina **orden de consistencia** del método lineal de k pasos:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot z_{n+j} = h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j \cdot f(x_{n+j}, z_{n+j}), \quad n \geq 0,$$

al mayor número natural p tal que para cualquier función real ψ suficientemente regular se tenga $L[\psi, x, h] = O(h^{p+1})$.

Se observa que si el orden de consistencia de un método es p entonces el error de truncamiento, al aplicarlo a cualquier problema de valor inicial, es

un infinitésimo de orden mayor o igual a $p + 1$, ya que la diferencia estriba en que para el error de truncamiento la función φ debe ser una solución del problema de valor inicial, mientras que en el orden de consistencia ψ es una función cualquiera suficientemente regular.

Definición 14.3.6:

Se dice que un método es **consistente** si su orden de consistencia, p , es mayor o igual que uno.

14.3.3. Constante de error

La linealidad del operador L facilita el cálculo del orden de consistencia de un método pues:

$$L[\psi, x, h] = \sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot \psi(x + jh) - h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j \cdot \psi'(x + jh)$$

y utilizando el desarrollo de Taylor:

$$\psi(x + jh) = \psi(x) + jh\psi'(x) + \dots + \frac{1}{n!} (jh)^n \psi^{(n)}(x) + \dots$$

$$h \cdot \psi'(x + jh) = h \cdot \psi'(x) + h \cdot (jh)\psi''(x) + \dots + \frac{h}{n!} (jh)^n \psi^{(n+1)}(x) + \dots$$

$$\text{Por tanto } L[\psi, x, h] = C_0 \cdot \psi(x) + C_1 \cdot h\psi'(x) + \dots + C_q \cdot h^q \psi^{(q)}(x) + \dots$$

donde:

$$C_0 = \alpha_0 + \dots + \alpha_k;$$

$$C_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + k\alpha_k - (\beta_0 + \dots + \beta_k);$$

...

$$C_q = \frac{1}{q!} \left(\sum_{j=0}^k j^q \cdot \alpha_j \right) - \frac{1}{(q-1)!} \left(\sum_{j=0}^k j^{q-1} \cdot \beta_j \right)$$

El orden de consistencia del método es p si y sólo si:

$$C_0 = C_1 = \dots = C_p = 0 \neq C_{p+1}.$$

En consecuencia, para que un método sea consistente basta que $C_0 = C_1 = 0$, es decir, que se verifiquen las dos primeras condiciones:

$$\begin{cases} C_0 = \alpha_0 + \dots + \alpha_k = 0, \\ C_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + k\alpha_k - (\beta_0 + \dots + \beta_k) = 0. \end{cases}$$

La definición de estos coeficientes sugiere dos procedimientos diferentes para obtener fórmulas de métodos multipaso: la integración numérica de los polinomios de interpolación, que es más popular, y el método de los coeficientes indeterminados, que suministra relaciones entre los coeficientes para obtener un orden de consistencia preestablecido.

Teorema 14.3.1:

Todo método lineal de k pasos convergente es consistente.

Demostración:

Sea el método lineal de k pasos: $\sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot z_{n+j} = h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j \cdot f(x_{n+j}, z_{n+j})$

que se supone, por hipótesis, convergente: Si se toman límites cuando el tamaño de paso tiende a cero, debe verificarse que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} z_{n+j} = \varphi(x)$$

siendo $\varphi(x)$ la solución de un problema de valor inicial cualquiera al que se aplique el método. Por tanto al aplicar límites cuando el tamaño de paso tiende a cero en la expresión del método se tiene:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot z_{n+j} - h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j \cdot f(x_{n+j}, z_{n+j}) \right) = 0 = \sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot \varphi(x) \Rightarrow \sum_{j=0}^k \alpha_j = 0$$

por lo que $C_0 = \alpha_0 + \dots + \alpha_k = 0$.

Entonces $\alpha_0 = -\alpha_1 - \dots - \alpha_k$ y sustituyendo en $\sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot z_{n+j}$ se tiene

$$\text{que: } \sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot z_{n+j} = \sum_{j=1}^k \alpha_j \cdot (z_{n+j} - z_n).$$

Al ser, por hipótesis, el método convergente:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{z_{n+j} - z_n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} j \frac{z_{n+j} - z_n}{jh} = j \cdot \varphi'(x).$$

Por tanto, dividiendo por h y aplicando límites, cuando h tiende a cero:

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot z_{n+j} - h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j \cdot f(x_{n+j}, z_{n+j}) \right) =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\sum_{j=1}^k \alpha_j \cdot (z_{n+j} - z_n) \right) - \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sum_{j=0}^k \beta_j \cdot f(x_{n+j}, z_{n+j}) \right) =$$

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j \cdot j \cdot \varphi'(x) - \sum_{j=0}^k \beta_j \cdot \varphi'(x) \Rightarrow \sum_{j=1}^k j \cdot \alpha_j - \sum_{j=0}^k \beta_j = 0,$$

por lo que $C_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + k\alpha_k - (\beta_0 + \dots + \beta_k) = 0$.

Por tanto el método es consistente. \square

Sin embargo, la consistencia por sí sola no garantiza la convergencia.

Por ejemplo, el método $z_{n+2} - 2z_{n+1} + z_n = h(2f_{n+1} - 2f_n)$ es consistente y sin embargo no es convergente pues si se aplica al problema $y' = 0$, $y(0) = 0$, la solución exacta es $\varphi(x) = 0$, mientras $z_n = nh$, por lo que tiende a x , distinto de $\varphi(x)$.

Definición 14.3.7:

Se denomina **constante de error** o **coeficiente de error** del método al primer coeficiente distinto de cero C_{p+1} de $L[\psi, x, h]$.

En consecuencia, el orden de consistencia del método es igual a p si:

$$L[\psi, x, h] = C_{p+1} \cdot h^{p+1} \psi^{(p+1)}(x) + \dots = O(h^{p+1}),$$

siendo C_{p+1} la constante de error del método.

El error de truncamiento del método es igual a:

$$L[\varphi, x, h] = C_{p+1} \cdot h^{p+1} \varphi^{(p+1)}(x) + \dots$$

donde φ es la solución exacta.

Un método lineal multipaso tiene un orden p de consistencia si se anulan $p + 1$ coeficientes C_0, C_1, \dots, C_p , con lo que se tienen $p + 1$ ecuaciones lineales entre los coeficientes α_j y β_j .

Si un método es explícito de k pasos se deben calcular $2k$ coeficientes y si es implícito $2k + 1$, luego el orden máximo de consistencia de un método explícito de k pasos es $2k - 1$, y el de un método implícito es $2k$.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 14.3.3: Calcular el orden de consistencia del método:

$$z_{n+2} - z_n = 2h \cdot f_{n+1}.$$

En este método $\alpha_0 = -1, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \beta_0 = 0, \beta_1 = 2, \beta_2 = 0$, por lo que:

$$C_0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = -1 + 1 = 0,$$

$$C_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 - (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2) = 2 - 2 = 0,$$

$$C_2 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + 2^2\alpha_2) - (\beta_1 + 2\beta_2) = 4/2 - 2 = 0,$$

$$C_3 = \frac{1}{3!}(\alpha_1 + 2^3\alpha_2) - \frac{1}{2}(\beta_1 + 2^2\beta_2) = \frac{1}{6}(8) - \frac{1}{2}(2) = \frac{1}{3} \neq 0,$$

$$L[\psi, x, h] = C_3 \cdot h^3 \psi'''(c) + \dots = \frac{1}{3} \cdot h^3 \psi'''(c) + \dots$$

El orden de consistencia del método es 2.

Ejemplo 14.3.4: Calcular el error de truncamiento al aplicar el método $z_{n+2} - z_n = 2h \cdot f_{n+1}$ al problema de valor inicial: $y' = 3x^2$, $y(0) = 0$.

El error de truncamiento es, por definición:

$T_{n+2} = L[\varphi, x, h] = \varphi(x_{n+2}) - \varphi(x_n) - 2h\varphi'(x_{n+1})$, donde φ es solución del problema de valor inicial:

$$\varphi'(x) = 3x^2, \varphi(x) = x^3, x_0 = 0, x_n = x_0 + n \cdot h = n \cdot h, \text{ por tanto:}$$

$$\varphi(x_{n+2}) = (n+2)^3 \cdot h^3, \varphi(x_n) = n^3 \cdot h^3, \varphi'(x_{n+1}) = 3(n+1)^2 \cdot h^2,$$

$$T_{n+2} = (n+2)^3 h^3 - n^3 h^3 - 2h \cdot 3(n+1)^2 h^2 = 2h^3.$$

El orden del error de truncamiento es 3.

Coincide este resultado con el obtenido en el ejemplo anterior donde $L[\psi, x, h] = C_3 \cdot h^3 \psi'''(c) + \dots$, por lo que $T_{n+2} = L[\varphi, x, h] = C_3 \cdot h^3 \cdot \varphi'''(c) + \dots$, donde φ es solución del problema de valor inicial, y por tanto: $\varphi'(x) = 3x^2$, $\varphi''(x) = 6x$, $\varphi'''(x) = 6$, y $\varphi^{(iv)}(x) = \dots = 0$, $\forall x$, por lo que:

$$T_{n+2} = L[\varphi, x, h] = C_3 \cdot h^3 \cdot \varphi'''(x) = \frac{1}{3} \cdot h^3 \cdot 6 = 2h^3.$$

Ejemplo 14.3.5: Calcular el orden de consistencia del método de Adams-Bashforth de dos pasos $z_{n+2} - z_{n+1} = \frac{h}{2} \cdot (3f_{n+1} - f_n)$ y la constante de error.

En este método $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_0 = \frac{-1}{2}$, $\beta_1 = \frac{3}{2}$, $\beta_2 = 0$, por lo

que:

$$C_0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 0 - 1 + 1 = 0,$$

$$C_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 - (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2) = -1 + 2 - \left(\frac{-1}{2} + \frac{3}{2} + 0\right) = 0,$$

$$C_2 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + 2^2\alpha_2) - (\beta_1 + 2\beta_2) = \frac{1}{2}(-1 + 4) - \left(\frac{3}{2}\right) = 0,$$

$$C_3 = \frac{1}{3!}(\alpha_1 + 2^3\alpha_2) - \frac{1}{2}(\beta_1 + 2^2\beta_2) = \frac{1}{6}(-1 + 8) - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{12} \neq 0.$$

$$L[\psi, x, h] = C_3 \cdot h^3 \psi'''(c) + \dots = \frac{5}{12} \cdot h^3 \psi'''(c) + \dots$$

El método tiene orden de consistencia 2 y la constante de error es $C_3 =$

$$\frac{5}{12} = \gamma_2.$$

En todos los métodos de Adams-Bashforth el orden de consistencia p del método coincide con el número k de pasos: $p = k$, y la constante de error coincide con γ_k : $C_{k+1} = \gamma_k$.

14.3.4. Polinomios de estabilidad

Se ha calculado el error de truncamiento mediante un desarrollo en serie de *Taylor* y se expresa como una serie de potencias de h . Se deben tener en cuenta algunas dificultades pues a la solución se le ha impuesto que sea continua y con primera derivada continua, por lo que las derivadas de orden más alto que aparecen en el desarrollo de *Taylor* pueden no existir.

Esta dificultad queda subsanada ya que se sustituye $\varphi(x)$ por una función arbitraria suficientemente regular $\psi(x)$ que no sea necesariamente la solución.

Al imponer que el error de truncamiento tienda a cero cuando el tamaño del paso tiende a cero (asumiendo que la función incremento no tienda a infinito cuando h tiende a cero como ciertamente ocurre en este caso) se tiene que el error de truncamiento tiende a:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j r^j$$

y únicamente depende de los coeficientes α_j del método. La expresión anterior es un polinomio en r de grado k directamente relacionado con el método, que tiene un interés especial.

Definición 14.3.8:

Dado un método lineal multipaso $\sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot z_{n+j} = h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j \cdot f(x_{n+j}, z_{n+j})$,

$n \geq 0$, se denomina **primer polinomio de estabilidad** (o también **primer polinomio característico**) asociado al método al polinomio $\rho(r)$ de grado k definido como:

$$\rho(r) = \sum_{j=0}^k \alpha_j r^j$$

donde r puede tomar valores complejos.

Definición 14.3.9:

Dado un método lineal multipaso $\sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot z_{n+j} = h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j \cdot f(x_{n+j}, z_{n+j})$,

$n \geq 0$, se denomina **segundo polinomio de estabilidad** (o también **segundo polinomio característico**) asociado al método al polinomio $\sigma(r)$ definido como:

$$\sigma(r) = \sum_{j=0}^k \beta_j r^j.$$

Si el método es implícito el segundo polinomio característico es de grado k y si es explícito su grado es menor que k .

Siempre se tiene que $\rho(1) = C_0$ y $\rho'(1) - \sigma(1) = C_1$. Por tanto si un método es consistente se verifican las dos condiciones siguientes:

$$\begin{cases} \rho(1) = 0, \\ \rho'(1) = \sigma(1). \end{cases}$$

14.3.5. Estabilidad. Condición de raíz

Existen muchas formas de estabilidad que distintos autores denominan de diversas maneras. Unas se refieren al problema de valor inicial y otras al método numérico.

Se supone que en un problema de valor inicial se perturban la función f

y el valor inicial y_0 ; se pretende conocer la sensibilidad de la solución a tal perturbación. La perturbación $(\delta(x), \delta)$ y la solución perturbada $z(x)$ son definidas por: $z' = f(x, z) + \delta(x)$; $z(x_0) = y_0 + \delta$; $x \in [x_0, b]$

Una definición dice:¹

Definición 14.3.10:

Sean $(\delta(x), \delta)$ y $(\delta^*(x), \delta^*)$ dos perturbaciones cualesquiera de un problema de valor inicial y sean $z(x)$ y $z^*(x)$ las soluciones perturbadas resultantes. Entonces si existe una constante positiva s tal que para todo $x \in [x_0, b]$, $\|z(x) - z^*(x)\| \leq s \cdot \varepsilon$ siendo $\|\delta(x) - \delta^*(x)\| \leq \varepsilon$ y $\|\delta - \delta^*\| \leq \varepsilon$, entonces el problema de valor inicial dado se dice que es **totalmente estable**.

Afirmar que un problema de valor inicial sea totalmente estable (o bien propuesto) no es afirmar demasiado, pues s puede ser una constante (finita) muy grande. Gear² prueba que las hipótesis de los teoremas de existencia y unicidad son suficientes para que el problema de valor inicial sea totalmente estable.

Cualquier método numérico aplicado a un problema de valor inicial introduce errores debidos a la discretización y al redondeo, lo que puede ser interpretado de forma equivalente a perturbar un problema. Si las condiciones de la definición de estabilidad no se satisfacen entonces no se

¹ Hahn, G. (1967): *Stability of Motion*. Springer-Verlag. Stetter, H. J. (1971): *Stability of discretization on infinite intervals*: in Conf. of Applications of Numerical Analysis, Dundee, 1971, edir. J. Morris: Lecture Notes in Mathematics nº 228, Springer-Verlag. Página 207-222.

² Gear, C. W. (1971): *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations*, Prentice-Hall.

puede esperar que un método numérico proporcione una solución aceptable. Pero esto también puede ser cierto si el método es sensible a las perturbaciones. Se pueden estudiar los efectos que producen las perturbaciones de la función incremento y los valores iniciadores.

Definición 14.3.11:

Sean $\{\delta_n\}$ y $\{\delta^*_n\}$ dos perturbaciones cualesquiera de un método numérico, y sean $\{z_n\}$ y $\{z^*_n\}$ las soluciones resultantes perturbadas. Si existen unas constantes s y h_0 tales que para todo $h \in (0, h_0]$ si $\|\delta_n - \delta^*_n\| \leq \varepsilon$ entonces $\|z_n - z^*_n\| \leq s \cdot \varepsilon$, $0 \leq n \leq N$, se dice que el método numérico es **cero-estable**.

La **cero-estabilidad** debe su nombre a que controla la forma en la que se acumulan los errores en el límite cuando el tamaño de paso tiende a cero.

La **cero-estabilidad** es una propiedad del método, no del problema de valor inicial si éste está bien propuesto.

La **estabilidad** de los métodos lineales multipaso se analiza teniendo en cuenta que las ecuaciones en diferencias asociadas generan en su mayoría soluciones parásitas, denominadas así porque no tienen nada que ver con la solución exacta del problema de valor inicial. Es pues interesante saber si un método introduce soluciones parásitas y si éstas tienden a cero cuando n tiende a infinito.

Definición 14.3.12:

Se dice que un método numérico lineal multipaso es **estable** (Lambert³) si las raíces del primer polinomio característico del método son de módulo menor o igual a la unidad, siendo estrictamente menores que uno si son raíces múltiples.

Es decir, un método numérico lineal multipaso es estable si los valores r_i tales que $\rho(r_i) = 0$ verifican que $|r_i| \leq 1$, y si $|r_i| = 1$ entonces $\rho'(r_i)$ es distinto de cero.

Esta condición se denomina **condición de raíz**.

La primera propiedad indica que las raíces del primer polinomio característico deben estar en el círculo unidad $\{z \mid |z| \leq 1\}$ del plano complejo, y la segunda indica que todas las raíces de la frontera del círculo deben ser raíces simples.

Se puede observar además que si un método numérico consistente es tal que $\rho(1) = 0$ y $\sigma(1) = 0$, entonces $\rho(1) = \rho'(1) = 0$ con lo que $r = 1$ es una raíz doble del primer polinomio característico; el método entonces no verifica la condición de raíz y no es un método estable. Por eso todo método consistente y estable debe verificar que $\sigma(1) \neq 0$.

Si no se cumple la condición de raíz el error crece exponencialmente, lo que puede comprobarse aplicando un método a $y' = 0$ con $y(0) = y_0$, ya que se obtiene: $z_n = C_1 \cdot r_1^n + \dots + C_k \cdot r_k^n$, y si alguna de las raíces r_j del primer polinomio característico tiene su módulo mayor que 1, entonces r_j^n crece al

³ Lambert, J. D.: *Numerical Methods for Ordinary Differential Systems. The Initial Value Problem*. John Wiley & Sons. 1991.

crecer n , con lo que z_n también crece.

Se estudió que el método $z_{n+2} - 2z_{n+1} + z_n = h(2f_{n+1} - 2f_n)$ es consistente pero no es convergente. Su primer polinomio de estabilidad $\rho(r) = r^2 - 2r + 1 = (r - 1)^2$ tiene a $r = 1$ como raíz doble, por lo que no verifica la condición de raíz, luego el método no es estable. Si se aplica al problema $y' = 0$, $y(0) = 0$, de solución exacta $\varphi(x) = 0$, $\forall x$, se obtiene que $z_n = n \cdot h = x$, cuyo límite cuando h tiende a cero es distinto de $\varphi(x)$.

Definición 14.3.13:

Se llaman **inestables** aquellos métodos numéricos que no son estables.

Se observa que si el método es convergente, $r = 1$ es siempre una raíz del primer polinomio característico, y se denomina a esta raíz, r_1 o **raíz principal**, y al resto de las raíces, **raíces parásitas**.

14.3.6. Condición de raíz fuerte

Definición 14.3.14:

Se dice que un método numérico lineal multipaso verifica la **condición de raíz fuerte** si todas las raíces parásitas del primer polinomio característico del método tienen su módulo estrictamente menor que uno.

En algunos textos se denomina a esta propiedad, condición de raíz y a la anterior condición débil de raíz y se denominan métodos débilmente

estables aquellos que tienen todas las raíces con módulo menor o igual que uno y alguna raíz parásita con módulo uno.

El método de *Adams-Bashforth* de cuarto orden tiene como primer polinomio característico: $\rho(r) = r^3 \cdot (r - 1)$ por lo que tiene las raíces 1, 0, 0 y 0, y en consecuencia es un método numérico fuertemente estable.

En general, un método de *Adams* de k pasos tiene como primer polinomio característico: $\rho(r) = r^k - r^{k-1}$, por lo que, salvo la raíz principal que vale uno, todas las raíces parásitas valen cero, y en consecuencia todos los métodos de Adams son estables y fuertemente estables.

Sin embargo en los métodos de *Nyström* explícitos (como la regla del punto medio: $z_{n+2} = z_n + 2h \cdot f_{n+1}$), o los métodos generalizados de *Milne-Simpson* implícitos, como por ejemplo: $z_{n+2} = z_n + (h/3) \cdot (f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n)$, el primer polinomio característico es: $\rho(r) = r^k - r^{k-2}$. Tiene las raíces 0, 1 y -1 . Estos métodos son estables pero no son fuertemente estables.

Si se buscan métodos de máxima estabilidad es razonable pensar que las raíces de su primer polinomio de estabilidad deberán ser, la raíz 1, simple y las raíces 0, con orden de multiplicidad $k - 1$, con lo que ya se conocen los valores de α_j . Si además se imponen órdenes de consistencia establecidos se encuentran de nuevo las expresiones de los métodos de *Adams*, por un camino menos laborioso que el de buscar el polinomio interpolador.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 14.3.6: Determinar α y β para que el método

$$z_{n+3} + \alpha \cdot z_{n+2} - \alpha \cdot z_{n+1} - z_n = h \cdot (\beta \cdot f_{n+2} + \beta \cdot f_{n+1})$$

tenga el mayor orden de consistencia posible. Estudiar la convergencia del método. Aplicarlo al problema $y' = y + 4x^3 - x^4$, $y(0) = 0$ con una longitud de paso h y valores iniciadores $z_0 = 0$ y $z_1 = h^4$, $z_2 = 16h^4$ para obtener z_3 y z_4 . Calcular el error global.

Orden de consistencia del método:

$$C_0 = 0 = 1 + \alpha - \alpha - 1 = 0, \forall \alpha$$

$$C_1 = 0 = 3 + 2\alpha - \alpha - (\beta + \beta) \Rightarrow \alpha = 2\beta - 3; \quad (1)$$

$$C_2 = 0 = \frac{1}{2}(9 + 4\alpha - \alpha) - (2\beta + \beta) \Rightarrow \alpha = 2\beta - 3;$$

$$C_3 = 0 = \frac{1}{6}(27 + 8\alpha - \alpha) - \frac{1}{2}(4\beta + \beta) \Rightarrow 27 + 7\alpha = 15\beta; \quad (2)$$

De (1) y (2) se obtiene que $\alpha = 9$ y $\beta = 6$.

$$C_4 = \frac{1}{24}(81 + 16\alpha - \alpha) - \frac{1}{6}(8\beta + \beta) = \frac{1}{24}(81 + 15\alpha - 36\beta) \Rightarrow \text{Si } \alpha = 9 \text{ y}$$

$\beta = 6$ entonces $C_4 = 0$. Sin embargo $C_5 \neq 0$. Por tanto el mayor orden de consistencia posible del método se obtiene para $\alpha = 9$ y $\beta = 6$, y éste es $p = 4$.

Estudio de la estabilidad:

El polinomio característico o polinomio de estabilidad es $\rho(r) = r^3 + \alpha r^2 - \alpha r - 1 = r^3 + 9r^2 - 9r - 1$ de raíces: $r_1 = 1$, $r_i = -5 \pm \sqrt{24}$. Como $|-5 - \sqrt{24}| > 1$ el método es inestable. Aunque el método es consistente, como no es estable, no es convergente.

Al aplicarlo al problema $y' = y + 4x^3 - x^4$, $y(0) = 0$ con una longitud de paso h se tiene que $x_0 = 0 \Rightarrow x_n = nh$.

$$z_{n+3} + 9z_{n+2} - 9z_{n+1} - z_n = 6h \cdot (f_{n+2} + f_{n+1}) = 6h \cdot [(z_{n+2} + 4x_{n+2}^3 - x_{n+2}^4) + (z_{n+1} + 4x_{n+1}^3 - x_{n+1}^4)] \Rightarrow z_{n+3} + (9 - 6h) \cdot z_{n+2} - (9 + 6h) \cdot z_{n+1} - z_n = 6h \cdot [4(h \cdot (n + 2))^3 - (h \cdot (n + 2))^4 + 4(h \cdot (n + 1))^3 - (h \cdot (n + 1))^4].$$

$$z_3 = -(9 - 6h) \cdot z_2 + (9 + 6h) \cdot z_1 + z_0 + 6h \cdot [4(2h)^3 - (2h)^4 + 4h^3 - h^4] = -(9 - 6h) \cdot 16h^4 + (9 + 6h) \cdot h^4 + 6h \cdot [32h^3 - 16h^4 + 4h^3 - h^4] = -144h^4 + 96h^5 + 9h^4 + 6h^5 + 216h^4 - 102h^5 = 81h^4 = (3h)^4.$$

$$z_4 = -(9 - 6h) \cdot z_3 + (9 + 6h) \cdot z_2 + z_1 + 6h \cdot [4h^3 3^3 - h^4 3^4 + 4h^3 2^3 - h^4 2^4] = 256h^4 = (4h)^4.$$

$$\text{En general } z_n = (nh)^4.$$

Para calcular el error global se resuelve la ecuación diferencial $y' = y + 4x^3 - x^4$, $y(0) = 0$ y se obtiene que $\varphi(x) = x^4$. Por tanto el error global en $x = x_4 = 4h$ es: $e(h) = \varphi(x_4) - z_4 = (4h)^4 - (4h)^4 = 0$ a pesar de que el método no sea convergente.

Ejemplo 14.3.7: Determinar α y β para que el método:

$$z_{n+2} + \alpha \cdot z_{n+1} + \beta \cdot z_n = h(\alpha^2 \cdot f_{n+1} - \frac{5}{2} \alpha f_n)$$

sea convergente. Aplicarlo al problema $y' = 4$, $y(0) = 0$, con una longitud de paso de 0,5, tomando como valores iniciadores $z_0 = 0$ y $z_1 = 5$, para obtener un valor aproximado en $x = 1$.

Para que el método sea convergente debe ser consistente y estable.

Estudio de la consistencia:

$$C_0 = 0 = 1 + \alpha + \beta \Rightarrow \beta = -1 - \alpha:$$

$$C_1 = 0 = 2 + \alpha - (\alpha^2 - \frac{5}{2} \alpha) = -\alpha^2 + \frac{7}{2} \alpha + 2 \Rightarrow \alpha_1 = 4; \alpha_2 = -\frac{1}{2}$$

Estudio de la estabilidad:

El primer polinomio característico o primer polinomio de estabilidad es:

$\rho(r) = r^2 + \alpha \cdot r + (-1 - \alpha)$ de raíces: $r_1 = 1$ y $r_2 = -1 - \alpha$. Para $\alpha_1 = 4$ el método no es estable pues $r_2 = -1 - \alpha = -5$ de módulo mayor que 1. Para $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$ el método es estable pues $r_2 = -1 - \alpha = -\frac{1}{2}$ de módulo menor que 1.

Si se impone que:

$$|-1 - \alpha| < 1 \Rightarrow -1 < -1 - \alpha < 1 \Rightarrow 0 < -\alpha < 2 \Rightarrow -2 < \alpha < 0,$$

se obtiene de nuevo que el valor de $\alpha_1 = 4$ no hace estable al método

mientras que $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$ si lo hace.

Para $\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \beta = -\frac{1}{2}$ y se tiene el método:

$$z_{n+2} - \frac{1}{2}z_{n+1} - \frac{1}{2}z_n = \frac{h}{4} \cdot (f_{n+1} + 5f_n)$$

que se quiere aplicar al problema $y' = 4$, $y(0) = 0$ con una longitud de paso de 0,5, tomando como valores iniciadores $z_0 = 0$ y $z_1 = 5$ para obtener un valor aproximado en $x = 1$, $x_0 = 0$, por lo que $x = 1 = x_0 + n \cdot h = 0,5 \cdot n \Rightarrow n = 2$; $f_n = f_{n+1} = 4 \Rightarrow$

$$z_2 - \frac{1}{2}z_1 - \frac{1}{2}z_0 = \frac{h}{4} \cdot (f_{n+1} + 5f_n) \Rightarrow z_2 = \frac{5}{2} + 0 + \frac{h}{4}(24) = \frac{5}{2} + \frac{6}{2} = \frac{11}{2}.$$

14.3.7. Relaciones entre convergencia, consistencia y estabilidad

La relación entre **convergencia, consistencia y estabilidad** en los métodos lineales multipaso es diferente de la que existe en los métodos de un paso. La consistencia es una condición necesaria para la convergencia, pero ahora no es una condición suficiente. Para que un método sea convergente debe cumplirse, según probó *Dahlquist*, que sea consistente y estable. Es más, estabilidad y consistencia de orden p implican convergencia del mismo orden.

Se observa que al aplicar la expresión del error de truncamiento a los métodos de *Runge-Kutta* estudiados en el capítulo anterior, ésta depende de

derivadas parciales de f , mientras que en los métodos lineales de k pasos sólo depende de la derivada de la solución. Esto tiene importancia en los casos donde la solución sea muy regular y sin embargo las derivadas parciales de f tomen valores muy grandes.

En *Atkinson*⁴ se encuentran las demostraciones de los siguientes teoremas y para un tratamiento más completo se puede consultar a *Isaacson&Keller*.⁵

Teorema 14.3.2:

“Si un método lineal multipaso es consistente, entonces dicho método es cero-estable si y sólo si satisface la condición de raíz”.

Corolario 14.3.3:

“Un método lineal multipaso consistente es convergente si y sólo si es estable”.

Teorema 14.3.4:

“La condición necesaria y suficiente para que un método lineal multipaso sea convergente es que sea consistente y estable (verifique la condición de raíz)”.

Este último teorema se puede considerar el fundamental en esta materia. Fue probado en 1956 para métodos lineales multipaso por *Gelmund*

⁴ Atkinson, K. (1989): *An introduction to Numerical Analysis*. John Wiley & Sons. Nueva York. (2ª edición).

⁵ Isaacson, E; Keller, H. (1966): *Analysis of Numerical Methods*. Wiley.

Dahlquist,⁶ primer artículo donde se trabajó de una forma matemática el problema de la convergencia. Y una demostración más general se encuentra en la obra ya mencionada de *Isaacson&Keller*.

14.3.8. Orden máximo de convergencia: Primera barrera de Dahlquist

Una cuestión interesante es buscar el mayor orden de convergencia de un método lineal de k pasos. Para ello se puede pensar en escoger fórmulas que tengan un orden de consistencia máximo. Sin embargo, en general, las fórmulas que tienen órdenes altos de consistencia son inestables.

En un método lineal multipaso de k pasos se dispone, como ya se ha comentado, de $2k + 1$ parámetros y para que sea consistente de orden p debe verificar $p + 1$ condiciones, por tanto, si el método es implícito se puede obtener el orden máximo de consistencia $p = 2k$; y si es explícito $p = 2k - 1$. Sin embargo estos métodos pueden no satisfacer la condición de raíz y no ser estables.

El teorema de la **primera barrera de Dahlquist** impone una limitación entre el orden máximo de consistencia de un método de k pasos y su estabilidad. Este resultado fue obtenido por *Dahlquist* en 1956. Es interesante observar la fecha tan reciente de este resultado.

⁶ Dahlquist, G. (1956): *Convergence and stability in the numerical integrations of ordinary differential equations* Math. Scand. 4. 33-53.

Teorema 14.3.5: Teorema de la primera barrera de Dahlquist

Dado un método lineal de k pasos, estable y consistente de orden p .

- a) Si k es par, entonces $p \leq k + 2$.
- b) Si k es impar, entonces $p \leq k + 1$.
- c) Si $\frac{\beta_k}{\alpha_k} \leq 0$, entonces $p \leq k$ (en particular, si $\beta_k = 0$, es decir, si el método es explícito).

En consecuencia el máximo orden de consistencia posible para un método lineal de k pasos estable es $k + 1$, si k es impar, y $k + 2$, si k es par.

Un método lineal estable de k pasos de orden de consistencia $k + 2$ se llama un **método óptimo**.

Los métodos de estas características en general no son buenos desde el punto de vista práctico. Se puede comprobar fácilmente que son simétricos en el sentido de que los coeficientes verifican que: $\alpha_j = \alpha_{k-j}$ y $\beta_j = \beta_{k-j}$.

Estas consideraciones encajan con el hecho de que los métodos de Adams hayan sido tan utilizados, aunque no sean métodos óptimos. Se puede decir que los métodos de Adams proporcionan el orden máximo de convergencia que se puede esperar dentro de las fórmulas de k pasos.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 14.3.8: Analizar el orden de convergencia de los métodos de Adams utilizando el teorema de la primera barrera de Dahlquist.

En el método de Euler, que es el método de Adams-Bashforth de un paso se tiene que $k = 1$, $p = 1$ y el máximo orden de consistencia permitido según el teorema (a) para que sea estable, siendo k impar, es $p = 2$. Pero al ser un método explícito, entonces (c) $p \leq k$, por lo que alcanza el máximo orden de consistencia para un método explícito de un número de pasos impar $k = 1$.

En el método de Adams-Bashforth de dos pasos se tiene que $k = 2$, $p = 2$ y el máximo orden de consistencia permitido según el teorema (b) para que sea estable, siendo k par, es $p \leq k + 2 = 4$. Pero al ser un método explícito, entonces (c) $p \leq k$, por lo que alcanza el máximo orden de consistencia para un método explícito de un número de pasos $k = 2$ par.

En el método de Adams-Bashforth de tres pasos se tiene que $k = 3$, $p = 3$ y el máximo orden de consistencia permitido según el teorema (a) para que sea estable, siendo k impar, es $p \leq k + 1 = 4$. Pero al ser un método explícito, entonces (c) $p \leq k$, por lo que alcanza el máximo orden de consistencia para un método explícito de un número de pasos $k = 3$ impar.

En general los métodos de Adams-Bashforth alcanzan el máximo orden

de consistencia permitido para un método explícito, $k = p$.

En el método de Adams-Moulton de un paso se tiene que $k = 1$, $p = 2$ y el máximo orden de consistencia permitido según el teorema (a) para que sea estable, siendo k impar, es $p \leq k + 1 = 2$, por lo que alcanza el máximo orden de consistencia para un método implícito de un número de pasos $k = 1$ impar.

En el método de Adams-Moulton de dos pasos se tiene que $k = 2$, $p = 3$ y el máximo orden de consistencia permitido según el teorema (b) para que sea estable, siendo k par, es $p \leq k + 2 = 4$.

En el método de Adams-Moulton de tres pasos se tiene que $k = 3$, $p = 4$ y el máximo orden de consistencia permitido según el teorema (a) para que sea estable, siendo k impar, es $p \leq k + 1 = 4$, por lo que alcanza el máximo orden de consistencia que permite la barrera de Dahlquist.

Ejemplo 14.3.9: Determinar el valor que debe tomar b para que el método lineal de dos pasos:

$$z_{n+2} + 4b \cdot z_{n+1} - (4b + 1) \cdot z_n = h \cdot ((3b + 1) \cdot f_n + (b + 1) \cdot f_{n+2})$$

sea de orden de convergencia máximo. Utilizar el método con el valor de b calculado para hallar el valor aproximado de $x = 2$ de la solución $y(x)$ del problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = 2y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

tomando la longitud de paso $h = 0,1$ y valores iniciadores $z_0 = z_1 = 1$.

Demostrar la convergencia o no convergencia del método para el valor de b hallado.

Orden de consistencia:

$$C_0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = -4b - 1 + 4b + 1 = 0, \text{ para todo } b.$$

$$C_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 - (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2) = 4b + 2 - (3b + 1) - (b + 1) = 0, \forall b.$$

$$C_2 = 1/2(\alpha_1 + 4\alpha_2) - (\beta_1 + 2\beta_2) = 1/2(4b + 4) - 2(b + 1) = 0, \text{ para todo } b.$$

$$C_3 = 1/6(\alpha_1 + 8\alpha_2) - 1/2(\beta_1 + 4\beta_2) = 1/6(4b + 4) - 1/2(4(b + 1)) = (-4/3)b - 2/3 = 0 \Rightarrow b = -1/2.$$

$$C_4 = 1/24(\alpha_1 + 16\alpha_2) - 1/6(\beta_1 + 8\beta_2) = 1/24(4b + 4) - 1/6(8(b + 1)) \neq 0 \text{ si } b = -1/2.$$

Para $b = -1/2$ se tiene el máximo orden de consistencia, $p = 3$.

Valor aproximado de $x = 2$

$$x_0 = 0, x_n = 2 = x_0 + nh = 0,1n \Rightarrow n = 20.$$

El método para $b = -1/2$ es: $z_{n+2} - 2z_{n+1} + z_n = h \cdot (-1/2f_n + 1/2f_{n+2})$.

Aplicándolo a $y' = 2y$, se tiene: $z_{n+2} - 2z_{n+1} + z_n = h \cdot (-z_n + z_{n+2}) \Rightarrow$

$(1 - h)z_{n+2} - 2z_{n+1} + (1 + h)z_n = 0$. Se resuelve la ecuación en

diferencias, de raíces: $r_1 = 1$ y $r_2 = \frac{1+h}{1-h}$, por lo que $z_n = A\left(\frac{1+h}{1-h}\right)^n + B(1)^n$.

Como $z_0 = 1 \Rightarrow 1 = A + B$. Como $z_1 = 1 \Rightarrow 1 = A\left(\frac{1+h}{1-h}\right) + B$

$\Rightarrow A = 0$ y $B = 1 \Rightarrow z_n = 1$ para todo n , por lo $z_{20} = 1$.

Estudio de la convergencia

Un método es convergente si y sólo si es consistente y estable.

El método es consistente, pues su orden de consistencia es $p = 3 > 1$.

Polinomio de estabilidad: $r^2 - 2r + 1 = 0 = (r - 1)^2$. 1 es raíz doble, luego el método no es estable, por lo que no es convergente.

14.3.9. Métodos multipaso vectoriales

Los métodos descritos para el caso escalar pueden generalizarse rápidamente para resolver **sistemas de ecuaciones diferenciales** de primer orden (o ecuaciones diferenciales de orden superior), siendo válidas las expresiones interpretándolas ahora de forma vectorial. En concreto x sigue siendo escalar, y es un vector de \mathfrak{R}^n , la función $f(x, y)$ es por tanto una función de \mathfrak{R}^{n+1} en \mathfrak{R}^n , y cada solución z_n es un vector de \mathfrak{R}^n .

El método definido por:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j z_{n+j} = h\Phi_f(z_{n+k}, z_{n+k-1}, \dots, z_n, x_n, h), \quad z_\mu = \eta_\mu(h), \quad \mu = 0, 1, \dots, k-1$$

es **convergente** si, para todo problema de valor inicial que satisface el teorema de existencia y unicidad de *Picard-Lindelöf*, se tiene que

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ x=a+nh}} z_n = y(x) \quad \text{para todo } x \in [a, b] \text{ y para todas las soluciones } \{z_n\} \text{ de la}$$

ecuación en diferencias que satisfacen los valores iniciadores para los cuales

$$\lim_{h \rightarrow 0} \eta_{\mu}(h) = y_0, \mu = 0, 1, \dots, k-1.$$

Un método que no es convergente se dice que es **divergente**.

Otra forma equivalente es comprobar que: $\max_{0 \leq n \leq N} \|y(x_n) - z_n\| \rightarrow 0$

cuando h tiende a cero, siendo constante $nh = x - x_0$.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 14.3.10: Aplicar el método de Adams-Bashforth de dos pasos al problema de valor inicial:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ con } \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con $h = 0,1$ para aproximar $\begin{pmatrix} y_1(0,2) \\ y_2(0,2) \end{pmatrix}$, utilizando como valores iniciadores: z_0

$$= z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El método de Adams-Bashforth de dos pasos es:

$$z_{n+2} = z_{n+1} + \frac{h}{2}(3f_{n+1} - f_n)$$

donde los z_n y f_n son vectores de \mathfrak{R}^2 , mientras x_n pertenece a \mathfrak{R} , siendo $f_n =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} z_n + \begin{pmatrix} x_n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como $x_0 = 0$ y $z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ se tiene que $f_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Como $x_1 = 0,1$ y $z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ se tiene que $f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Para calcular z_2 se usa la fórmula de Adams-Bashforth:

$$z_{n+2} = z_{n+1} + \frac{h}{2}(3f_{n+1} - f_n) \Rightarrow$$

$$z_2 = z_1 + \frac{h}{2}(3f_1 - f_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0,05(3 \begin{pmatrix} 1,1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1,015 \\ 1,15 \end{pmatrix}.$$

Ejercicios

14.12. Calcular el orden de consistencia del método $z_{n+2} - z_n = h(f_{n+1} + f_n)$ y el error de truncamiento cometido al aplicarlo al problema de valor inicial $y' = y + x$, $y(0) = 1$.

14.13. Calcular el orden de consistencia del método $z_{n+2} - \frac{1}{2}$

$$z_{n+1} - \frac{1}{2}z_n = h \left(\frac{-9}{8}f_{n+2} + 4f_{n+1} + \frac{-11}{8}f_n \right) \text{ y el error de}$$

truncamiento cometido al aplicarlo al problema de valor inicial $y' = y + 3$, $y(0) = 1$.

14.14. Comprobar que en el método de Adams-Bashford de k pasos, el orden de consistencia del método es $p = k$ y que la

constante de error C_{p+1} coincide con γ_k .

14.15. Comprobar que en el método de Adams-Moulton de k pasos, el orden de consistencia del método es $p = k + 1$. ¿Con qué coincide la constante de error C_{p+1} ?

14.16. Comprobar que el método $z_{n+2} - 2z_{n+1} + z_n = h \cdot (2f_{n+1} - 2f_n)$ no es convergente pues al aplicarlo a $y' = y$, $y(0) = 1$ no se obtiene un valor que se aproxime a la solución exacta. Estudiar si es consistente y calcular su orden de consistencia. Estudiar si es estable.

14.17. Determinar α_1 , α_0 y β para que el método

$$z_{n+2} + \alpha_1 \cdot z_{n+1} + \alpha_0 \cdot z_n = h \cdot (2f_{n+1} + \beta \cdot f_n)$$

tenga el mayor orden de consistencia posible. Estudiar la convergencia del método. Si el método no fuera convergente, determinar α_1 , α_0 y β para que lo sea. Aplicarlo al problema $y' = 5y + x$, $y(1) = 0$ con una longitud de paso h y valores iniciadores $z_0 = 0$ y $z_1 = h$, para obtener la solución aproximada en $x = 1 + 2h$.

(Solución: $p = 2$, con $\alpha_1 = 0$, $\alpha_0 = -1$ y $\beta = 0$. $z_2 = 12h^2$)

14.18. Aplicar el método de Adams-Bashforth de tres pasos al problema de valor inicial:

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x+1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ con } \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con $h = 0,1$ para aproximar $\begin{pmatrix} y_1(0,2) \\ y_2(0,2) \end{pmatrix}$, utilizando como valores

iniciadores: $z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y los obtenidos mediante el método de

Euler. Calcular el error global cometido.

14.19. Analizar el orden de convergencia de los métodos siguientes utilizando el teorema de la primera barrera de Dahlquist.

a) El método: $z_{n+2} - z_{n+1} = \frac{h}{2} \cdot (f_{n+1} + f_n)$.

b) El método: $z_{n+2} - 4z_{n+1} + 3z_n = -2h \cdot f_n$.

c) El método: $z_{n+2} - z_n = 2h \cdot f_{n+1}$.

d) El método: $z_{n+2} - z_n = \frac{h}{3} \cdot (f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n)$.

14.4. ESTABILIDAD ABSOLUTA Y ESTABILIDAD RELATIVA

La condición de raíz no es la única forma de estabilidad pertinente en la solución numérica de un problema de valor inicial. Se ha visto que la estabilidad está relacionada con la convergencia del método, por lo que, el valor obtenido mediante éste debe tender a la solución exacta cuando el tamaño de paso tiende a cero ($h \rightarrow 0$, $nh = x - x_0 = \text{constante}$). Pero al aplicar un método el tamaño de paso está fijado, no tiende a cero, y es conveniente saber a priori si dicho tamaño va a proporcionar un valor adecuado, por lo que es preciso considerar otras definiciones de estabilidad. En la valoración del comportamiento de un método numérico al aplicarlo a un problema de valor inicial, aunque el método sea convergente, y por tanto consistente y estable, es importante tener en cuenta que a pesar de que el valor aproximado que se obtiene debe tender a la solución exacta cuando el tamaño de paso tiende a cero, puede ocurrir que para que esto suceda el tamaño del paso tenga que ser muy pequeño, con lo que se necesitaría aplicar el método un número demasiado grande de veces, aumentarían los errores de redondeo y el coste podría ser excesivo.

Es por ello interesante estudiar la eficiencia de un método desde un punto de vista diferente: Estudiar su comportamiento para un valor fijado de h cuando n se hace cada vez mas grande, es decir, cuando los valores que aproxima el método están muy alejados de la condición inicial. De esta forma

se pueden conocer los valores h del tamaño de paso para los que el método se va a comportar adecuadamente, independientemente de su proximidad o lejanía a la condición inicial de partida.

En esta sección se estudian los conceptos de **estabilidad absoluta** y estabilidad relativa, utilizando el **polinomio de estabilidad absoluta** y sus raíces, que proporcionan los valores de tamaño de paso que garantizan el comportamiento adecuado del método para un problema de valor inicial dado.

El conjunto de valores h del tamaño de paso para los que un método proporciona buenas aproximaciones independientemente de su proximidad al punto de partida se puede obtener estudiando el comportamiento del método al aplicarlo al problema de valor inicial $y' = \lambda y$, $y(0) = 1$, cuya solución es bien conocida.

Definición 14.4.1:

Se denomina **ecuación de prueba** al problema de valor inicial: $y' = \lambda y$, $y(0) = 1$.

La ecuación de prueba tiene la ventaja de que al ser un problema de valor inicial muy sencillo de manejar, se estudia fácilmente el comportamiento de una fórmula numérica al aplicarla a ese problema. Pero además tiene un interés especial porque el comportamiento de un método frente a la ecuación de prueba se puede tomar como muestra del comportamiento que tendrá dicho método frente a un problema de valor inicial general $y' = f(x, y)$, $y(x_0) =$

y_0 , ya que el valor λ de la ecuación de prueba se puede considerar aproximadamente igual a la derivada parcial de f respecto a y en el punto (x_0, y_0) , como ocurría en el caso de los métodos de un paso.

14.4.1. Estabilidad absoluta

Se considera el método lineal multipaso convergente definido por la fórmula:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j z_{n+j} = h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j}.$$

Se aplica al problema de valor inicial $y' = \lambda \cdot y$, con $y(0) = y_0$, con un tamaño h del paso que se supondrá previamente fijado.

Se tiene entonces $\sum_{j=0}^k \alpha_j z_{n+j} = \lambda \cdot h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j z_{n+j}$, es decir:

$$\sum_{j=0}^k (\alpha_j - \lambda \cdot h \cdot \beta_j) \cdot z_{n+j} = 0 \quad (14.4.1)$$

El error de truncamiento se obtiene:

$$T_{n+k} = y_{n+k} - z_{n+k} = y_{n+k} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y_{n+j} - h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j \lambda \cdot y_{n+j} =$$

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} - \lambda \cdot h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j y_{n+j}$$

Teniendo en cuenta la expresión 14.4.1 vale 0, sustituyendo se tiene:

$$T_{n+k} = \sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} - \lambda \cdot h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j y_{n+j} + \sum_{j=0}^k (\alpha_j - \lambda \cdot h \cdot \beta_j) \cdot z_{n+j} =$$

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j (y_{n+j} - z_{n+j}) - \lambda \cdot h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j (y_{n+j} - z_{n+j}) \Rightarrow$$

$$T_{n+k} = \sum_{j=0}^k (\alpha_j - \lambda \cdot h \cdot \beta_j) \cdot (y_{n+j} - z_{n+j}).$$

Por simplificar, se supone ahora que el error de truncamiento es esencialmente constante en cada etapa, es decir $T_{n+k} = T$. Llamando $e_{n+j} = y_{n+j} - z_{n+j}$ y $\bar{h} = \lambda \cdot h$, se tiene la ecuación en diferencias en $\{e_{n+j}\}$

$$\sum_{j=0}^k (\alpha_j - \bar{h} \cdot \beta_j) \cdot e_{n+j} = T.$$

La solución general de la ecuación en diferencias se puede expresar de la forma

$$e_n = \sum_{i=0}^k A \cdot \bar{r}_i^n + \text{solución particular},$$

siendo $\bar{r}_i = \bar{r}_i(\bar{h})$ tales que $\sum_{j=0}^k (\alpha_j - \bar{h} \cdot \beta_j) \cdot \bar{r}_i^j = 0$, para $i = 1, \dots, k$.

Las raíces \bar{r}_i verifican que $\bar{r}_i \neq 1$, ya que si alguna de ellas fuera igual a

uno, entonces $\sum_{j=0}^k (\alpha_j - \bar{h} \cdot \beta_j) = 0$. Al ser el método convergente, se tiene

que $\sum_{j=0}^k \alpha_j = 0$, con lo que necesariamente $\sum_{j=0}^k \beta_j = 0$. Pero $\sum_{j=0}^k \beta_j = \sum_{j=0}^k$

$j\alpha_j = 0$. Por tanto el primer polinomio característico del método tendría a 1 como raíz doble, y el método, al no ser estable, no sería convergente.

Como $\bar{r}_i \neq 1$, la solución particular de la ecuación en diferencias $\sum_{j=0}^k$

$(\alpha_j - \bar{h} \cdot \beta_j) \cdot e_{n+j} = T$ es una constante C que verifica $\sum_{j=0}^k (\alpha_j - \bar{h} \cdot \beta_j) \cdot C = T$, y

como $\sum_{j=0}^k \alpha_j = 0$, entonces:

$$-\sum_{j=0}^k \bar{h} \cdot \beta_j \cdot C = T \Rightarrow C = -\frac{T}{\bar{h} \sum_{j=0}^k \beta_j}.$$

La solución general se puede expresar por tanto de la forma:

$$e_n = \sum_{i=0}^k A \cdot \bar{r}_i^n - \frac{T}{\bar{h} \sum_{j=0}^k \beta_j}.$$

Esta expresión permite conocer el comportamiento del error cuando el número de pasos crece. El crecimiento del error depende esencialmente del primer sumando, de manera que si una de las raíces \bar{r}_i tiene módulo mayor que uno, el error crece cuando n crece, mientras que si $|\bar{r}_i| < 1$ para $i = 1, \dots, k$, el error no crece por muy grande que sea n .

Definición 14.4.2:

Se denomina **polinomio de estabilidad absoluta** del método lineal multipaso al polinomio:

$$\pi(r, \bar{h}) = \pi(r, \lambda \cdot h) = \sum_{j=0}^k (\alpha_j - \lambda \cdot h \beta_j) \cdot r^j = \sum_{j=0}^k (\alpha_j - \bar{h} \beta_j) \cdot r^j$$

Para $h = 0$ el polinomio de estabilidad se reduce al primer polinomio de estabilidad o primer polinomio característico, $\pi(r, 0) = \rho(r)$. Las raíces del polinomio de estabilidad absoluta son funciones continuas de los coeficientes, y por tanto cada una de sus raíces tiende a una raíz del polinomio característico cuando h tiende a cero. Se tiene que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \bar{r}_i(\bar{h}) = r_i.$$

Ya se comprobó que si el método lineal es consistente, $\rho(r)$ siempre tiene una raíz igual a uno a la que se denomina raíz principal. Si el método es estable esta raíz debe ser simple. Ahora bien,

Se llama **raíz principal del polinomio de estabilidad absoluta** a la raíz \bar{r}_i tal que $\lim_{h \rightarrow 0} \bar{r}_i(\bar{h}) = 1$. A esta raíz se la denominará en adelante \bar{r}_1 .

Definición 14.4.3:

Un método es **absolutamente estable** para un valor $\bar{h} = \lambda \cdot h$, si para ese valor \bar{h} las raíces del polinomio de estabilidad verifican que $|\bar{r}_i(\bar{h})| < 1$ para $i = 1, \dots, k$.

Definición 14.4.4:

Se denomina **intervalo de estabilidad absoluta** del método al conjunto de valores reales de $\bar{h} = \lambda \cdot h$ para los que el método es absolutamente estable:

$$I = \{ \bar{h} = \lambda \cdot h \in \mathfrak{R}; |r_j(\lambda \cdot h)| < 1, \pi(r_j(\lambda \cdot h), \lambda \cdot h) = 0 \}.$$

Aunque usualmente se utiliza esta denominación, se observa que no es totalmente correcta, en el sentido de que dicho conjunto de valores reales pueden no constituir un intervalo, sino que puede ser, por ejemplo, una unión de intervalos.

Se observa también que si el problema de valor inicial estudiado: $y' = f(x, y)$ se supone definido en $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n$, es posible que tenga interés considerar que λ pueda tomar valores complejos, por lo que \bar{h} podría pertenecer al campo complejo. Este caso se estudia con detalle en la *sección 14.4.2* en la que analiza la estabilidad absoluta cuando el problema de valor inicial es un sistema lineal.

Por ello se define:

Definición 14.4.5:

Al conjunto de valores de $\bar{h} = \lambda \cdot h$, reales o complejos, que hacen que los módulos de las raíces del polinomio de estabilidad absoluta del método lineal multipaso sean menores que uno se le denomina **región de estabilidad absoluta**, A , del método:

$$A = \{ \bar{h} = \lambda \cdot h \in \mathbf{C}; |r_j(\bar{h})| < 1, \pi(r_j(\bar{h}), \bar{h}) = 0 \}$$

Por lo tanto la intersección de la región de estabilidad absoluta con el eje real es lo que antes se ha denominado **intervalo de estabilidad absoluta**.

En el ejemplo siguiente se observa que el error es inaceptable en todos los casos. Esto se debe a que $\lambda = -30$ y $h = 0,1$ por lo que $\bar{h} = -3$ que no pertenece al intervalo de estabilidad absoluta de ninguno de los tres métodos, como se comprobará en el *ejemplo 14.4.1*.

Resultados de aplicar el método de Euler, Runge-Kutta , y el método de Adams-Bashforth con tamaño de paso $h = 0,1$ a: $y' = -30y$, $y(0) = 1/3$, para aproximar la solución en $x = 1,5$.			
Exacto	Euler	Runge-Kutta	Adams
$9,54173 \times 10^{-21}$	$-1,09225 \times 10^4$	$3,95730 \times 10^5$	$8,03840 \times 10^5$

Las ecuaciones con λ negativo, pero grande en magnitud, forman parte de un grupo especial de ecuaciones que se llaman ecuaciones diferenciales *stiff*. Su error de truncamiento puede ser satisfactoriamente pequeño para tamaños de paso muy pequeños, porque el valor absoluto de λ puede forzar a hacer muy pequeño el tamaño de paso para que $\lambda \cdot h$ esté en la región de estabilidad absoluta. Para estas ecuaciones diferenciales se deben elegir métodos implícitos con una amplia región de estabilidad (o un tamaño de paso muy pequeño).

Resultados de aplicar el método de Euler , y el método de Adams-Moulton con tamaño de paso $h = 0,5$ a: $y' = \lambda \cdot y + (1 - \lambda) \cdot \text{sen } x$, $y(0) = 1$, para aproximar la solución en $x = 2$.			
λ	$\bar{h} = \lambda \cdot h$	Error con Euler	Error con Adams-Moulton
-1	-0,5	-0,255	-0,0113
-10	-5	6,9	-0,00278
-50	-25	1880	-0,000791

Se observa que el error al aplicar el método de Adams-Moulton es siempre pequeño, mientras que al aplicar el método de Euler, es aceptable cuando $\bar{h} = -0,5$, pero inaceptable en el resto de los casos. Esto se debe, de nuevo, a que, como se comprobará en el *ejemplo 14.4.1* el intervalo de estabilidad absoluta del método de Adams-Moulton es $(-\infty, 0)$, mientras que el del método de Euler es $(-2, 0)$.

14.4.2. Estabilidad relativa

Otro concepto de interés en el estudio de la estabilidad de los métodos multipaso es el de **estabilidad relativa**. En ocasiones, aunque el error cometido sea grande, puede ocurrir que la solución aproximada obtenida sea admisible, por ejemplo si la solución crece en valor absoluto y el error relativo es aceptable, con lo cual el método podría ser válido.

Definición 14.4.6:

Un método es **relativamente estable** para un valor $\bar{h} = \lambda \cdot h$, si para ese valor \bar{h} las raíces del polinomio de estabilidad verifican que $|\bar{r}_j| < |\bar{r}_1|$, para $i = 2, \dots, k$, siendo \bar{r}_1 la raíz principal del polinomio de estabilidad absoluta del método.

Definición 14.4.7:

Se denomina **región de estabilidad relativa**, R , del método al conjunto de valores de $\bar{h} = \lambda \cdot h$ que hacen que el método sea relativamente estable:

$$R = \{ \bar{h} = \lambda \cdot h \in \mathbf{C}; |r_j(\bar{h})| < |r_1(\bar{h})|, j = 2, \dots, k, \pi(r_j(\bar{h}), \bar{h}) = \pi(r_1(\bar{h}), \bar{h}) = 0 \}$$

Definición 14.4.8:

Se denomina **intervalo de estabilidad relativa** del método al conjunto de valores reales de $\bar{h} = \lambda \cdot h$ para los que el método es relativamente estable:

$$I = \{ \bar{h} = \lambda \cdot h \in \mathfrak{R}; |r_j(\bar{h})| < |r_1(\bar{h})|, j = 2 \dots k, \pi(r_j(\bar{h}), \bar{h}) = \pi(r_1(\bar{h}), \bar{h}) = 0 \}.$$

Es por tanto la intersección de la región de estabilidad relativa con el eje real. Se observa que, como en el caso del intervalo de estabilidad relativa, puede no ser un intervalo, sino estar formado por una unión de intervalos.

14.4.3. Estabilidad absoluta de los métodos lineales multipaso en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias

Ya se vio en el *capítulo 12* que para estudiar un sistema dinámico de ecuaciones diferenciales, éste se podía linealizar, y estudiar el sistema lineal asociado: $y' = A(x) \cdot y + b(x)$, que a su vez se puede aproximar, de manera similar al caso escalar, por un sistema de la forma $y' = A \cdot y$.

Se considera ahora un sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias $y' = A \cdot y$, donde A es una matriz $m \times m$ de coeficientes constantes, con m autovalores λ_s distintos entre sí, para $s = 1, \dots, m$.

Al aplicarle la fórmula numérica:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot z_{n+j} = h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j \cdot f_{n+j}$$

se tiene:

$$\sum_{j=0}^k (\alpha_j \cdot I - h \cdot \beta_j \cdot A) \cdot z_{n+j} = 0, \quad (14.4.1)$$

donde I representa la matriz identidad y z_{n+j} son vectores.

Sea $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, con $|P| \neq 0$ y D una matriz diagonal cuyos elementos son los autovalores λ_s . Al sustituir en la ecuación se tiene:

$$P \cdot \sum_{j=0}^k (\alpha_j \cdot I - h \cdot \beta_j \cdot D) \cdot P^{-1} \cdot z_{n+j} = 0 \Rightarrow P \cdot \sum_{j=0}^k (\alpha_j \cdot I - h \cdot \beta_j \cdot D) \cdot z_{n+j}^* = 0$$

donde $z_{n+j}^* = P^{-1} \cdot z_{n+j}$. Al ser D una matriz diagonal, la expresión anterior da lugar a las m ecuaciones escalares:

$$\sum_{j=0}^k (\alpha_j - h \cdot \beta_j \cdot \lambda_s) \cdot z_{n+j}^* = 0, \quad s = 1, \dots, m.$$

Llamando $h \cdot \lambda_s = \bar{h}$ cada una de las ecuaciones anteriores se convierte en una ecuación similar a la del caso escalar. El problema es, como en el caso escalar, buscar los valores de \bar{h} para los que las raíces \bar{r}_i del polinomio de estabilidad del método tengan módulo menor que 1.

Ahora los valores de los λ_s pueden ser complejos, con lo cual \bar{h} puede también tomar valores complejos; tiene entonces sentido hablar de región de estabilidad absoluta asociada al método numérico, contenida en el plano complejo, cuya intersección con el eje real debe coincidir con el intervalo de estabilidad absoluta del método.

En el *ejemplo 14.4.3* se muestra una fórmula que permite calcular en la práctica la frontera de la región de estabilidad absoluta de un método numérico. Una vez conocida la frontera, se toma como región de estabilidad absoluta del método la que contiene al intervalo de estabilidad absoluta.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 14.4.1: Estudiar el intervalo de estabilidad absoluta de:

- El método de Euler
 - El método de Adams-Bashforth de dos pasos
 - El método de Adams-Moulton de dos pasos
- a) El método de Euler es:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot f_n$$

que al sustituir la ecuación de prueba $y' = \lambda y$ se obtiene que: $r(\bar{h}) = 1 + \bar{h}$ y al imponer que $|r(\bar{h})| < 1 \Rightarrow |1 + \bar{h}| < 1 \Rightarrow -1 < 1 + \bar{h} < 1 \Rightarrow -2 < \bar{h} < 0$, por lo que el intervalo de estabilidad absoluta es: $(-2, 0)$.

- b) El método de Adams-Bashforth de dos pasos es:

$$z_{n+2} - z_{n+1} = \frac{h}{2}(3f_{n+1} - f_n)$$

por lo que su polinomio de estabilidad absoluta es:

$$\pi(r, \bar{h}) = r^2 - \left(1 + \frac{3}{2}\bar{h}\right) \cdot r + \frac{1}{2}\bar{h} \text{ de raíces } r_j(\bar{h}) = \frac{1 + \frac{3}{2}\bar{h} \pm \sqrt{\frac{9}{4}\bar{h}^2 + \bar{h} + 1}}{2}$$

siendo la raíz principal r_1 la raíz que corresponde al signo positivo y la raíz parásita r_2 la correspondiente al signo negativo. Se verifica que $|r_1(\bar{h})| < 1$ si $\bar{h} < 0$ y $|r_2(\bar{h})| < 1$ si $-1 < \bar{h}$, por lo que el intervalo de estabilidad absoluta

es la intersección de ambos: $(-\infty, 0) \cap (-1, +\infty) = (-1, 0)$.

c) El método de Adams-Moulton de dos pasos es:

$$z_{n+2} - z_{n+1} = \frac{h}{12} \cdot (5f_{n+2} + 8f_{n+1} - f_n)$$

por lo que su polinomio de estabilidad absoluta es:

$$\pi(r, \bar{h}) = \left(1 - \frac{5}{12} \bar{h}\right) \cdot r^2 - \left(1 + \frac{8}{12} \bar{h}\right) \cdot r + \frac{1}{12} \bar{h}$$

cuyas raíces verifican que su módulo es menor que 1 si $\bar{h} < 0$; el intervalo de estabilidad absoluta es pues: $(-\infty, 0)$.

En este ejemplo se comprueba que para el método de *Euler* el intervalo de estabilidad absoluta es $(-2, 0)$. En general, a igual orden de consistencia, es preferible un método con una región de estabilidad absoluta mayor. Por esta razón los métodos de *Adams-Moulton* son preferibles a los de *Adams-Bashforth* pues los primeros tienen una región de estabilidad absoluta mayor. Por ejemplo, el método de *Adams-Bashforth* de orden 2 tiene como intervalo de estabilidad absoluta a $(-1, 0)$ mientras que el método de *Adams-Moulton* del mismo orden lo tiene de $(-\infty, 0)$.

Ejemplo 14.4.2: Estudiar el intervalo de estabilidad absoluta y relativa de los siguientes métodos:

a) El método: $z_{n+1} - z_n = \frac{h}{2} \cdot (f_{n+1} + f_n)$

b) El método: $z_{n+2} - 4z_{n+1} + 3z_n = -2h \cdot f_n$

c) El método: $z_{n+2} - z_n = 2h \cdot f_{n+1}$

d) El método: $z_{n+2} - z_n = \frac{h}{3} \cdot (f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n)$

a) Al aplicar el método $z_{n+1} - z_n = \frac{h}{2} \cdot (f_{n+1} + f_n)$ a la ecuación de prueba se obtiene:

$$\left(1 - \frac{1}{2} \bar{h}\right) \cdot z_{n+1} - \left(1 + \frac{1}{2} \bar{h}\right) \cdot z_n$$

y el polinomio de estabilidad absoluta:

$$\pi(r, \bar{h}) = \left(1 - \frac{1}{2} \bar{h}\right) \cdot r - \left(1 + \frac{1}{2} \bar{h}\right) \Rightarrow \pi(r, \bar{h}) = 0 \text{ si } r = \frac{1 + \frac{\bar{h}}{2}}{1 - \frac{\bar{h}}{2}}$$

El método es absolutamente estable si $\bar{h} \in (-\infty, 0)$. Como sólo existe la raíz principal la estabilidad relativa coincide con la estabilidad absoluta.

En los métodos de un paso coinciden la región de estabilidad absoluta con la región de estabilidad relativa.

b) Al aplicar el método $z_{n+2} - 4z_{n+1} + 3z_n = -2h \cdot f_n$ de dos pasos a la ecuación de prueba da como resultado el polinomio de estabilidad absoluta: $\pi(r, \bar{h}) = r^2 - 4r + (3 + 2\bar{h})$ de raíces: $r_j(\bar{h}) = 2 \pm \sqrt{1 - 2\bar{h}}$ siendo la raíz principal r_1 la raíz que corresponde al signo negativo y la raíz parásita r_2 la

correspondiente al signo positivo. Para todo valor de \bar{h} la raíz parásita tiene su módulo mayor que 1, luego los intervalos de estabilidad absoluta y de estabilidad relativa son el conjunto vacío. El método no es estable pues las raíces del polinomio de estabilidad son 1 y 3, y esta última tiene su módulo mayor que 1.

- c) Al aplicar el método $z_{n+2} - z_n = 2h \cdot f_{n+1}$ a la ecuación de prueba se obtiene el polinomio de estabilidad absoluta:

$\pi(r, \bar{h}) = r^2 - 2\bar{h} \cdot r - 1$ de raíces: $r_j(\bar{h}) = \bar{h} \pm \sqrt{\bar{h}^2 + 1}$ siendo la raíz principal r_1 la raíz que corresponde al signo positivo y la raíz parásita r_2 la correspondiente al signo negativo. Si $\bar{h} > 0$ entonces $|r_1(\bar{h})| > 1$ y si $\bar{h} < 0$ entonces $|r_2(\bar{h})| > 1$, por lo que el intervalo de estabilidad absoluta es el conjunto vacío, ya que para todo valor de \bar{h} una de las dos raíces tiene su módulo mayor que 1.

Para estudiar la estabilidad relativa se buscan los valores de \bar{h} donde $|r_2(\bar{h})| < |r_1(\bar{h})|$ dibujando la gráfica de las funciones y se observa que se verifica si $\bar{h} > 0$, por lo que para $\bar{h} > 0$, hay estabilidad relativa siendo el intervalo de estabilidad relativa $(0, +\infty)$.

- d) El método: $z_{n+2} - z_n = \frac{h}{3}(f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n)$ tiene como polinomio

de estabilidad absoluta:

$$\pi(r, \bar{h}) = \left(1 - \frac{1}{3} \bar{h}\right) \cdot r^2 - \frac{4}{3} \bar{h} r - \left(1 + \frac{1}{3} \bar{h}\right)$$

de raíces: $r_j(\bar{h}) = \frac{2}{3} \bar{h} \pm \sqrt{\frac{1}{3} \bar{h}^2 + 1}$ siendo la raíz principal r_1 la raíz que corresponde al signo positivo y la raíz parásita r_2 la correspondiente al signo negativo.

Para todo valor de \bar{h} una de las dos raíces tiene su módulo mayor que 1, por lo que el método no es absolutamente estable para ningún \bar{h} y la región de estabilidad absoluta es el conjunto vacío.

Para estudiar la estabilidad relativa se buscan los valores de \bar{h} donde se verifica que $|r_2(\bar{h})| < |r_1(\bar{h})|$ dibujando la gráfica de las funciones, y se observa que se verifica si $\bar{h} > 0$, por lo que para $\bar{h} > 0$ hay estabilidad relativa siendo el intervalo de estabilidad relativa $(0, +\infty)$.

Ejemplo 14.4.3: Demostrar que los puntos, \bar{h}^* , de la frontera de la región de estabilidad absoluta del método:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot z_{n+j} = h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j \cdot f(x_{n+j}, z_{n+j}),$$

verifican que:

$$\bar{h}^* = \frac{\sum_{j=0}^k \alpha_j (e^{i\theta})^j}{\sum_{j=0}^k \beta_j (e^{i\theta})^j}.$$

El polinomio de estabilidad absoluta de dicho método es:

$$\pi(r, \bar{h}) = \sum_{j=0}^k (\alpha_j - \bar{h} \beta_j) \cdot r(\bar{h})^j$$

y se buscan los valores de \bar{h} que hacen que las raíces $r_j(\bar{h})$ sean tales que verifiquen: $|r_j(\bar{h})| < 1$.

Los puntos de la frontera, \bar{h}^* , verificarán que $|r_j(\bar{h}^*)| = 1$, por lo que $r_j(\bar{h}^*) = m \cdot e^{i\theta} = e^{i\theta}$ y al sustituir en el polinomio e igualar a cero si se sustituye \bar{h} por \bar{h}^* , se obtiene:

$$\pi(r, \bar{h}^*) = 0 = \sum_{j=0}^k (\alpha_j - \bar{h}^* \beta_j) \cdot (e^{i\theta})^j.$$

Despejando se tiene la expresión pedida:
$$\bar{h}^* = \frac{\sum_{j=0}^k \alpha_j (e^{i\theta})^j}{\sum_{j=0}^k \beta_j (e^{i\theta})^j}.$$

Ejemplo 14.4.4: Encontrar la región de estabilidad absoluta del método de Euler.

El método de Euler es:

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot f_n$$

por lo que los puntos de la frontera de su región de estabilidad absoluta

$$\text{verifican que: } \bar{h}^* = x + i \cdot y = \frac{\sum_{j=0}^k \alpha_j (e^{i\theta})^j}{\sum_{j=0}^k \beta_j (e^{i\theta})^j} = \frac{e^{i\theta} - 1}{1} = \cos \theta + i \cdot \text{sen } \theta - 1 \Rightarrow x =$$

$\cos \theta - 1$; $y = \text{sen } \theta$. Eliminando el ángulo se tiene: $(x + 1)^2 + y^2 = 1$ por lo que la frontera de la región de estabilidad absoluta es la circunferencia de centro $(-1, 0)$ y radio 1. En el *ejemplo 14.4.1* se comprobó que el intervalo de estabilidad absoluta de dicho método es $(-2, 0)$, por lo que la región de estabilidad absoluta es el interior de dicha circunferencia, siendo el intervalo de estabilidad absoluta su intersección con el eje real.

Por tanto la región de estabilidad absoluta del método de Euler es:

$$A = \{\bar{h} = x + i \cdot y \in \mathbf{C}; (x + 1)^2 + y^2 < 1\} = \{\bar{h} \in \mathbf{C}; |\bar{h} + 1| < 1\}.$$

Ejercicios

14.20. Encontrar la región de estabilidad absoluta del método

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot f_{n+1}.$$

(Solución: $A = \{z \in \mathbf{C}; |z + 1| > 1\}$).

14.21. Determinar los intervalos de estabilidad absoluta y relativa del método:

$$z_{n+2} - \frac{2}{3}z_{n+1} - \frac{1}{3}z_n = h(f_{n+1} + \frac{1}{3}f_n)$$

14.22. Determinar los tamaños de paso que permitan asegurar que al aplicar el método $z_{n+2} - z_n = h \cdot (-3f_{n+1} + 5f_n)$ al problema $y' = 3y + x^2$, $y(0) = 1$, se tiene estabilidad absoluta.

14.23. Determinar los tamaños de paso que permitan asegurar que al aplicar el método $z_{n+2} - z_n = h \cdot (-3f_{n+1} + 5f_n)$ al problema $y' = 3y + x^2$, $y(0) = 1$, se tiene estabilidad relativa.

14.24. Determinar los intervalos de estabilidad absoluta y relativa del método:

$$z_{n+2} - \frac{4}{3}z_{n+1} + \frac{1}{3}z_n = \frac{2}{3}hf_n$$

14.25. Determinar los tamaños de paso que permitan asegurar

que al aplicar el método $z_{n+2} - \frac{4}{3}z_{n+1} + \frac{1}{3}z_n = \frac{2}{3}h \cdot f_n$ al problema

$y' = -4y + e^{x^2}$, $y(0) = 0$, $x > 0$, se tiene estabilidad absoluta.

(Solución: Intervalo de estabilidad absoluta: $[-\frac{1}{6}, 0)$, $\lambda = -4 \Rightarrow h \in (0, \frac{1}{24})$.)

14.5. OTROS MÉTODOS DE k PASOS

Se han utilizado otras fórmulas y otros métodos numéricos lineales de k pasos, como los métodos de *Nyström*, los de *Milne-Simpson* y los métodos de *Milne*. Estos métodos actualmente están en desuso debido a los problemas de estabilidad que plantean. Otros métodos que se estudian en esta sección son los métodos de predicción-corrección, y se comenta algo sobre métodos de paso variable o los métodos adecuados para problemas *stiff*.

14.5.1. Métodos de Nyström y de Milne-Simpson

Los métodos de Nyström y Milne-Simpson son fórmulas de k pasos que tienen como primer polinomio característico $\rho(r) = r^k - r^{k-2}$, es decir, son de la forma:

$$z_{n+k} - z_{n+k-2} = h \cdot \sum_{j=0}^k \beta_j \cdot f_{n+j}.$$

Las fórmulas que siguen son ejemplos de ellos.

Métodos de *Nyström*:

El método: $z_{n+2} - z_n = 2h \cdot f_{n+1}$ (Regla del punto medio).

El método: $z_{n+3} - z_{n+1} = \frac{h}{3} \cdot (7f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n)$

... ..

Métodos de *Milne-Simpson*:

El método: $z_{n+2} - z_n = 2h \cdot f_{n+2}$

El método: $z_{n+2} - z_n = \frac{h}{3}(f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n)$ (Regla de Simpson)

El método: $z_{n+3} - z_{n+1} = \frac{h}{3} \cdot (f_{n+3} + 4f_{n+2} + f_n)$

... ..

Los métodos de Nyström son explícitos mientras que los métodos de Milne-Simpson son implícitos. Se construyen de forma similar a los métodos de Adams, integrando un polinomio interpolador, pero ahora el incremento que se utiliza es $2h$.

14.5.2. Métodos predictor-corrector

Los métodos implícitos tienen la dificultad de tener que resolver una ecuación implícita de la forma: $z_{n+k} = h \cdot \beta_k \cdot f(x_{n+k}, z_{n+k}) + g$ donde g es una función previamente computada. Si la fórmula es no lineal es necesario evaluar z_{n+k} mediante un método aproximado. Si la función f es lipschiziana respecto de la segunda variable y la constante de *Lipschitz* L es moderada se suele utilizar el método del punto fijo, y si la constante de Lipschitz es muy grande, lo que ocurre con los problemas “*stiff*”, se suele utilizar el método de

Newton.

Ya se estudió en el capítulo anterior algún método implícito como: $z_{n+1} = z_n + (h/2) \cdot (f(x_n, z_n) + f(x_{n+1}, z_{n+1}))$ cuyo error de truncamiento es del orden de $O(h^3)$, donde se observa que z_{n+1} aparece en el segundo miembro de la igualdad y se debe despejar, lo que usualmente puede ser difícil, con lo que se aproxima, bien mediante iteraciones del punto fijo, o haciendo una predicción por medio de la fórmula de *Euler*.

Para subsanar la dificultad de evaluar z_{n+k} se usan los métodos de **predicción-corrección**. La idea del par predictor-corrector se basa en la observación de que en un método implícito se deben resolver en cada paso un sistema de ecuaciones algebraicas. Si para resolver dicho sistema se utiliza el teorema de la iteración del punto fijo basta tomar h suficientemente pequeño para garantizar la convergencia cualesquiera que sean las condiciones iniciales. Pero sin embargo se pueden ahorrar un buen número de iteraciones tomando un valor próximo a la solución, por lo que parece adecuado evitar la iteración y tomar en su lugar el valor obtenido con el método explícito.

Los métodos de **predicción-corrección** combinan en cada paso una fórmula explícita para *predecir* un valor de la solución y una fórmula implícita para *corregirlo*.

Los métodos de **predicción-corrección** mas utilizados son los métodos de *Adams-Bashforth-Moulton* (ABM). Se usan simultáneamente dos fórmulas, generalmente con el mismo orden de convergencia, una explícita o

de tipo abierto que se llama **predictora**, y otra implícita o de tipo cerrado que se llama **correctora**. La fórmula correctora suele ser más precisa que la predictora, aunque se elijan con error de truncamiento del mismo orden. Por ejemplo con la fórmula de *Adams-Moulton* de tres pasos como correctora se utiliza como predictora la fórmula de *Adams-Bashforth* de cuatro pasos. Ambas fórmulas son convergentes de orden cuatro.

Para obtener el valor aproximado z_{n+1} a partir de un valor z_n calculado previamente, mediante un par predictor-corrector, se procede de la siguiente forma:

- Se *predice* un valor $z_{n+1}^{[0]}$, obtenido aplicando la fórmula explícita (P).
- Se *evalúa* la función: $f_{n+1}^{[0]} = f(x_{n+1}, z_{n+1}^{[0]})$ (E).
- Se *corrige* el valor $z_{n+1}^{[0]}$ mediante la fórmula implícita, obteniéndose una nueva aproximación $z_{n+1}^{[1]}$ (C).
- Se *evalúa* de nuevo la función: $f_{n+1}^{[1]} = f(x_{n+1}, z_{n+1}^{[1]})$ (E).

Se puede tomar $z_{n+1} = z_{n+1}^{[1]}$ como valor definitivo de la etapa $n + 1$ y comenzar de nuevo el proceso para obtener el valor de z_{n+2} a partir de z_{n+1} . Este proceso se suele denotar como PECE, y es la forma más utilizada en los métodos predictor-corrector. Pero también se puede mejorar el valor $z_{n+1}^{[1]}$ antes de pasar a la etapa siguiente, añadiendo un número determinado de veces, m , los dos últimos pasos

- Se *corrige* el valor $z_{n+1}^{[1]}$ mediante la fórmula implícita,

obteniéndose una nueva aproximación $z_{n+1}^{[2]}$ (C).

➤ Se evalúa de nuevo la función: $f_{n+1}^{[2]} = f(x_{n+1}, z_{n+1}^{[2]})$ (E).

El proceso se denota en este caso como PE(CE)^m.

Observación:

La razón por la que se suelen tomar dos métodos de Adams con el mismo orden de convergencia es que en esta situación los cálculos se simplifican. En efecto, si el orden de convergencia de los métodos es $p = k$, el valor de $z_{n+1}^{[0]}$ se obtiene a partir de la fórmula explícita de Adams-Bashforth de k pasos: $z_{n+1}^{[0]} = z_n + h[\gamma_0 \cdot \nabla^0 + \gamma_1 \cdot \nabla^1 + \dots + \gamma_{k-1} \cdot \nabla^{k-1}]f_n$, mientras que la fórmula implícita es la de Adams-Moulton de $k - 1$ pasos, que se puede expresar de la forma:

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= z_n + h[\gamma_0 \cdot \nabla^0 + \gamma_1 \cdot \nabla^1 + \dots + \gamma_{k-2} \cdot \nabla^{k-2}]f_n + \gamma_{k-1} \cdot h \cdot \nabla^{k-1} f_{n+1} = \\ & z_n + h[\gamma_0 \cdot \nabla^0 + \dots + \gamma_{k-2} \cdot \nabla^{k-2} + \gamma_{k-1} \cdot \nabla^{k-1}]f_n + \gamma_{k-1} \cdot h \cdot (\nabla^{k-1} f_{n+1} - \nabla^{k-1} f_n) = \\ & z_n + h[\gamma_0 \cdot \nabla^0 + \gamma_1 \cdot \nabla^1 + \dots + \gamma_{k-1} \cdot \nabla^{k-1}]f_n + \gamma_{k-1} \cdot h \cdot \nabla^k f_{n+1} = z_{n+1}^{[0]} + \gamma_{k-1} \cdot h \cdot \nabla^k f_{n+1}. \end{aligned}$$

Se tiene entonces que:

$$z_{n+1}^{[1]} = z_{n+1}^{[0]} + \gamma_{k-1} \cdot h \cdot \nabla^k f_{n+1},$$

con lo que se simplifica el proceso.

El orden de consistencia de un par predictor-corrector implementado como PE(CE)^m depende del orden de consistencia de los métodos que forman el par y del valor de m . En este sentido se puede demostrar que si el

orden de convergencia del método predictor es mayor o igual que el del método corrector, el par predictor-corrector tiene el mismo orden de convergencia y el mismo error de truncamiento que la fórmula correctora.

El error de truncamiento de un método lineal multipaso con orden de convergencia p viene dado por la expresión:

$$T_{n+k} = C_{p+1} \cdot h^{p+1} \cdot y^{(p+1)}(x_n) + O(h^{p+2}).$$

La estimación del error de truncamiento presenta la dificultad de tener que estimar numéricamente $y^{(p+1)}(x_n)$. Los métodos de predicción corrección, en el caso en que ambos métodos (implícito y explícito) sean del mismo orden tienen la ventaja adicional de que se puede estimar la parte principal del error de truncamiento sin necesidad de calcular $y^{(p+1)}(x_n)$ mediante la estimación de *Milne*. La idea es la siguiente.

Se considera un método predictor-corrector de la forma PE(CE)^m. Sean T_{n+k}^* y T_{n+k} los errores de truncamiento correspondientes a los métodos explícito e implícito, respectivamente, que tienen un orden de convergencia p . Se tiene entonces:

$$T_{n+k}^* = C_{p+1}^* \cdot h^{p+1} \cdot y^{(p+1)}(x_n) + O(h^{p+2}) = y(x_{n+k}) - \bar{z}_{n+k}^{[0]}.$$

$$T_{n+k} = C_{p+1} \cdot h^{p+1} \cdot y^{(p+1)}(x_n) + O(h^{p+2}) = y(x_{n+k}) - \bar{z}_{n+k}^{[m]}.$$

Las expresiones $\bar{z}_{n+k}^{[0]}$ y $\bar{z}_{n+k}^{[m]}$ representan los valores obtenidos al aplicar las correspondientes fórmulas numéricas en el paso $n + k$, suponiendo que los valores de partida son exactos. Restando ambas

expresiones se tiene:

$$(C_{p+1}^* - C_{p+1}) \cdot h^{p+1} \cdot y^{(p+1)}(x_n) = \bar{z}_{n+k}^{[m]} - \bar{z}_{n+k}^{[0]} + O(h^{p+2}).$$

Si ahora se despeja :

$$h^{p+1} \cdot y^{(p+1)}(x_n) = \frac{1}{C_{p+1}^* - C_{p+1}} (\bar{z}_{n+k}^{[m]} - \bar{z}_{n+k}^{[0]}) + O(h^{p+2}),$$

se tiene así una estimación de $h^{p+1} \cdot y^{(p+1)}(x_n)$. El error de truncamiento del par predictor-corrector, que coincide con el de la fórmula correctora se puede expresar entonces de la forma:

$$T_{n+k} = \frac{C_{p+1}}{C_{p+1}^* - C_{p+1}} (\bar{z}_{n+k}^{[m]} - \bar{z}_{n+k}^{[0]}) + O(h^{p+2}).$$

Si se comparan los métodos *Runge-Kutta* con los métodos multipaso se observa que los métodos *Runge-Kutta* consiguen mejorar la aproximación eliminando la linealidad. En ellos es difícil saber cuando se debe cambiar la longitud de paso pues la estructura del error de truncamiento es complicada, pero sin embargo es fácil cambiarlo. Mientras que en los métodos lineales multipaso es fácil controlar el error de truncamiento, y por tanto decidir cuando se debe cambiar el paso, y sin embargo es complicado cambiarlo.

Los métodos de predicción-corrección tienen pues la ventaja fundamental de que es muy sencillo estimar el error de truncamiento, lo que se puede utilizar para ajustar el tamaño del paso. Un inconveniente es que cualquier cambio en el tamaño del paso h conlleva un coste en el número de cálculos. Pero existen estrategias de paso variable que, almacenando

valores previos de la función, resultan eficientes.

14.5.3. Métodos multipaso de tamaño de paso variable

Existen algoritmos que utilizan una fórmula de *Adams-Moulton* como correctora y otra de *Adams-Bashforth* como predictora y calculan una estimación del error, que cuando indica que el tamaño de paso es demasiado grande, se reemplaza este por la mitad y si el error es demasiado pequeño se reemplaza por un tamaño de paso doble, diciéndose entonces que se utiliza un **método de paso variable**. La utilización de métodos de predicción-corrección de paso variable requiere tener un buen método para obtener los valores iniciadores, y métodos para reducir a la mitad el intervalo o para doblarlo, lo que aumenta la complejidad de computación.

Un algoritmo predictor-corrector de *Adams* con tamaño de paso variable se encuentra en *Burden&Faires*⁷. Una mayor información sobre algoritmos de paso variable para estos métodos se puede obtener en el libro de *J. D. Lambert*⁸.

Los métodos lineales multipaso pueden formularse mediante matrices definidas por columnas, y las relaciones entre las columnas se conocen como forma de *Nordsieck*, en la que el cambio de paso es sencillo, no así el cambio de orden.

⁷ Burden, R. L.; Faires, J. D. (1996): *Análisis Numérico*. Grupo Editorial Iberoamericano. (2ª edición). 275-277.

⁸ J. D. Lambert, *Numerical methods for ordinary differential systems: the initial value problem*, J. Wiley, 1991.

Es posible también introducir otros algoritmos que permitan **modificar la longitud de paso**, lo que es un ingrediente clave en la eficiencia del método. Mediante la extrapolación de *Richardson* (estudiada en el capítulo anterior) se puede calcular una cantidad que permite obtener una aproximación de un orden mayor, y que se puede utilizar para ajustar la longitud de paso. Pero es un procedimiento costoso, con lo que pueden buscarse otras alternativas de razonamiento.

La experiencia demuestra que no se deben efectuar cambios de paso con excesiva frecuencia, siendo aconsejable modificar el tamaño de paso tras al menos $k - 1$ pasos con un mismo valor h .

14.5.4. Problemas “*stiff*”

Existen problemas de valor inicial de un determinado tipo, los **problemas “*stiff*” o sistemas rígidos**, para los que muchos métodos multipaso con buenas propiedades de convergencia, como los métodos de *Adams*, son en general ineficaces. Existen distintas definiciones para describir este tipo de problemas.

Lambert⁹, trata sobre el fenómeno de la “*stiffness*”, ya que en su opinión es más un fenómeno que una propiedad, en el sentido de que no se puede describir en términos matemáticos precisos, y presenta diferentes

⁹ J. D. Lambert, Numerical methods for ordinary differential systems: the initial value problem, J. Wiley, 1991.

definiciones en función de los distintos aspectos cualitativos que muestra un problema *stiff*.

En general, se puede decir que se engloban bajo esta denominación aquellos problemas cuyas soluciones experimentan cambios bruscos en intervalos de pequeña longitud, o aquellos en los que la solución exacta del problema consta de un término estacionario que no varía significativamente con el tiempo, junto con un término transitorio que decaiga rápidamente a cero.

Estos problemas aparecen en diversas situaciones de interés como en la cinética química con reacciones muy rápidas, reacciones nucleares o fotodisociación, en circuitos eléctricos con los transistores de alta velocidad y en sistemas amortiguados de resortes.

Para la resolución numérica de estos métodos se requieren unos métodos lineales de k pasos implícitos específicos, que se conocen como **métodos de diferenciación regresiva** o métodos **BDF**, y son tales que su segundo polinomio característico es de la forma $\sigma(r) = \beta_k \cdot r^k$, por lo que tienen

la forma:
$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \cdot z_{n+j} = h \cdot \beta_k \cdot f_{n+k}.$$
 Los coeficientes α_j y el coeficiente β_k se

deducen partiendo del polinomio interpolador $P_k(x)$ que pase por $(x_n, z_n), \dots, (x_{n+k}, z_{n+k})$ e imponiendo que $P'_k(x_{n+k}) = f(x_{n+k}, z_{n+k})$. Presentan la ventaja del tamaño de su región de estabilidad absoluta. Se utilizan siempre métodos de orden a lo sumo seis, ya que en éstos la región de estabilidad absoluta contiene a todo el semieje real negativo. La idea de predictor-corrector aquí

no es adecuada, por lo que se usa el método de *Newton* para obtener las sucesivas aproximaciones de z_{n+1} .

Ejemplos resueltos

Ejemplo 14.5.1: Utilizar el método de Adams-Bashforth de dos pasos como predictor y el de Adams-Moulton de un paso como corrector, un tamaño de paso $h = 0,2$ y como valores iniciadores los proporcionados por Runge-Kutta 4, para aproximar el valor $y(0,8)$ de la solución de $y' = x + y - 1$, $y(0) = 1$. Utilizar las fórmulas de dichos métodos

$$a) z_{n+1}^{[0]} = z_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1}); z_{n+1}^{[1]} = z_n + \frac{h}{2}(f_{n+1}^{[0]} + f_n).$$

b) Resolver el problema utilizando las fórmulas de dichos métodos dadas mediante las tablas de diferencias regresivas: $z_{n+1}^{[0]} = z_n + h(\nabla^0 + \frac{1}{2}$

$$\nabla^1)f_n; z_{n+1}^{[1]} = z_{n+1}^{[0]} + \frac{1}{2}\nabla^2f_{n+1}.$$

a) Se utiliza el método de Adams-Bashforth de dos pasos como predictor: $z_{n+1}^{[0]} = z_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1})$. Se denomina $f_{n+j}^{[0]} = f(x_{n+j}, z_{n+j}^{[0]})$. Se

utiliza el método de Adams-Moulton de un paso como corrector: $z_{n+1}^{[1]} = z_{n+1}^{[0]} + \frac{1}{2}\nabla^2f_{n+1}$.

Se calculan los valores iniciadores usando el método de Runge-Kutta:

$$x_0 = 0; z_0 = y_0 = 1; f(x, z) = x + z - 1 \Rightarrow f(x_0, z_0) = f(0, 1) = 0,$$

$$z_1 = z_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \text{ siendo } k_1 = f(x_0, z_0) = 0; k_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, z_0 + \frac{h}{2} k_1\right) = 0,1; k_3 = 0,11; k_4 = 0,222 \Rightarrow z_1 = 1,0214.$$

$$z_0 + \frac{h}{2} k_1) = 0,1; k_3 = 0,11; k_4 = 0,222 \Rightarrow z_1 = 1,0214.$$

$$z^{[0]}_2 = z_1 + \frac{h}{2}(3f_1 - f_0) \text{ con } f(x, z) = x + z - 1, f_0 = f(x_0, z_0) = f(0, 1) = 0; f_1$$

$$= f(x_1, z_1) = f(0,2, 1,0214) = 0,2214 \Rightarrow z^{[0]}_2 = 1,0214 + 0,1 \cdot (3 \cdot 0,2214 - 0) = 1,08782 \text{ que es el valor predictor.}$$

$$f^{[0]}_2 = f(x_2, z^{[0]}_2) = f(0,4, 1,08782) = 0,4 + 1,08782 - 1 = 0,48782.$$

Utilizando el método de Adams-Moulton de tres pasos como corrector:

$$z^{[1]}_2 = z_1 + \frac{h}{2}(f^{[0]}_2 + f_1) = 1,0214 + 0,1 \cdot (0,48782 + 0,2214) = 1,092322.$$

$$f^{[1]}_2 = f(x_2, z^{[1]}_2) = f(0,4, 1,092322) = 0,492322.$$

Se repite el proceso:

$$z^{[0]}_3 = z_2 + \frac{h}{2} \cdot (3f_2 - f_1) = 1,092322 + 0,1 \cdot (3 \cdot 0,492322 - 0,2214) =$$

1,2178786.

$$f^{[0]}_3 = f(x_3, z^{[0]}_3) = f(0,6, 1,2178786) = 0,8178786.$$

$$z^{[1]}_3 = z^{[1]}_2 + \frac{h}{2} \cdot (f^{[0]}_3 + f^{[1]}_2) = 1,092322 + 0,1 \cdot (0,8178786 + 0,492322) =$$

1,22334206.

$$f^{[1]}_3 = f(x_3, z^{[1]}_3) = f(0,6, 1,22334206) = 0,82334206.$$

Se repite el proceso:

$$z_{4}^{[0]} = z_{3}^{[1]} + \frac{h}{2} \cdot (3f_{3}^{[1]} - f_{2}^{[1]}) = 1,22334206 + 0,1 \cdot (3 \cdot 0,82334206 - 0,492322) = 1,421112478.$$

$$f_{4}^{[0]} = f(x_3, z_{4}^{[0]}) = f(0,8, 1,421112478) = 1,221112478.$$

$$z_{4}^{[1]} = z_{3}^{[1]} + \frac{h}{2} (f_{4}^{[0]} + f_{3}^{[1]}) = 1,22334206 + 0,1 \cdot (1,221112478 + 0,82334206) = \mathbf{1,4277875138} = z(0,8).$$

b) Utilizar las fórmulas de dichos métodos dadas mediante las tablas de diferencias regresivas:

$$z_{n+1}^{[0]} = z_n^{[1]} + h \cdot (\nabla^0 + \frac{1}{2} \nabla^1) f_n^{[1]};$$

$$z_{n+1}^{[1]} = z_{n+1}^{[0]} + \frac{1}{2} \nabla^2 f_{n+1}^{[0]}.$$

La forma usual de organizar estos cálculos es utilizando una hoja de cálculo, con lo que es posible simplificar el proceso, de forma similar al ejemplo 14.2.4.

Al utilizar las fórmulas:

$$z_{n+1}^{[0]} = z_n^{[1]} + h \cdot (\nabla^0 + \frac{1}{2} \nabla^1) f_n^{[1]};$$

$$z_{n+1}^{[1]} = z_{n+1}^{[0]} + \frac{1}{2} \nabla^2 f_{n+1}^{[0]}$$

se obtiene:

n	$x_n = x_0 + h \cdot n$	$z^{[0]}_n$	$f^{[0]}_n$	$z^{[1]}_n$	$f^{[1]}_n$
0	0	1	0	1	0
1	0,2	1,0214	0,2214	1,0214	0,2214
2	0,4	1,08782	0,48782	1,092322	0,492322
3	0,6	1,2178786	0,8178786	1,22334206	1,22334206
4	0,8	1,421112478	1,221112478	1,42971758	1,42778714

Para obtener las diferencias que se utilizan en las fórmulas se construyen las siguientes tablas:

	$f^{[0]}_n$	$\nabla^1 f^{[0]}_n$	$\nabla^2 f^{[0]}_n$
$f^{[0]}_0$	0		
$f^{[0]}_1$	0,2214	0,2214	
$f^{[0]}_2$	0,48782	0,26642	0,04502 = $\nabla^2 f^{[0]}_2$

$$z^{[1]}_2 = z^{[0]}_2 + \frac{1}{2} \nabla^2 f^{[0]}_2 = 1,08782 + \frac{1}{2} 0,04502 = 1,092322.$$

	$\nabla^0 f^{[1]}_n$	$\nabla^1 f^{[1]}_n$	$\nabla^2 f^{[1]}_n$
$f^{[1]}_0$	0		
$f^{[1]}_1$	0,2214	0,2214	
$f^{[1]}_2$	0,492322	0,270922	0,049522

$$z^{[0]}_3 = z^{[1]}_2 + h(\nabla^0 + \frac{1}{2} \nabla^1) f^{[1]}_2 = 1,092322 + 0,2(0,492322 + \frac{1}{2} 0,270922) = 1,2178786.$$

	$\nabla^0 f_n$	$\nabla^1 f_n$	$\nabla^2 f_n$
$f^{[0]}_0$	0		
$f^{[0]}_1$	0,2214	0,2214	
$f^{[1]}_2$	0,492322	0,270922	0,049522
$f^{[0]}_3$	0,8178786	0,3255566	0,0546346 = $\nabla^2 f^{[0]}_3$

$$z^{[1]}_3 = z^{[0]}_3 + \frac{1}{2} \nabla^2 f^{[0]}_3 = 1,2178786 + \frac{1}{2} 0,0546346 = 1,22334206$$

	$\nabla^0 f_n$	$\nabla^1 f_n$	$\nabla^2 f_n$
$f^{[0]}_0$	0		
$f^{[0]}_1$	0,2214	0,2214	
$f^{[1]}_2$	0,492322	0,270922	0,049522
$f^{[1]}_3$	0,82334206 = $\nabla^0 f^{[1]}_3$	0,33102006 = $\nabla^1 f^{[1]}_3$	0,06009806

$$z^{[0]}_4 = z^{[1]}_3 + h(\nabla^0 + \frac{1}{2}\nabla^1)f^{[1]}_3 = 1,22334206 + 0,2(0,82334206 + \frac{1}{2}$$

$$0,33102006) = 1,421112478.$$

	$\nabla^0 f_n$	$\nabla^1 f_n$	$\nabla^2 f_n$
$f^{[0]}_0$	0		
$f^{[0]}_1$	0,2214	0,2214	
$f^{[1]}_2$	0,492322	0,270922	0,049522
$f^{[1]}_3$	0,82334206	0,33102006	0,06009806
$f^{[0]}_4$	1,22111248	0,39777042	0,06675036 = $\nabla^2 f^{[0]}_4$

$$z^{[1]}_4 = z^{[0]}_4 + \frac{1}{2}\nabla^2 f^{[0]}_4 = 1,421112478 + \frac{1}{2}0,06675036 = 1,42971758.$$

Ejemplo 14.5.2: Utilizar el método de Adams-Bashforth de cuatro pasos como predictor y el de Adams-Moulton de tres pasos como corrector, un tamaño de paso $h = 0,2$ y como valores iniciadores los proporcionados por Runge-Kutta 4, para aproximar $y(0,8)$ de la solución de $y' = x + y - 1$, $y(0) = 1$. Calcular el error global.

Se utiliza el método de Adams-Bashforth de cuatro pasos como predictor: $z^{[0]}_{n+4} = z_{n+3} + \frac{h}{24}(55f_{n+3} - 59f_{n+2} + 37f_{n+1} - 9f_n)$. Se denomina $f^{[0]}_{n+j} = f(x_{n+j}, z^{[0]}_{n+j})$.

Se utiliza el método de Adams-Moulton de tres pasos como corrector:

$$z_{n+3} = z_{n+2} + \frac{h}{24}(9f^{[0]}_{n+3} + 19f_{n+2} - 5f_{n+1} + f_n).$$

Se calculan los valores iniciadores usando el método de Runge-Kutta:

$$x_0 = 0; z_0 = y_0 = 1; f(x, z) = x + z - 1 \Rightarrow f(x_0, z_0) = f(0, 1) = 0,$$

$$z_1 = z_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \text{ siendo } k_1 = f(x_0, z_0) = 0; k_2 = f(x_0 + \frac{h}{2},$$

$$z_0 + \frac{h}{2} k_1) = 0,1; k_3 = 0,11; k_4 = 0,222 \Rightarrow z_1 = 1,0214.$$

$$z_2 = z_1 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \text{ siendo } x_1 = 0,2, k_1 = f(x_1, z_1) = 0,2214;$$

$$k_2 = f(x_1 + \frac{h}{2}, z_1 + \frac{h}{2} k_1) = 0,34354; k_3 = 0,355754; k_4 = 0,4925508 \Rightarrow z_2 = 1,09181796.$$

$$z_3 = z_2 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \text{ siendo } x_2 = 0,4, k_1 = f(x_2, z_2) =$$

$$0,49181796; k_2 = f(x_2 + \frac{h}{2}, z_2 + \frac{h}{2} k_1) = 0,640999756; k_3 = 0,6559179356; k_4 = 0,82300154712 \Rightarrow z_3 = 1,222106456.$$

$$z^{[0]}_4 = z_3 + \frac{h}{24}(55f_3 - 59f_2 + 37f_1 - 9f_0) \text{ con } f(x, z) = x + z - 1, f_0 = f(x_0,$$

$$z_0) = f(0, 1) = 0; f_1 = f(x_1, z_1) = f(0,2, 1,0214) = 0,2214; f_2 = f(x_2, z_2) = f(0,4, 1,09181796) = 0,49181796; f_3 = f(x_3, z_3) = f(0,6, 1,222106456) = 0,6 + 1,222106456 - 1 = 0,822106456 \Rightarrow z^{[0]}_4 = 1,42535975 \text{ que es el valor predictor.}$$

$$f^{[0]}_4 = f(x_4, z^{[0]}_4) = f(0,8, 1,42535975) = 0,8 + 1,42535975 - 1 = 1,22535975.$$

Utilizando el método de Adams-Moulton de tres pasos como corrector:

$$z^{[1]}_4 = z_3 + \frac{h}{24}(9f^{[0]}_4 + 19f_3 - 5f_2 + f_1) = 1,42552788 = z(0,8).$$

La solución exacta es $y(0,8) = e^{0,8} - 0,8 = 1,42554093$.

El error global:

$$e(0,2) = y(0,8) - z(0,8) = 1,42554093 - 1,42552788 = 0,00001305.$$

Ejercicios

- 14.26. Utilizar el método de Adams-Bashforth de cuatro pasos como predictor y el de Adams-Moulton de tres pasos como corrector, un tamaño de paso $h = 0,1$ y como valores iniciadores los proporcionados por Runge-Kutta 4, para aproximar $y(0,5)$ de la solución de $y' = y$, $y(0) = 1$.

(Solución: $z^{[0]}_4 = 1,491820106$; $z^{[1]}_4 = 1,491824539$; $z^{[0]}_5 = 1,648716439$; $z^{[1]}_5 = 1,648721307$).

- 14.27. Obtener el mayor valor del paso h que haga absolutamente estable método $z_{n+1} = z_n + h \cdot f_{n+1}$ para el sistema:

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -15 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

- 14.28. Obtener el mayor valor del paso h que haga absolutamente estable el método $z_{n+1} = z_n + h \cdot f_{n+1}$ para el

sistema:

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & -21 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

14.6. EJERCICIOS

- 14.29. Buscar todos los métodos lineales de un solo paso consistentes.

(Solución: El único explícito es el método de Euler. Implícitos hay infinitos, con $\beta_0 + \beta_1 = 1$)

- 14.30. Obtener un método lineal de dos pasos cuyo error de truncamiento sea cero al aplicarlo a un problema de valor inicial cuya solución exacta sea un polinomio de grado cuatro.

(Solución: $z_{n+2} = z_n + \frac{h}{3}(f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n)$)

- 14.31. Aplicar el método $z_{n+2} = z_n + \frac{h}{3}(f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n)$ al problema $y' = y + x$, $y(0) = 0$, tomando como tamaño de paso h y como $z_0 = 0$ y $z_1 = e^h - h - 1$, para obtener z_2 .

(Solución: $z_2 = \frac{2h(2e^h + h - 2)}{3 - h}$)

- 14.32. Calcular el orden de consistencia del método:

$$z_{n+2} = z_n + 2hf_{n+1}.$$

Aplicar el método al problema de valor inicial $y' = 3x^2$, $y(0) = 0$ y calcular su error de truncamiento.

(Solución: $p = 2$. $T_{n+2} = 2h^3$)

14.33. Estudiar la convergencia del método:

$$z_{n+2} = z_n + h(-f_{n+2} + 4f_{n+1} - f_n).$$

Aplicar el método al problema de valor inicial $y' = x$, $y(0) = -2$, tomando a) como $z_0 = -2$, b) como $z_0 = -2 + h$, y en ambos casos como z_1 el valor obtenido aplicando el método de Taylor de orden dos. Calcular z_n y verificar si coincide con el valor exacto.

(Solución: El método es estable y su orden de consistencia es 2, luego

es convergente. a) $z_n = -2 + \frac{1}{2}h^2n^2$ que coincide con el valor exacto $y =$

$2 + \frac{1}{2}x^2$. b) $z_n = -2 + h + \frac{1}{2}h^2n^2$ que no coincide con el valor exacto).

14.34. Se considera el método implícito: $z_{n+2} = (a + 1)z_n - az_{n+1}$

+ $\frac{h}{4}((3a + 4)f_n + (a + 4)f_{n+2})$. a) Determinar para que valores de a

el método es convergente. b) Calcular a de modo que el orden

de consistencia sea 3. c) Aplicar el método obtenido para $a = 0$,

al problema de valor inicial: $y' = y$, $y(0) = 1$, para obtener el valor

aproximado de la solución en $x = 1$, con $h = 0,2$, y valores

iniciadores $z_0 = z_1 = 1$.

(Solución: a) Convergente si $-2 < a \leq 0$. b) Para $a = -2$ el orden de consistencia es 3, pero no es convergente. c) $z(1) = 2,25$).

14.35. Obtener α y β para que el método: $z_{n+2} - \frac{3}{2}z_{n+1} + \frac{1}{2}z_n =$

$h(\alpha f_{n+1} + \beta f_n)$ tenga orden de consistencia 2. Calcular en función de h el error de truncamiento que se comete en el paso n -ésimo al aplicarlo a $y' = 6x^2 + 2$, $y(0) = 0$.

(Solución: $\alpha = \frac{5}{4}$ y $\beta = -\frac{3}{4}$. $T_{n+k} = \frac{11}{2}h^3$).

14.36. Hallar el método lineal de dos pasos explícito, estable y consistente de mayor orden posible tal que su coeficiente de error sea el menor posible. Estudiar su estabilidad absoluta y relativa.

(Solución: $z_{n+2} = z_n + 2hf_{n+1}$. $C_3 = \frac{1}{3}$. Región de estabilidad absoluta: \emptyset .

Intervalo de estabilidad relativa: $(0, +\infty)$).

14.37. Hallar el método lineal de dos pasos implícito, estable y consistente de mayor orden posible tal que su coeficiente de error sea el menor posible. Estudiar su estabilidad absoluta y relativa.

14.38. Calcular el error de truncamiento en el paso n -ésimo al aplicar el método:

$$z_{n+2} - \frac{1}{2}z_{n+1} - \frac{1}{2}z_n = \frac{h}{8}(-9f_{n+2} + 32f_{n+1} - 11f_n).$$

con un tamaño de paso h al problema: $xy' = 3(y + 1)$, $y(1) = 0$.

(Solución: $T_{n+2} = 6h^3$).

14.39. Estudiar la convergencia del método:

$$z_{n+2} + 4z_{n+1} - 5z_n = h(4f_{n+1} + 2f_n).$$

(Solución: No es estable, por lo que no es convergente).

14.40. a) Estudiar los valores de α que hacen que sea convergente el método: $z_{n+3} - z_{n+1} = h(\alpha f_n - 2\alpha f_{n+1} + (2 + \alpha)f_{n+2})$.

b) Determinar α para que el error de truncamiento que se comete en el paso n -ésimo al aplicarlo a $xy' + y = 4x^3$, $y(1) = 1$ sea $T_n = 2h^3$.

(Solución: El método es convergente para todo α . b) $\alpha = 0$).

14.41. Estudiar la convergencia y los intervalos de estabilidad absoluta y relativa del método:

$$z_{n+2} - \frac{3}{2}z_{n+1} + \frac{1}{2}z_n = \frac{1}{2}hf_n.$$

(Solución: Es convergente. Intervalo de estabilidad absoluta = $(-1, 0)$.

Intervalo de estabilidad relativa: $(-\frac{1}{8}, +\infty)$).

14.42. Deducir desde la expresión de las fórmulas de Adams-

Moulton: $z_{n+1} = z_n + h[\gamma_0 \nabla^0 + \gamma_1 \nabla^1 + \dots + \gamma_{k-1} \nabla^{k-1}]f_n + \gamma_k \nabla^k f_{n+1}$, la

expresión donde aparecen solamente las $\nabla^i f_{n+1}$.

14.43. Calcular α , β y γ para que al aplicar el método:

$$z_{n+3} - z_{n+2} = h(\alpha f_n + \beta f_{n+1} + \gamma f_{n+2})$$

al problema: $y' = (ax + b)\sqrt{y}$ se obtenga un error de

truncamiento T_{n+3} proporcional a $\frac{3}{8}h^4$. Calcular a y b para que

valga exactamente $\frac{3}{8}h^4$.

$$(\text{Solución: } \alpha = \frac{5}{12}, \beta = \frac{-4}{3}, \gamma = \frac{23}{12}, a = \sqrt{\frac{2}{3}}, \forall b).$$

14.44. Obtener un método lineal implícito de 3 pasos en el que $1/2$ y -1 sean raíces de su ecuación característica, siendo su orden de consistencia tan elevado como sea posible. El método obtenido, ¿es estable?, ¿es convergente?, ¿qué orden de consistencia tiene?

$$(\text{Solución: } z_{n+3} - \frac{1}{2}z_{n+2} - z_{n+1} + \frac{1}{2}z_n = h(\frac{-1}{6}f_n - \frac{1}{3}f_{n+1} + \frac{7}{6}f_{n+2} + \frac{1}{3}f_n),$$

estable, consistente de orden 4 y convergente).

14.45. Aplicar el método de Adams-Bashforth de dos pasos al problema de valor inicial:

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ con } \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

con $h = 0,2$ para aproximar $\begin{pmatrix} y_1(0,4) \\ y_2(0,4) \end{pmatrix}$, utilizando como valores

iniciadores: $z_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, z_1 mediante Runge-Kutta 4.

$$(Solución: $z_2 = \begin{pmatrix} 0,08782 \\ 0,60226 \end{pmatrix}$).$$

14.46. Obtener el mayor valor del paso h que haga absolutamente estable el método $z_{n+1} = z_n + h \cdot f_n$ para el sistema:

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -15 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

(Solución: $A = \{z \in \mathbf{C}; |z + 1| > 1; \lambda = -3 \pm 3i \Rightarrow h < 1/3\}$.)

14.47. Obtener el mayor valor del paso h que haga absolutamente estable el método $z_{n+1} = z_n + h \cdot f_n$ para el sistema:

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & -21 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

(Solución: $A = \{z \in \mathbf{C}; |z + 1| > 1; \lambda = -6 \pm 3\sqrt{2} \Rightarrow h < \frac{-2}{-6 - 3\sqrt{2}} \cong$

0,055.)

14.48. Obtener el mayor valor del paso h que haga absolutamente estable el método $3z_{n+2} - 2z_{n+1} - z_n = 4hf_{n+1}$ para el sistema:

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -15 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

14.49. Obtener el mayor valor del paso h que haga absolutamente estable el método $3z_{n+2} - 2z_{n+1} - z_n = 4hf_{n+1}$ para el sistema:

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & -21 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

14.50. Estudiar la consistencia, estabilidad y convergencia del método $3z_{n+2} - 2z_{n+1} - z_n = 4hf_{n+1}$. Estudiar la región de estabilidad absoluta.

14.51. Aplicar el método $3z_{n+2} - 2z_{n+1} - z_n = 4hf_{n+1}$ con un tamaño de paso $h = 0,1$, para obtener en $x = 0,4$ la solución del problema de valor inicial del sistema:

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -15 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ con } \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con valores iniciadores $z_0 = y_0$, y los obtenidos por el método de Euler.

14.52. Aplicar el método $3z_{n+2} - 2z_{n+1} - z_n = 4hf_{n+1}$ con un tamaño de paso $h = 0,1$, para obtener en $x = 0,4$ la solución del problema de valor inicial del sistema:

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & -21 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ con } \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con valores iniciadores $z_0 = y_0$, y los obtenidos por el método de Euler.