

CAPÍTULO 12

Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales

En este capítulo se inicia el estudio de lo que se denomina teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales ordinarias. El objetivo es adquirir familiaridad con los diagramas de fases de los sistemas autónomos bidimensionales, describir algunas técnicas generales para el análisis de la estabilidad y realizar un estudio cualitativo de algunos sistemas caóticos.

En algunas aplicaciones de las ecuaciones diferenciales puede interesar, incluso más que conocer las ecuaciones explícitas de las soluciones, poder analizar sus propiedades cualitativas, tales como la periodicidad, el comportamiento cuando crece la variable independiente, a la que en este capítulo se supone que es el tiempo, si es constante, o si se aproxima a una solución conocida...

Tiene interés considerar qué ocurre cuando las ecuaciones no son lineales. Entonces aparecen fenómenos nuevos sumamente interesantes. Los sistemas dinámicos pueden modelarse en general mediante sistemas no lineales. Uno de los procesos que permiten su estudio es el de linealizar el sistema, es decir, buscar un sistema lineal que se le aproxime en el entorno de un punto y que permita predecir el comportamiento de las soluciones del sistema no lineal cerca de dicho punto. Por este motivo se analiza la dinámica de los sistemas lineales

con el estudio de los atractores o repulsores como ejemplos de puntos fijos y de los espacios de fases, para a continuación estudiar los sistemas no lineales. La idea de caos es moderna y altamente motivadora y las técnicas cualitativas ayudan a analizar el comportamiento de las soluciones en los sistemas autónomos.

Se puede considerar a *Poincaré* como el padre de esta teoría. La clave de su estudio radica en el diagrama de fase de un sistema dinámico, que consiste en un modelo geométrico del conjunto de todos los posibles estados del sistema. Ya se sabe que en general es difícil encontrar soluciones, aunque es posible analizar la forma de estas soluciones al fijarse en su comportamiento local cerca de los puntos críticos o en su comportamiento asintótico.

El método directo de *Liapunov* permite en ocasiones deducir información útil sobre las propiedades de tipo cualitativo satisfechas por algunas soluciones, o en ocasiones obtener resultados de naturaleza global que proporcionan información sobre el comportamiento de todas las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias considerado. La interpretación física del sistema en los que se conserva la energía total, es decir sistemas conservativos o **hamiltonianos** puede proporcionar ejemplos en los que se puede aplicar este método. Esto permite el estudio de la estabilidad de las soluciones.

En 1989 el matemático americano R. Devaney formuló la siguiente definición:

Definición 12.1.1:

La función $f: X \rightarrow X$ es **caótica** en el espacio métrico X , no finito, si se

verifican las siguientes condiciones:

1. El conjunto de puntos periódicos de la función f es denso en X .
2. La función es topológicamente transitivo.
3. La función depende sensiblemente de las condiciones iniciales.

Definición 12.1.2:

La función $f: X \rightarrow X$ **depende sensiblemente de las condiciones iniciales** si existe un $\varepsilon > 0$ (**constante de sensibilidad**) tal que para cualquier abierto no vacío U contenido en X , existe un número natural n , tal que el diámetro de $f^n(U)$ es mayor o igual que ε .

Definición 12.1.3:

La función $f: X \rightarrow X$ es **transitiva** si y sólo si para algún x de X , el conjunto $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^n(x), \dots)$ es denso en X .

Definición 12.1.4:

La función $f: X \rightarrow X$ es **topológicamente transitiva** si para todo par de intervalos abiertos no vacíos de X , U y V , existe un número natural n , tal que $f^n(U) \cap V$ sea distinto del vacío.

Estas ideas, que se refieren a sistemas discretos, se van a estudiar a continuación con sistemas de ecuaciones diferenciales continuos.

12.1. CONCEPTOS PREVIOS: GENERALIDADES

12.1.1. Soluciones y trayectorias en un sistema de ecuaciones diferenciales

Se considera un sistema de n ecuaciones diferenciales que se puede escribir en la forma:

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R} \quad (12.1.1)$$

donde la variable t se interpreta en general como el tiempo, donde y e y' son vectores de dimensión n y la función f es una función de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ a la que se supone la regularidad suficiente para asegurar la existencia y unicidad de las soluciones.

Se comienza estudiando los sistemas autónomos.

Definición 12.1.5:

Se dice que un sistema de ecuaciones diferenciales 12.1.1 es un **sistema autónomo** si la función f no depende explícitamente de la variable independiente, t .

Se observa que si el sistema no es autónomo se puede convertir en uno autónomo sin más que añadir una variable más. Así el sistema 12.1.1. se convierte en el sistema autónomo:

$$\begin{cases} y' = f(y, t), & y \in \mathbb{R}^n \\ t' = 1 \end{cases}$$

En general, se considera entonces el **sistema autónomo** n -dimensional:

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad (12.1.2)$$

donde la función f es suficientemente regular para garantizar la existencia y unicidad de las soluciones en, al menos, un subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

Definición 12.1.6:

Una **solución** del sistema es una función diferenciable $y: (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $y = y(t)$, que satisface el sistema 12.1.2, (o bien 12.1.1).

Se tiene un problema de valor inicial si en un sistema como el 12.1.2 se conoce una condición inicial $y_0 = y(t_0)$. Usualmente se toma como t_0 el valor 0. La solución particular $y = y(t)$, que se denota por $y = y(t) = y(t, t_0, y_0) = \phi(t, t_0, y_0)$, que verifica dicha condición, $y_0 = y(t_0)$, puede representarse mediante una gráfica que es una curva en el espacio $n + 1$ dimensional de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ dada por los puntos $(t, y(t))$ o $(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$ donde t varía en el intervalo de la recta real en que exista la solución del sistema.

Definición 12.1.7:

Se denomina **espacio de estados** del sistema 12.1.2 al subconjunto de $\mathbb{R}^n$, Ω , en el que existen soluciones del sistema. Es decir: $\Omega = \{y_0; y(t, t_0, y_0) \text{ es solución de } y' = f(y)\}$

Definición 12.1.8:

La curva proyección en $\mathbb{R}^n$ (eliminando el tiempo) de una solución particular, $y = y(t)$, de un sistema de ecuaciones diferenciales, $y' = f(y)$, se denomina **órbita** o

trayectoria.

Por tanto la trayectoria u órbita es el subconjunto de $\mathfrak{R}^n$ dado por los puntos $(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$ con $t \in \mathfrak{R}$, siendo $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$ una solución de (12.1.2).

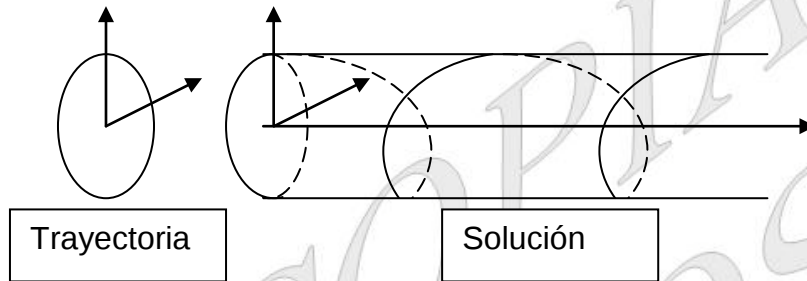


Figura 12.1: Órbita o trayectoria y solución de un sistema de ecuaciones diferenciales

Si el sistema es de dimensión dos, la solución es una curva en $\mathfrak{R}^3$, mientras que la órbita o trayectoria es una curva en $\mathfrak{R}^2$.

Se denomina **semitrayectoria positiva** a $\{\mathbf{y}(t); t \in [t_0, +\infty)\}$ y se denota por $C^+(\mathbf{y}(t))$.

Se denomina **semitrayectoria negativa** a $\{\mathbf{y}(t); t \in (-\infty, t_0]\}$ y se denota por $C^-(\mathbf{y}(t))$.

Se sabe por el teorema de unicidad de las soluciones que las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales no se pueden cortar. Sin embargo distintas soluciones pueden proyectarse sobre una misma trayectoria. Por lo tanto dos soluciones, o bien dan lugar a una misma trayectoria, o bien no se cortan en ningún punto, y en consecuencia, por cada punto de $\mathfrak{R}^n$ pasa una única trayectoria.

Por ejemplo, en el sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

las gráficas de las soluciones $(t, x(t), y(t))$ son hélices circulares sobre el cilindro $x^2 + y^2 = r^2$, y sus trayectorias son las circunferencias $x^2 + y^2 = r^2$.

Definición 12.1.9:

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ el espacio de estados del sistema $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$, y sea $\varphi: \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \Omega$ una aplicación de clase uno, que a cada punto de una solución le hace corresponder el de la trayectoria asociada. Esta aplicación recibe el nombre de **flujo**.

12.1.2. Diagrama de fases

La clave de la teoría geométrica de los sistemas dinámicos creada por Poincaré es el **diagrama de fase** de un sistema dinámico. El primer paso para dibujar el diagrama es la creación de un modelo geométrico del conjunto de todos los posibles estados del sistema en el llamado **espacio de estado**. En este modelo geométrico la dinámica determina una estructura celular de cuencas limitadas por **separatrices**. En cada cuenca hay un núcleo llamado **atractor**. Se podría afirmar que el objetivo de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales es la descripción lo más completa posible del diagrama de fases, analizando el comportamiento asintótico de las trayectorias, determinando las trayectorias especiales, mostrando cuencas y atractores, con lo que se podría conocer el

comportamiento del sistema. La teoría cualitativa tiene un gran interés en las aplicaciones.

Las soluciones $\mathbf{y}(t)$ representan las coordenadas de un objeto, es decir, su posición, o quizás la velocidad y aceleración del objeto en un tiempo t .

Si el sistema es de dimensión dos, en el plano (y_1, y_2) se pueden dibujar un número de trayectorias suficientes como para tener una idea de conjunto del comportamiento de todas las del sistema. Sobre dichas trayectorias se dibuja una flecha que indica el sentido de la variación de y_1 y de y_2 al crecer el tiempo, lo que proporciona una imagen “dinámica” de su recorrido, y con ello se obtiene una descripción cualitativa del comportamiento de las soluciones.

Definición 12.1.10:

Se denomina **diagrama de fase** del sistema de ecuaciones diferenciales $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ al conjunto de todas las trayectorias de las soluciones del sistema.

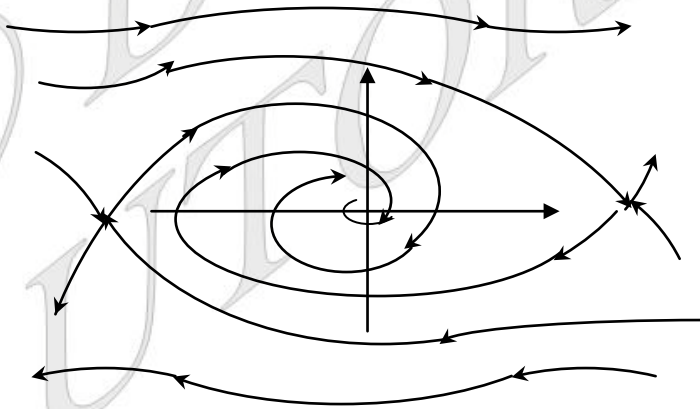


Figura 12.2: Ejemplo de diagrama de fase

Dos soluciones distintas no pueden cortarse nunca, debido a los teoremas de

unicidad de las soluciones. Pero ¿y las trayectorias? Las trayectorias de dos soluciones distintas: $\mathbf{y}(t)$ e $\mathbf{y}^*(t)$ o bien no tienen ningún punto en común o bien coinciden. Tampoco puede ocurrir que una trayectoria se corte a sí misma.

Definición 12.1.11:

Un **atractor** de un sistema de ecuaciones diferenciales es un conjunto cerrado y acotado hacia el cual se aproxima, cuando el tiempo t tiende a infinito, la órbita de las soluciones.

Por ejemplo, en la figura 12.2, el origen es un punto crítico asintóticamente estable, hacia el que se aproximan las soluciones, por lo que es un atractor.

Proposición 12.1.1:

Sea $\mathbf{y}(t)$ una solución de $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$. Si existen dos valores distintos de t , t_1 y t_2 , $t_1 \neq t_2$, tales que $\mathbf{y}(t_1) = \mathbf{y}(t_2)$ se verifica que, o bien la solución es una función constante, $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0 \in \Omega$, siendo entonces $\mathbf{y}_0$ un punto de equilibrio, o bien la solución $\mathbf{y}(t)$ es una función periódica y su trayectoria es una curva cerrada simple.

Como consecuencia de esta proposición, el diagrama de fases de $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ consta de trayectorias que no se cortan que pueden ser de tres tipos:

- curvas abiertas y simples
- curvas cerradas y simples (que se corresponden con las soluciones periódicas)
- puntos de equilibrio (que se corresponden con las soluciones constantes).

En los apartados siguientes se estudia esto con más detalle.

12.1.3. Puntos críticos

Se estudian los **puntos críticos** o **estacionarios** del sistema autónomo que son las soluciones de $\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{K}$, constante. Cada punto crítico es una órbita del sistema formada por únicamente dicho punto. Si ese punto es el valor inicial, entonces, a lo largo del tiempo el sistema permanece invariante.

Definición 12.1.12:

Una **solución estacionaria** de un sistema de ecuaciones diferenciales es una **solución constante**, es decir, una solución $\mathbf{y}$ tal que $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t_0)$ para todo t .

Definición 12.1.13:

La trayectoria de una solución estacionaria es un punto de $\mathbb{R}^n$ que se denomina **punto fijo**, **punto crítico**, **punto de equilibrio** o **punto estacionario** del sistema de ecuaciones diferenciales.

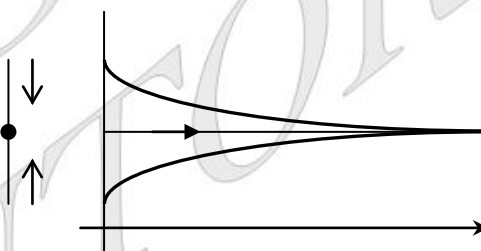


Figura 12.3: Solución estacionaria y punto fijo

Si $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t_0)$ es una solución estacionaria, su trayectoria es un punto crítico que se puede identificar con el vector $\mathbf{y}(t_0)$.

Por ejemplo, en el sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -x + y \end{cases}$$

la solución $x(t) = 0$, $y(t) = 0$ es una solución estacionaria, cuya trayectoria es un punto fijo, el punto $(0, 0)$.

Un punto $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ es un punto crítico para el sistema autónomo $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ si $\mathbf{f}(\mathbf{y}_0) = 0$. En caso contrario se dice que $\mathbf{y}_0$ es un **punto regular**.

Teorema 12.1.1:

Sea un sistema lineal y homogéneo de ecuaciones diferenciales. La solución cero es el único punto crítico si y sólo si cero no es un autovalor de la matriz asociada.

Demostración:

Sea $\lambda = 0$ un autovalor de la matriz asociada, y sea $\mathbf{v}_1$ el autovector correspondiente, entonces la solución general del sistema tiene la forma:

$$\mathbf{y}(t) = C_1 \cdot \mathbf{v}_1 + C_2 \cdot \mathbf{v}_2 \cdot \varphi_2(t) + \dots + C_n \cdot \mathbf{v}_n \cdot \varphi_n(t),$$

es decir, hay una solución particular $\varphi_1(t) = \mathbf{v}_1$, cuyas derivadas valen cero, y es, por tanto, un punto crítico distinto de cero.

Recíprocamente, si $\mathbf{v}_1$ es un punto crítico no nulo, entonces $\mathbf{0} = A \cdot \mathbf{v}_1$, lo que significa que la matriz A no tiene matriz inversa, luego cero es un autovalor de dicha matriz. $\square$

Los puntos fijos se corresponden con las soluciones de equilibrio del sistema

de ecuaciones diferenciales. La condición del punto fijo de atraer o repeler proporciona información sobre la estabilidad del sistema.

De forma intuitiva un punto crítico es **estable** si para cualquier trayectoria y suficientemente próxima al punto en el momento inicial, por ejemplo a una distancia menor que δ , permanece próxima al punto para todo tiempo $t_0 > 0$, es decir, la trayectoria permanece siempre dentro de un círculo de centro el punto y radio ε , mientras que para que sea asintóticamente estable además de ser estable las trayectorias deben aproximarse al punto cuando el tiempo tiende a infinito, es decir, el punto es un atractor. El punto es un repulsor si es inestable y las trayectorias se alejan de él.

Definición 12.1.14:

Se considera un sistema de ecuaciones diferenciales autónomo como el 12.1.2, con un punto crítico v .

- v es un **punto fijo estable** o **nodo estable** si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si y es una solución tal que $\|y(t_0) - v\| < \delta$, entonces $\|y(t) - v\| < \varepsilon$, para todo $t > t_0$.
- v es un **punto fijo asintóticamente estable** o **nodo asintóticamente estable** si v es estable, y si existe un $\delta > 0$ tal que para cada solución y , si $\|y(t_0) - v\| < \delta$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - v\| = 0$.
- v es un **punto fijo inestable** o **nodo inestable** si no es estable.

12.1.4. Órbitas cíclicas

Se considera el caso en que el origen sea un punto de equilibrio. Los resultados son locales si es un punto de equilibrio aislado, y son globales si es el único punto de equilibrio. Se define conceptos como punto periódico, órbita, alfa-límite y omega-límite.

Es interesante mencionar los **conjuntos invariantes** por un sistema dinámico dado su importancia para el estudio de la estabilidad. Entre ellos tienen especial interés el estudio de las trayectorias cerradas en el espacio de fases que corresponden con soluciones periódicas.

Si una solución $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ verifica que $\mathbf{y}(t_1) = \mathbf{y}(t_2)$ con t_1 distinto de t_2 , entonces esa solución es una **función periódica**, de periodo un múltiplo de $t_2 - t_1$. Su trayectoria es una curva cerrada simple, y se dice que es una **órbita cíclica**.

En el caso particular de una solución estacionaria, se puede considerar que $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t_0)$ para todo t , como un caso trivial de periodicidad, siendo la trayectoria un punto de equilibrio del sistema.

Continuando con la teoría cualitativa de los sistemas se debe hacer referencia al comportamiento cuando el tiempo tiende a infinito. Se estudia el concepto de conjunto límite. Si el tiempo tiende a más infinito (o a menos infinito) se puede analizar hacia donde tienden las trayectorias y definir los conjuntos alfa-límite y omega-límite.

Definición 12.1.15:

Dado un sistema autónomo $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ de orden n y una semitrayectoria C^+ del

mismo de ecuación $\mathbf{y}(t)$ con $t \geq t_0$, se dice que $\mathbf{y}_0^* \in \mathbb{R}^n$ es un **omega-límite** (ω -límite) si existe una sucesión real creciente (t_n) con $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$, tal que la sucesión $(\mathbf{y}(t_n))$ tiene como límite $\mathbf{y}_0^*$.

Se observa que en esta definición se presupone que $\mathbf{y}(t)$ está definida en el intervalo $[t_0, +\infty)$.

El omega-límite no tiene necesariamente que ser único. Se denomina $L(C^+)$ al conjunto de todos los puntos ω -límites para un sistema autónomo dado. A este conjunto pertenecen los puntos fijos estables (atractores).

Del mismo modo se pueden considerar las semitrayectorias C^- definidas desde $-\infty$ hasta t_0 y definir los alfa-límites.

Definición 12.1.16:

Dado un sistema autónomo $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ de orden n y una semitrayectoria C^- del mismo de ecuación $\mathbf{y}(t)$ con $t \leq t_0$, se dice que $\mathbf{y}_0^* \in \mathbb{R}^n$ es un **alfa-límite** (α -límite) si existe una sucesión real decreciente (t_n) con $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = -\infty$, tal que la sucesión $(\mathbf{y}(t_n))$ tiene como límite $\mathbf{y}_0^*$.

Se representa por $L(C^-)$ al conjunto de todos los puntos α -límites para un sistema autónomo dado. A este conjunto pertenecen los puntos fijos inestables que son repulsores.

La idea intuitiva es que cada trayectoria puede partir de un α -límite y llegar a un ω -límite.

En muchas ocasiones se tienen sistemas de ecuaciones diferenciales que dependen de un parámetro:

$$\frac{dy}{dt} = f(y, \lambda), \quad y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R} \quad (12.1.3)$$

Los parámetros no dependen de la variable independiente, pero se modifica el comportamiento de las soluciones según los valores que tome el parámetro. En general una modificación pequeña del valor del parámetro supone una variación también pequeña en las soluciones. Pero en ocasiones para un determinado valor del parámetro se modifica drásticamente la dinámica del sistema, como por ejemplo si un atractor pasa a ser un repulsor. En esas ocasiones se dice que la ecuación diferencial tiene una bifurcación.

Definición 12.1.17:

Una ecuación diferencial que depende de un parámetro tiene una **bifurcación** cuando hay una variación cualitativa en el comportamiento de las soluciones para un determinado valor del parámetro.

En el ejemplo 12.1.1 se observa que la ecuación diferencial $y' = ay$ tiene una bifurcación para $a = 0$, pues el origen es un atractor si $a < 0$ y es un repulsor si $a > 0$.

12.1.5. Estabilidad de Liapunov y estabilidad orbital

Se estudia el concepto de estabilidad de las soluciones y de las trayectorias. Existen dos conceptos de estabilidad y sus correspondientes versiones asintóticas: la estabilidad de *Liapunov* y la estabilidad orbital.

La estabilidad de *Liapunov* mide la distancia entre las soluciones. Una solución es estable según Liapunov si para valores iniciales suficientemente próximos entonces la distancia entre las soluciones es tan pequeña como se quiera.

Definición 12.1.18:

Sea $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t)$ un sistema de ecuaciones diferenciales y sea $\phi(t)$ la solución que para $t = t_0$ toma el valor $\mathbf{y}_0$, entonces se dice que la solución $\phi(t) = \phi(t, t_0, \mathbf{y}_0)$ es **estable según Liapunov** si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$, tal que si toda solución $\phi^*(t) = \phi(t, t_0, \mathbf{y}_0^*)$ que verifique que $\text{dist}(\phi(t_0), \phi^*(t_0)) < \delta$ entonces $\text{dist}(\phi(t, t_0, \mathbf{y}_0), \phi(t, t_0, \mathbf{y}_0^*)) < \varepsilon$, para todo $t \geq t_0$.

Definición 12.1.19:

Un punto crítico $\mathbf{y}_0$ es **estable según Liapunov** si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, tal que si $\text{dist}(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0^*) < \delta$ entonces $\text{dist}(\mathbf{y}_0, \phi(t, t_0, \mathbf{y}_0^*)) < \varepsilon$.

Definición 12.1.20:

Una solución $\phi(t, t_0, \mathbf{y}_0)$ es **asintóticamente estable** si es estable y también verifica que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\phi(t, t_0, \mathbf{y}_0) - \phi(t, t_0, \mathbf{y}_0^*)\| = 0$.

Definición 12.1.21:

Un punto crítico $\mathbf{y}_0$ es **asintóticamente estable** si para valores iniciales suficientemente próximos, el límite de $\phi(t, t_0, \mathbf{y}_0^*)$, cuando t tiende a infinito, es $\mathbf{y}_0$.

Definición 12.1.22:

Un punto crítico es **inestable** si no es estable.

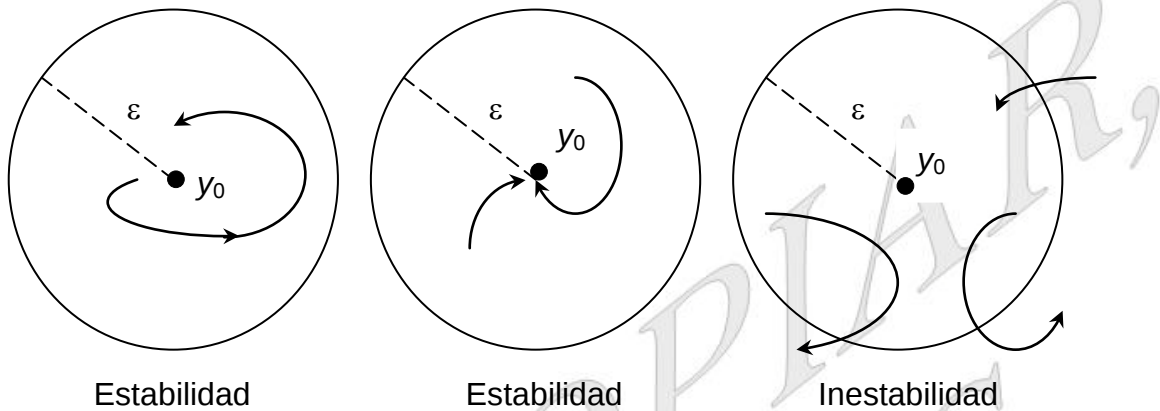


Figura 12.4: Solución estable, solución asintóticamente estable y solución inestable

Si el sistema es lineal, $\mathbf{y}'(t) = A(t) \cdot \mathbf{y}(t) + b(t)$, entonces una solución $\phi(t, t_0, \mathbf{y}_0)$ es estable (o asintóticamente estable) si y sólo si el origen es un punto crítico estable (o asintóticamente estable) del sistema homogéneo asociado. Este hecho conduce a estudiar los puntos críticos de los sistemas lineales homogéneos.

La estabilidad orbital mide la separación entre las trayectorias en el espacio de fases, no la separación de las soluciones.

Definición 12.1.23:

Una órbita cíclica $\mathbf{y}(t)$ (o trayectoria que sea una curva cerrada simple) es **orbitalmente estable** si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ de modo que cualquier otra trayectoria $\mathbf{y}^*(t)$ que en $t = t_0$ diste de $\mathbf{y}(t)$ menos que δ entonces distará menos que ε para todo t mayor que t_0 . Es decir: Si $\inf(\text{dist}(\mathbf{y}^*(t_0), \mathbf{y}(t))) < \delta$ entonces $\text{dist}(\mathbf{y}^*(t), \mathbf{y}(t)) < \varepsilon$, para todo $t > t_0$.

Si $\lim_{t \rightarrow +\infty} (\text{dist}(\mathbf{y}^*(t), \mathbf{y}(t))) = 0$ se dice que la **estabilidad es orbitalmente asintótica**.

En este caso se dice que la órbita $y(t)$ es un ciclo límite.

Definición 12.1.24:

Un **ciclo límite** es una curva cerrada C que es cíclica y atrae a las órbitas de cualquier solución que en el instante inicial esté próxima a C .

La estabilidad según *Liapunov* implica la estabilidad orbital, aunque no al contrario.

Un ejemplo con estabilidad orbital, pero sin estabilidad según *Liapunov* es el oscilador cuártico definido por la ecuación: $y'' + 4y^3 = 0$. Las trayectorias en el espacio de fases (y, y') son los óvalos:

$$1/2(y')^2 + y^4 = A$$

donde A representa la amplitud de las oscilaciones.

Se observa que estos óvalos se deforman continuamente al variar A , por lo que se tiene estabilidad orbital, pero el periodo también varía con A : $T = T(A)$, por lo que la solución no es estable según *Liapunov*.

12.1.6. Dinámica en un sistema lineal homogéneo de dimensión $n = 1$

Dado el sistema lineal y homogéneo de dimensión uno $y' = ay$, su solución general es $y(t) = Ce^{at}$. Según los valores del parámetro a se tienen los siguientes casos:

Caso 1: $a < 0$. Cuando t crece, la función exponencial tiene a cero. El origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable, que es un atractor. Se tienen

sólo tres trayectorias según el valor inicial.

Caso 2: $a = 0$. Todos los puntos de la recta real son puntos de equilibrio.

Caso 3: $a > 0$. Cuando t crece, la función exponencial tiene a infinito. El origen es un punto de equilibrio inestable que es un repulsor. Se tienen de nuevo sólo tres trayectorias según el valor inicial.

Se dice que $a = 0$ es un punto de bifurcación, pues cambia en él la dinámica del sistema.

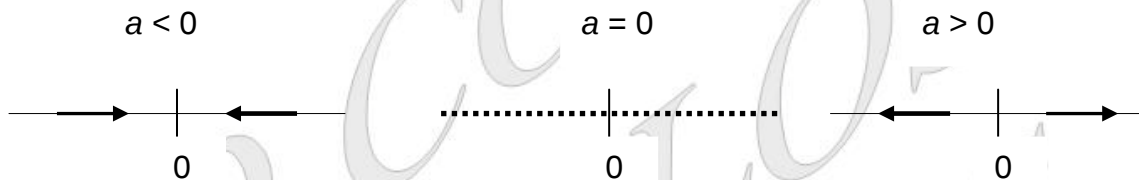


Figura 12.5: Diagrama de fase en un sistema lineal homogéneo de dimensión uno

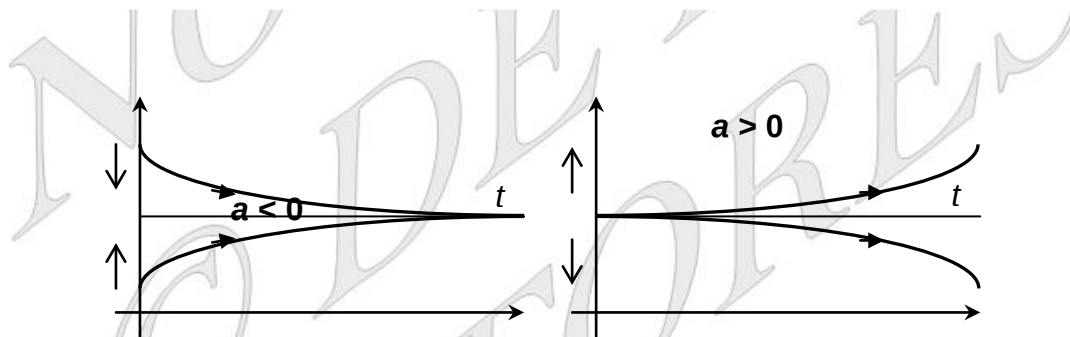


Figura 12.6: Diagrama de fase y trayectorias en un sistema lineal de dimensión uno.

12.1.7. Dinámica en un sistema lineal homogéneo de dimensión $n = 2$

En un sistema lineal homogéneo de orden dos $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ el origen es un punto crítico.

Si el sistema tiene dos autovalores reales y distintos λ y μ , y $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ son los autovectores asociados, entonces la solución general es:

$$\mathbf{y}(t) = C_1 \cdot \mathbf{v}_1 \cdot e^{\lambda t} + C_2 \cdot \mathbf{v}_2 \cdot e^{\mu t}.$$

- Si ambos autovalores son negativos, $\lambda < \mu < 0$, se observa que, al crecer el tiempo, $e^{\lambda t}$ y $e^{\mu t}$ disminuyen, luego $\mathbf{y}(t)$ se acerca al origen, por lo que éste es un punto crítico estable, y además, es asintóticamente estable pues $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}(t)\| = 0$. Se dice entonces que el origen es un nodo asintóticamente estable, y es un **atractor**.

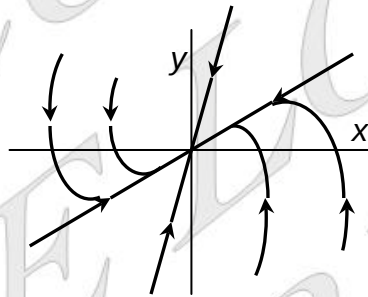


Figura 12.7: Diagrama de fase en un sistema lineal de dimensión dos de autovalores reales, distintos y negativos. Atractor.

- Si ambos autovalores son positivos, $\lambda > \mu > 0$, entonces para toda solución se verifica que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}(t)\| = \infty$. Todas las trayectorias se alejan del origen. En este caso el origen es un **nodo inestable** o **repulsor**.
- Si un autovalor es positivo y el otro es negativo, $\lambda > 0 > \mu$, entonces las trayectorias que tengan su valor inicial sobre la recta de vector de dirección $\mathbf{v}_2$ tienden a aproximarse al origen, pero el resto, al

aumentar el tiempo, crecen, por lo que tienden a infinito. En situaciones como estas se dice que el origen es un **punto de silla**, y es inestable.



Figura 12.8: Diagrama de fase en un sistema lineal de dimensión dos de autovalores reales y distintos. Punto de silla.

- Si el autovalor es doble, el punto crítico se dice que es un **nodo degenerado**. Pueden darse distintos casos, como que todo vector sea autovector, y entonces todas las trayectorias son rectas. Si el autovector es negativo al crecer el tiempo, se aproximan al origen, (atractor) y si es positivo, se alejan, (repulsor). Se dice entonces que el origen es una **solución estrella**. Pero pueden darse otros diagramas de fase distintos, donde el nodo puede ser un nodo degenerado y asintóticamente estable, o un nodo degenerado inestable, según sea el signo del autovalor.

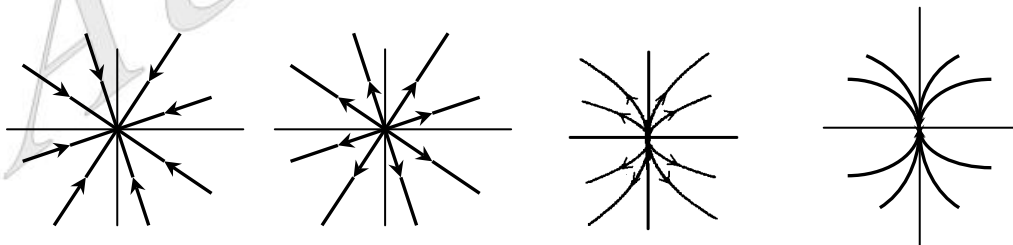


Figura 12.9: Diagramas de fase en sistemas lineales de dimensión dos con los autovalores iguales

- Si el autovalor es un número complejo $\lambda = \alpha \pm \beta i$, entonces la solución general es de la forma:

$$y(t) = e^{\alpha t} \cdot (C_1 \cdot v_1 \cdot \cos \beta t + C_2 \cdot v_2 \cdot \sin \beta t).$$

Si $\alpha > 0$, $e^{\alpha t}$ aumenta al crecer el tiempo, luego las trayectorias se alejan del origen. Ahora son **espirales**. Se dice que el origen es un nodo inestable o repulsor o punto espiral inestable o foco inestable.

Si $\alpha < 0$ se invierte la situación, las trayectorias se acercan al origen en espiral, siendo éste un nodo asintóticamente estable o atractor o punto espiral estable o foco estable.

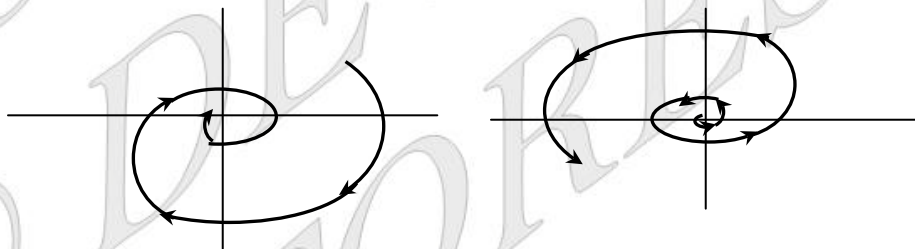


Figura 12.10: Diagrama de fase en un sistema lineal de dimensión dos con autovalores complejos. Espirales.

Si $\alpha = 0$ entonces la solución general es de la forma:

$$y(t) = C_1 \cdot v_1 \cdot \cos \beta t + C_2 \cdot v_2 \cdot \sin \beta t.$$

Es una solución periódica de periodo $2\pi/\beta$. Ahora las trayectorias son elípticas. Se dice que el origen es un **centro**.

Se observa que un centro es un ejemplo de punto crítico estable pero que no es asintóticamente estable.

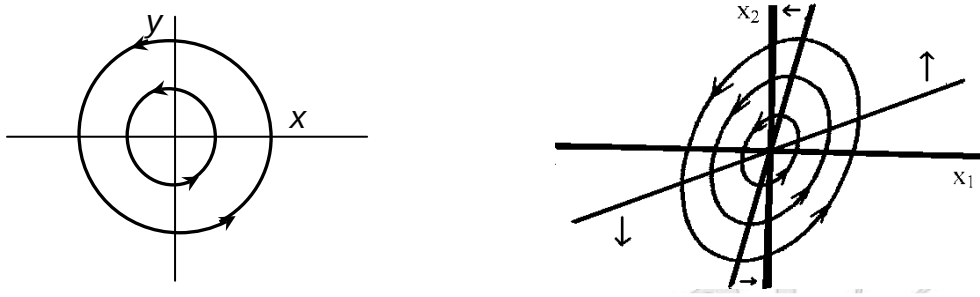


Figura 12.11: Diagrama de fase en un sistema lineal de dimensión dos de autovalores complejos con $\alpha = 0$.

Centro.

Se ha comprobado que el diagrama de fase de un sistema lineal homogéneo de dimensión dos: $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ depende de los autovalores de la matriz A , que se obtienen de la ecuación característica:

$$\lambda^2 - (\text{Traza de } A)\lambda + (\text{Determinante de } A) = 0,$$

de discriminante:

$$D = (\text{Traza de } A)^2 - 4(\text{Determinante de } A).$$

Dependiendo de los signos de D , $(\text{Determinante de } A)$ y $(\text{Traza de } A)$ se tienen las distintas posibilidades:

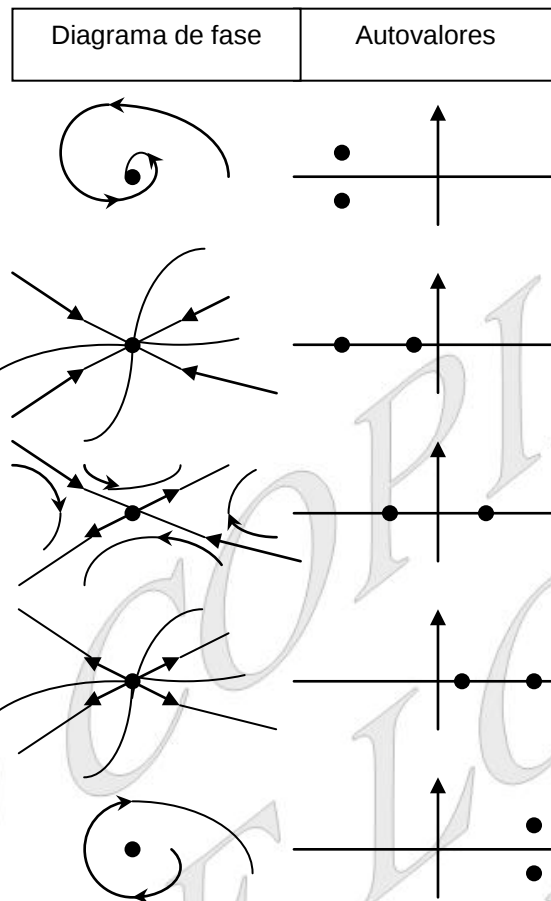


Figura 12.12: Distintos diagramas de fase en un sistema lineal de dimensión dos. Puntos críticos hiperbólicos.

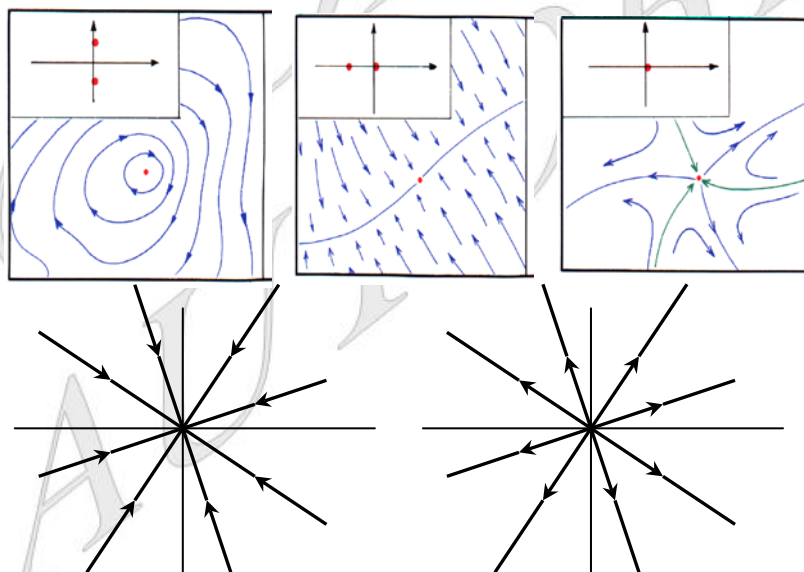


Figura 12.13: Distintos diagramas de fase en un sistema lineal de dimensión dos. Puntos críticos no hiperbólicos.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 12.1.1: Identificar los puntos de equilibrio del sistema de dimensión uno:

$$y' = (y + 2) \cdot (y - 1)$$

y determinar si son atractores, repulsores o puntos de silla.

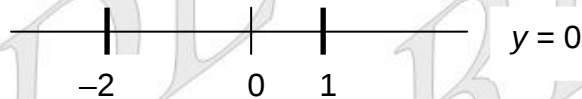
En una ecuación del tipo $y' = f(y)$ se puede dibujar el diagrama de fase siguiendo los siguientes pasos:

1) Dibujar la recta y .

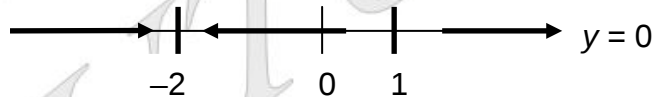
$$\text{_____} \quad y = 0$$

2) Encontrar los puntos de equilibrio resolviendo la ecuación $f(y) = 0$ y marcarlos sobre la recta y .

$(y + 2) \cdot (y - 1) = 0 \Rightarrow y = -2; y = 1$. Los puntos de equilibrio son -2 y 1 .



3) Dibujar flechas hacia arriba (o hacia la derecha) en los intervalos donde $f(y) > 0$. Dibujar flechas hacia abajo (o hacia la izquierda) en los intervalos donde $f(y) < 0$.



El punto crítico $y = -2$ es un atractor, mientras que el punto crítico $y = 1$ es un repulsor.

Ejemplo 12.1.2: Determinar la solución general y clasificar el origen como punto fijo en el sistema lineal homogéneo de dimensión dos siguiente:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x + y \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 2y \end{cases}.$$

Se determinan los autovalores resolviendo la ecuación característica:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -4 - \lambda & 1 \\ 3 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 5 \Rightarrow \lambda = -1; \lambda = -5.$$

Ambos autovalores son negativos. El origen va a ser un atractor. Se calculan los autovectores:

$$\text{Para } \lambda = -1 \Rightarrow (A - \lambda I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -3x + y = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Para } \lambda = -5 \Rightarrow (A - \lambda I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{La solución general es: } \mathbf{y}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-5t}.$$

Cuando t tiende a infinito, la solución tiende al origen, que es el único punto crítico. Si el instante inicial fuese un punto de la recta de dirección del vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, entonces su trayectoria se aproxima al origen siguiendo esa recta. Si el instante inicial fuese un punto de la recta de dirección del vector $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, entonces su trayectoria se aproxima al origen siguiendo esa recta. En el resto de los casos se aproxima al origen acercándose a la recta de vector de dirección el $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, que corresponde al autovalor de mayor valor absoluto. El origen es un atractor, es un

punto estable y asintóticamente estable.

Ejercicios

12.1. Hacer un esbozo del diagrama de fase de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y' = (1 - y) \cdot y$

b) $y' = y \cdot \cos y$

c) $y' = (2 - y) \cdot (y + 3)$

d) $y' = (y + 2)^2$

12.2. Identificar los puntos de equilibrio de las ecuaciones siguientes como atractores, repulsores o puntos de silla:

a) $y' = (1 - y)$

b) $y' = 2y \cdot (1 - y)$

c) $y' = 2y^3 \cdot (1 - y)^2$

d) $y' = 2y \cdot (1 - y) \cdot (y + 2)$

12.3. De la ecuación diferencial $y' = f(y)$ se sabe que $f(-2) = f(3) = 0$ y que $f(y) > 0$ para $-2 < f(y) < 3$. Describir todos los posibles comportamientos de la solución que verifica $f(0) = 1$.

12.4. En los sistemas lineales siguientes comprobar el valor de los autovalores,

determinar la solución general y comprobar la clasificación del origen como punto fijo. Dibujar el diagrama de fase:

a)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}, \text{ autovalores: } -2 \text{ y } 2; \text{ punto de silla, inestable.}$$

b)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x \\ \frac{dy}{dt} = -4y \end{cases}, \text{ autovalores: } -4 \text{ doble; nodo degenerado, punto}$$

estrella asintóticamente estable.

c)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 4y \\ \frac{dy}{dt} = x - y \end{cases}, \text{ autovalores: } 1 \text{ doble; nodo degenerado}$$

inestable.

d)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 5y \\ \frac{dy}{dt} = -x - 3y \end{cases}, \text{ autovalores: } -1 + i, -1 - i, \text{ nodo espiral}$$

asintóticamente estable.

12.5. Determinar un valor de a para que el sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + 2y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases},$$

tenga un centro. ¿Existen valores de a que hagan al origen un punto espiral? Si la respuesta es afirmativa, determinarlos.

12.6. En los sistemas lineales siguientes determinar la solución general, clasificar el origen como punto fijo y dibujar el diagrama de fase:

a)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = -9x + 3y \end{cases}.$$

b)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}.$$

c)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - y \\ \frac{dy}{dt} = x - 4y \end{cases}.$$

d)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - y \\ \frac{dy}{dt} = -2y \end{cases}.$$

12.2. COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE UN SISTEMA LINEAL HOMOGÉNEO

El estudio de la estabilidad en los sistemas lineales $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t)$ se reducen al estudio de la estabilidad de los sistemas lineales homogéneos de dimensión n , $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$. En los ejemplos anteriores de dimensión uno y dimensión dos se ha analizado ya el comportamiento dinámico de los sistemas $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, con la matriz A de coeficientes constantes. En esta sección se van a enunciar algunos

teoremas que lo generalizan para dimensión n .

Teorema 12.2.1:

El sistema $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$, $t \geq t_0$, es estable si y sólo si todas sus soluciones están acotadas en $[t_0, +\infty)$.

Corolario 12.2.2:

Para que todas las soluciones de $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, $t \geq t_0$, estén acotadas es necesario y suficiente que:

- a) Todos los autovalores de la matriz A tengan su parte real negativa o nula.
- b) Si λ tiene su parte real nula, entonces la dimensión del núcleo de $A - \lambda I$, $\dim N(A - \lambda I)$, coincida con el orden de multiplicidad de λ .

Para que todas las soluciones de $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ estén acotadas es necesario que todos los autovalores de la matriz A tengan su parte real negativa o nula. Pero esta condición no es suficiente, pues pueden no estar acotadas si el autovalor tiene su parte real nula y es doble y aparecen polinomios. Para que esto no ocurra, la matriz de Jordan asociada debe ser diagonal.

Si la parte real es nula se pretende que no aparezcan soluciones del tipo:

$$\mathbf{y}(t) = C_1 \cdot \mathbf{v}_1 + C_2 \cdot \mathbf{v}_2 \cdot t + \dots +$$

o bien, si son complejas:

$$\mathbf{y}(t) = C_1 \cdot \mathbf{v}_1 \cdot \cos \alpha t + C_2 \cdot \mathbf{v}_2 \cdot \sin \alpha t + C_1 \cdot \mathbf{v}_1 \cdot t \cdot \cos \alpha t + C_2 \cdot \mathbf{v}_2 \cdot t \cdot \sin \alpha t + \dots +$$

Corolario 12.2.3:

Toda solución $\mathbf{y}(t)$ del sistema $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ tiende a cero cuando el tiempo tiende a infinito, si y sólo si, todos los autovalores de la matriz A tienen su parte real negativa, o si tienen su parte real nula, entonces $\dim N(A - \lambda I)$ coincide con el orden de multiplicación de λ .

En este caso el origen es un atractor del sistema.

La justificación es clara teniendo en cuenta la forma general de dichas soluciones:

$$\mathbf{y}(t) = C_1 \cdot \mathbf{v}_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n \cdot \mathbf{v}_n \cdot e^{\lambda_n t}.$$

Si la parte real de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ es negativa, al calcular el límite cuando t tiende a infinito, $\mathbf{y}(t)$ tiende a cero. Recíprocamente si alguno tiene su parte real positiva entonces la solución no converge a cero.

Teorema 12.2.4:

Sea el sistema $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Toda solución $\mathbf{y}(t)$ del sistema, distinta de $\mathbf{y}(t) = 0$ para todo t , tiende a infinito cuando el tiempo tiende a infinito, si y sólo si todos los autovalores de la matriz A tienen su parte real positiva.

La justificación es similar al teorema anterior.

En este caso el origen es una **fente** o **repulsor** del sistema.

Teorema 12.2.4:

Si el sistema $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ tiene autovalores complejos imaginarios puros de la forma $\lambda = bi$ con b distinto de cero, y $m = \dim N(A - \lambda I)$ como subespacio de $\mathbf{C}^n$, entonces el conjunto de soluciones periódicas de $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ de periodo $2\pi/b$ es un

subespacio vectorial de dimensión $2m$.

Definición 12.2.1:

Un sistema lineal homogéneo de dimensión n , $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ se dice que es **hiperbólico** si todos los autovalores de la matriz A tienen su parte real distinta de cero.

En un sistema hiperbólico se tiene que el origen o bien es un atractor o bien es un repulsor o bien, si hay autovalores de parte real positiva y de parte real negativa, entonces es un punto de silla. En este caso el sistema se puede dividir en dos subsistemas, separando los autovalores por el signo de su parte real.

Definición 12.2.2:

Se denomina **subespacio estable** del sistema hiperbólico de dimensión n , $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, al subespacio, E , en el que todos los autovalores tienen su parte real negativa.

Definición 12.2.3:

Se denomina **subespacio inestable** del sistema hiperbólico de dimensión n , $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, al subespacio, N , en el que todos los autovalores tienen su parte real positiva.

Ambos subespacios, estable e inestable, son invariantes para el sistema. En un sistema hiperbólico $\mathfrak{R}^n$ es suma directa de ellos: $\mathfrak{R}^n = E \oplus N$ y $E \cap N = \{\mathbf{0}\}$.

Sea $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ un sistema lineal y homogéneo y sea J la matriz de Jordan de A , ordenada de forma que primero se tengan los bloques que correspondan a autovalores con parte real negativa, J_e , luego con parte real nula, J_p , y por último,

con parte real positiva, J_i , de dimensiones, respectivamente: e , p y i , con $e + p + i = n$. El sistema canónico se subdivide en tres subsistemas: $\mathbf{y}'_{(e)} = J_e \cdot \mathbf{y}_{(e)}$, $\mathbf{y}'_{(p)} = J_p \cdot \mathbf{y}_{(p)}$, $\mathbf{y}'_{(i)} = J_i \cdot \mathbf{y}_{(i)}$, donde los espacios correspondientes a J_e , E , y a J_i , N , son subespacios invariantes, y el subespacio P , correspondiente a J_p , también es un subespacio invariante con soluciones posiblemente periódicas. Se tiene que $\mathfrak{R}^n = E \oplus P \oplus N$ y $E \cap P \cap N = \{0\}$.

12.2.1. Comportamiento dinámico de una ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes de orden superior

Una ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes de orden n se puede transformar en el sistema lineal equivalente, por lo que:

- Sus soluciones son asintóticamente estables si las raíces de su ecuación característica tienen su parte real estrictamente negativa.
- Sus soluciones son inestables si alguna raíz tiene su parte real positiva.
- Si la ecuación característica tiene raíces de parte real nula, el estudio debe hacerse de forma detallada ya que el origen puede ser un centro (si las raíces son imaginarias puras), o puede ser un nodo degenerado.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 12.2.1:

Estudiar la dinámica del sistema: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = 0 \end{cases}$ y estudiar la dinámica de $y'' = 0$.

En este sistema los autovalores son $\lambda = 0$ doble, por lo que la solución general del sistema lineal homogéneo es:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix},$$

que es una solución no acotada si C_2 es distinto de cero. Se observa que las soluciones acotadas son un subespacio vectorial de dimensión uno:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

La matriz de Jordan asociada no es diagonalizable, y por ello, aunque la parte real de los autovalores sea nula, todas las soluciones no son acotadas.

La ecuación diferencial $y'' = 0$ tiene la ecuación característica $r^2 = 0$, de raíz doble $r = 0$. Su solución general es: $y(t) = C_1 + C_2 t$, que si C_2 es distinto de cero, no es acotada. Su sistema asociado es el anterior, por lo que se conoce también $y'(t) = C_2$.

Ejemplo 12.2.2:

Estudiar la dinámica del sistema:
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y \\ \frac{dy}{dt} = -2x \end{cases}.$$

En este sistema los autovalores son $\lambda = 2i$ y $\lambda = -2i$. La solución general del sistema lineal homogéneo es:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \sin 2t \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = C_1 \sin 2t \\ y_2(t) = C_2 \cos 2t \end{cases}$$

Las trayectorias son las elipses: $\frac{y_1^2}{C_1^2} + \frac{y_2^2}{C_2^2} = 1$. El origen es un centro. Es un punto crítico estable, pero no asintóticamente estable. Las soluciones son periódicas de periodo π , acotadas. En este caso $\mathfrak{R}^2 = P$ y $E = N = \{0\}$.

Ejemplo 12.2.3:

Estudiar la dinámica del sistema $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$ siendo $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

Se tienen los autovalores $\lambda = \pm 2i$ dobles, y la dimensión del núcleo es: $\dim N(\mathbf{A} - 2iI) = 1$.

La solución general del sistema es:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\sin 2t \\ 0 \\ \sin 2t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \\ 0 \\ -\cos 2t \end{pmatrix} + C_3 t \cdot \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\sin 2t \\ 0 \\ \sin 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos 2t \\ 0 \\ \cos 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix} + C_4 t \cdot \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \\ 0 \\ -\cos 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin 2t \\ 0 \\ \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}$$

Si C_3 y C_4 son distintos de cero se tienen soluciones no acotadas. Sin embargo si $C_3 = C_4 = 0$ se tiene un subespacio de dimensión dos de soluciones periódicas, de periodo π , acotadas.

Ejercicios

12.7. Estudiar la dinámica de los sistemas lineales siguientes, determinar la solución general, dibujar el diagrama de fase y analizar los subespacios E , P y N :

a)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -2y \end{cases}, \text{ autovalores: } 0 \text{ y } -2; E = \{(1, -2)\}, P = \{(1, 0)\} \text{ y } N = \{(0, 0)\}.$$

b)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + y \\ \frac{dz}{dt} = 0 \end{cases} \text{ autovalores: } -2, 0 \text{ y } 2; E = \{(1, -1, 0)\}, P = \{(0, 0, 1)\} \text{ y } N = \{(1, -3, 0)\}.$$

c)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x \\ \frac{dz}{dt} = -z \end{cases} \text{ autovalores: } -1, i \text{ y } -i; E = \{(0, 0, 1)\}, P = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\} \text{ y } N = \{(0, 0, 0)\}.$$

12.8. En los sistemas lineales siguientes, comprobar si los autovalores y los autovectores son los indicados, dibujar las rectas que determinan dichos autovectores, determinar la solución general y dibujar el diagrama de fase.

a)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}, \text{ autovalores: } 1 \text{ y } 2; \text{ autovectores: } (0, 1) \text{ y } (1, 1).$$

b)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}, \text{ autovalor: } 2 \text{ doble; autovector: } (1, -1).$$

c)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = -4y \end{cases}, \text{ autovalores: } -4 \text{ y } 2; \text{ autovectores: } (1, 0) \text{ y } (-1, 2).$$

d)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases}, \text{ autovalores: } 3 \text{ y } 1; \text{ autovectores: } (6, -2) \text{ y } (-1, 1).$$

12.3. SISTEMAS CASI-LINEALES

Los casos más sencillos de sistemas autónomos son los **sistemas casi lineales**, aquellos que se pueden escribir como: $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{h}(\mathbf{y})$, donde se tiene un sistema lineal de coeficientes constantes asociado y el origen es un punto crítico, siendo la función $\mathbf{h}(\mathbf{y})$ continua y con derivadas parciales continuas en un entorno del origen, y anulándose la función y dichas derivadas en el origen. Estos sistemas se comportan localmente de forma similar al sistema lineal asociado, manteniendo nodos, puntos de silla, espirales, aunque los centros o los nodos degenerados no se puede asegurar que se mantengan. En estas condiciones se observa que la matriz $\mathbf{A}$ es la matriz jacobiana de $\mathbf{f}(\mathbf{y})$ en el origen.

Si el problema se puede escribir de la forma: $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{h}(\mathbf{y})$, donde $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada $n \times n$ constante, y se supone que todos los autovalores de $\mathbf{A}$ satisfacen que su parte real es negativa y que la matriz $\mathbf{h}(\mathbf{y})$ satisface que $|\mathbf{h}(\mathbf{y})| = o(|\mathbf{y}|)$ cuando $|\mathbf{y}|$ tiende a cero, entonces la solución $\mathbf{y} = 0$ es asintóticamente estable.

En general, dado un sistema no lineal: $\mathbf{y}' = \mathbf{g}(t, \mathbf{y})$ se pretende linealizarlo mediante el sistema $\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{y} + \mathbf{h}(t, \mathbf{y})$ donde $\mathbf{A}(t)$ es la matriz jacobiana de la función $\mathbf{g}$, por lo que $\mathbf{h}(t, 0) = 0$, y se podría conjeturar que $\mathbf{g}(t, \mathbf{y})$ se puede aproximar en un entorno del origen por $\mathbf{A}(t)$. Sin embargo esta conjetura no siempre es válida, pues por ejemplo el sistema $y' = y^2$ tiene su matriz jacobiana nula y su sistema lineal asociado es $y' = 0$ que no explica al sistema no lineal de partida: $y' = y^2$, de solución $y = -1/x$.

Definición 12.3.1:

Sea V un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que contiene en su interior al origen. Sean $f_1, \dots, f_n$ funciones reales en V que se anulan en el origen y cuyas derivadas parciales son continuas y también se anulan en el origen. Entonces el sistema:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n + f_1(y_1, \dots, y_n) \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dt} = a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n + f_n(y_1, \dots, y_n) \end{cases} \quad (12.3.1)$$

es **casi lineal** en el origen.

Para saber si un sistema es casi lineal en un punto P , entonces se traslada P al origen y se comprueba si el nuevo sistema es casi lineal en el origen.

Al ser las funciones $f_1, \dots, f_n$ continuas respecto a las variables $y_1, \dots, y_n$ pero ser independientes del tiempo, el sistema anterior (12.3.1) es autónomo.

Al sistema lineal:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dt} = a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n \end{cases} \quad (12.3.2)$$

se le denomina su **sistema auxiliar**, y a la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

su **matriz asociada**.

Al imponer que se anulen las derivadas parciales primeras en el origen el sistema lineal auxiliar resulta ser una primera aproximación del sistema de partida y la matriz asociada A es la matriz jacobiana en el origen del sistema de partida.

Se pueden estudiar en el sistema lineal auxiliar las nociones de estabilidad, estabilidad asintótica, no estabilidad para el origen. Se tiene el siguiente teorema debido a Lyapunov y probado por Boyce y por Di Prima en 1986:

Teorema 12.3.1:

Sea un sistema casi lineal en el origen (como el 12.3.1). Si el origen es asintóticamente estable (respectivamente inestable) para el sistema lineal auxiliar (12.3.2), entonces el origen es asintóticamente estable (respectivamente inestable) para el sistema casi lineal 12.3.1.

Como consecuencia, si el punto crítico es un nodo, un punto de silla o un punto espiral en el sistema lineal auxiliar, entonces el punto crítico del sistema casi lineal es del mismo tipo.

Sin embargo los nodos degenerados y los centros del sistema lineal auxiliar no son heredados por el sistema casi lineal. Es más, si el sistema auxiliar tiene un centro, entonces el punto crítico del sistema casi lineal puede ser asintóticamente estable o ser inestable. La razón se debe a que los centros surgen cuando la parte real del autovalor complejo vale exactamente cero, $\alpha = 0$, y pequeños cambios en este valor pueden alterar la naturaleza del punto crítico al hacer $\alpha < 0$ o $\alpha > 0$. Algo parecido sucede con los nodos degenerados que surgen cuando exactamente $\lambda = \mu$, y pequeños cambios pueden hacer $\lambda < \mu$ o $\lambda > \mu$.

Sin embargo si la parte real de los autovalores verifica que $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$, (o $\lambda_1 < \dots < \lambda_n < 0$), por la continuidad de las funciones, en algún entorno sigue siendo cierto que $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$, (o $\lambda_1 < \dots < \lambda_n < 0$) por lo que se heredan las nociones de estabilidad asintótica y de inestabilidad.

Si la parte real de los autovalores verifica que $\lambda_1 < \dots < \lambda_n < 0$ se tiene que las soluciones que empiezan cerca del origen se acercan a él, siendo éste un atractor. Si los autovalores son complejos es un nodo en espiral. Si por el contrario todos tienen la parte real positiva entonces el origen es un repulsor o fuente, y si son complejos es una fuente en espiral. Si hay autovalores con la parte real positiva y otros con la parte real negativa entonces es un punto de silla, y hay curvas de soluciones que se acercan al origen y otras que se alejan.

En los sistemas casi lineales no se verifica el teorema de 12.1.1 de los sistemas lineales homogéneos que decía que el origen es el único punto crítico si y sólo si cero no es un autovalor. Aunque los autovalores del sistema auxiliar sean todos distintos de cero, el sistema casi lineal puede tener otros puntos críticos distintos de cero que deben estudiarse independientemente.

Tampoco esta clasificación de los puntos de equilibrio asegura nada respecto del comportamiento de las soluciones cuyas posiciones iniciales estén lejos del punto de equilibrio estudiado.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 12.3.1:

Estudiar la dinámica de las soluciones del sistema casi lineal siguiente en un entorno del origen:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + y + 2xy \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}.$$

El sistema dado es casi lineal, pues $f_1(x, y) = 2xy$, que es una función continua que se anula en el origen, y sus derivadas parciales respecto a x y respecto a y son: $2y$ y $2x$, respectivamente, que también se anulan en el origen.

El sistema auxiliar es:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + y \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}, \text{ y su matriz asociada: } \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ cuyos autovalores son:}$$

$$\lambda = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} < 0 < \mu = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}.$$

Son autovalores reales, uno positivo y otro negativo, por lo que el origen es un punto de silla en el sistema auxiliar, que es un punto inestable, luego el sistema de partida, por el teorema 12.2.1 tiene en el origen un punto inestable.

Este sistema tiene otro punto crítico, el punto $(3/2, -3/2)$.

Ejemplo 12.3.2:

Estudiar la dinámica de las soluciones del sistema casi lineal siguiente:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + y + 2xy \\ \frac{dy}{dt} = x + y + 1 \end{cases}.$$

El sistema propuesto tiene puntos críticos distintos del origen, lo que no podía suceder con los sistemas lineales homogéneos por el teorema 12.1.1. Para determinar los puntos críticos se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} -2x + y + 2xy = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases},$$

y se obtiene que $(1, -2)$ es un punto crítico. Se trasladan los ejes a dicho punto: $x = 1 + u$; $y = -2 + v$, con lo que el sistema obtenido es:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -2u + v + 2uv \\ \frac{dv}{dt} = u + v \end{cases},$$

cuya dinámica se conoce por el ejemplo 12.3.1. Es un sistema casi lineal en el origen siendo éste un punto no estable, un punto de silla, y en consecuencia el punto $(1, -2)$ es un punto crítico inestable.

Ejemplo 12.3.3:

Estudiar la dinámica de las soluciones del sistema casi lineal siguiente:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y - x^3 - xy^2 \\ \frac{dy}{dt} = x + y - x^2y - y^3 \end{cases}.$$

El sistema es casi lineal y tiene un punto crítico en el origen siendo:

$$f_1(x, y) = -x^3 - xy^2; f_2(x, y) = -x^2y - y^3,$$

funciones que se anulan en el origen y cuyas derivadas parciales primeras también se anulan en el origen. Para estudiar el comportamiento del sistema cuando el tiempo tiende a infinito, se hace un cambio a coordenadas polares, utilizando la regla de la cadena, y se obtiene:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = r - r^3 \\ \frac{d\theta}{dt} = 1 \end{cases}.$$

Para $r = 0$, se tiene el punto fijo del origen.

Por los teoremas de existencia y unicidad de las soluciones se sabe que por todo punto de $\mathbb{R}^2$ pasa una única órbita.

Caso 1: Si en el instante inicial $\|\mathbf{y}(0)\| = 1$, entonces para todo $t > 0$ se tiene que:

$$r = 1 \Rightarrow \frac{dr}{dt} = 0 \Rightarrow \|\mathbf{y}(0)\| = 1 \text{ y } \|\mathbf{y}(t)\| = 1, \forall t,$$

Se obtiene una órbita que es cerrada y acotada, la circunferencia de centro el origen y radio uno, y al ser constante la derivada respecto el ángulo, dicha órbita se recorre con velocidad constante.

Caso 2: Si en el instante inicial $0 < \|y(0)\| < 1 \Rightarrow 0 < r < 1$ para todo t , entonces $\frac{dr}{dt} = r(1 - r^2) > 0$ para todo $t > 0$, por lo que $r(t)$ es una función creciente, y su límite tiende a 1, y por tanto $\|y(t)\|$ crece siendo $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t)\| = 1$.

Caso 3: Si en el instante inicial $\|y(0)\| > 1$, entonces $\frac{dr}{dt} = r(1 - r^2) < 0$ para todo $t > 0$, por lo que $r(t)$ es una función decreciente, y su límite tiende a 1 y $\|y(t)\|$ decrece siendo $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t)\| = 1$.

En ese caso se tiene que cualquier trayectoria o es la circunferencia de centro el origen y radio uno, o se aproxima a ella. Como la circunferencia de centro el origen y radio uno es cerrada y acotada es un **ciclo límite**.

Ejercicios

12.9. En los sistemas siguientes determinar cuáles son casi lineales, y en los que lo sean, determina, cuando sea posible, su dinámica:

a)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 3y - x^2y \end{cases}.$$

b)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 2y + 1 - e^{xy} \\ \frac{dy}{dt} = x - y + x \operatorname{sen} y \end{cases}.$$

c)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x^3 \\ \frac{dy}{dt} = x + y - xy \end{cases}.$$

12.10. Los sistemas siguientes modelizan poblaciones de especies, unas cooperativas y otras en competencia. Indicar qué modelos son de cada tipo. Determinar los puntos de equilibrio. Estudiar su dinámica:

a)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x + 2xy \\ \frac{dy}{dt} = -3y + 3xy \end{cases}.$$

b)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - x^2 - 2xy \\ \frac{dy}{dt} = 3y - 2xy - y^2 \end{cases}.$$

c)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5x + 3xy \\ \frac{dy}{dt} = -3y + 4xy \end{cases}.$$

d)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 8x - 2x^2 - 3xy \\ \frac{dy}{dt} = 4y - 3xy - 2y^2 \end{cases}.$$

12.4. SISTEMAS BIDIMENSIONALES

AUTÓNOMOS

En sistemas de dimensión n se ha estudiado la estructura que tienen las soluciones en un entorno del punto de equilibrio, y se ha visto que éstos pueden ser puntos espirales, nodos, centros, puntos de silla... Naturalmente todo esto es válido en los sistemas casilineales autónomos de dimensión dos. En esta sección se analizan dichos sistemas con mayor detenimiento, estudiando el teorema de Poincaré - Bendixson, que sólo es válido para sistemas autónomos de dimensión dos, y se completa con el estudio de distintos ejemplos y aplicaciones de éstos sistemas.

12.4.1. Teorema de Poincaré - Bendixson

En los sistemas de dimensión dos es de gran belleza y utilidad el **teorema de Poincaré-Bendixson** que describe los conjuntos límite de las órbitas afirmando que, bajo determinadas condiciones, existen soluciones periódicas, cuyas trayectorias o son puntos críticos o ciclo-límites o unión de estos conjuntos.

Se ha visto que un sistema lineal homogéneo puede tener un atractor si el origen es un punto asintóticamente estable. En $\mathbb{R}^2$ se han visto ejemplos de órbitas acotadas o de elipses concéntricas que no son atractores. Si el sistema es casi lineal puede tener un atractor que sea un punto límite asintóticamente estable,

o puede tener un ciclo límite o la unión de puntos críticos y ciclos límites que sean atractores.

El siguiente teorema, el teorema de Poincaré – Bendixson dice como deben ser los atractores para sistemas autónomos en $\mathbb{R}^2$.

Teorema 12.4.2:

Sea el sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

donde f y g son funciones continuas. Si una trayectoria permanece acotada cuando t tiende a infinito, entonces la trayectoria es un punto crítico o un ciclo límite, o se aproxima a un punto crítico o a un ciclo límite.

Este interesante teorema dice que si un sistema autónomo de dimensión dos tiene un atractor, necesariamente éste es unión de puntos límites o ciclos límites, y en consecuencia, no puede ser un atractor extraño. Esto no es cierto si el sistema es de dimensión tres, como se estudiará en la sección sexta (12.6.3), al analizar el sistema de Lorenz. Con sistemas de dimensión superior a dos pueden aparecer atractores extraños y una dinámica de tipo caótico.

12.4.2. Dinámica del péndulo

En esta sección se utiliza la teoría de los sistemas casi lineales para estudiar

la dinámica de un péndulo que ya se estudió en el capítulo 7, apartado 7.2.3.

Se supone un péndulo de longitud L , de masa m y que g es la aceleración debida a la gravedad. Sea $\varphi(t)$ el ángulo del péndulo con la vertical en el tiempo t .

12.4.2.1. Dinámica del péndulo ideal, sin rozamiento ni fuerzas externas

De momento se supone que no existe rozamiento, ni fuerzas externas, es decir, el péndulo está en el vacío únicamente bajo la influencia de la gravedad. En estas condiciones el movimiento del péndulo está determinado por la ecuación diferencial:

$$m \cdot L \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + m \cdot g \cdot \operatorname{sen}\varphi = 0.$$

Transformando la ecuación diferencial de orden dos en un sistema, denominando $x = \varphi$ e $y = \varphi'$, se tiene:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{L} \operatorname{sen} x \end{cases} \quad (12.4.1)$$

que se denomina **sistema del péndulo**. Se observa que este sistema no es lineal debido al término en $\operatorname{sen} x$, y no es sencillo encontrar las soluciones de (12.4.1). Sin embargo es un sistema casi lineal en el origen.

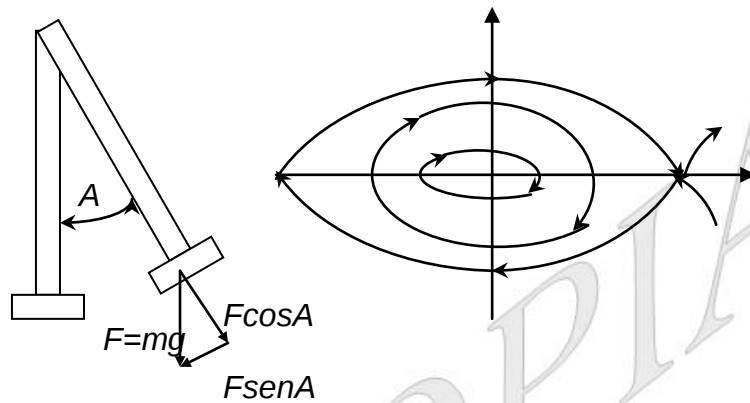


Figura 12.14: Diagrama de fase del péndulo sin rozamiento ni fuerza externa.

Teorema 12.4.1:

El sistema del péndulo (12.4.1) es un sistema casi lineal en el origen.

Demostración:

La primera ecuación del sistema es lineal. La segunda ecuación se puede escribir como: $y' = (-g/L) \cdot x + f(x, y)$ siendo $f(x, y) = (g/L) \cdot x - (g/L) \cdot \sin x$.

La función $f(x, y)$ es continua y con derivadas parciales continuas. Se anula en el origen: $f(0, 0) = 0$, y sus derivadas parciales $f_x(x, y) = (g/L) - (g/L) \cdot \cos x$, $f_y(x, y) = 0$, se anulan en el origen: $f_x(0, 0) = (g/L) - (g/L) = 0$, $f_y(0, 0) = 0$, por lo que el sistema del péndulo es casi lineal en el origen. $\square$

Se estudia el sistema lineal auxiliar para analizar la dinámica en el origen:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{L} x \end{cases},$$

de matriz asociada:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & 0 \end{pmatrix}$$

de autovalores: $\lambda = \pm \sqrt{\frac{g}{L}} i$, que son imaginarios puros, por lo que el origen es un centro en el sistema lineal auxiliar, y por tanto es un punto crítico estable, aunque no asintóticamente estable. El diagrama de fase está formado por las órbitas de las soluciones que son elipses.

La velocidad angular es positiva cuando el péndulo se mueve hacia la derecha y negativa si se mueve hacia la izquierda.

12.4.2.2. Dinámica del péndulo con rozamiento

Se supone que existe rozamiento debido a la fricción con el aire o por otro medio. La ecuación diferencial es entonces:

$$m \cdot L^2 \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + c \cdot L \cdot \frac{d\varphi}{dt} + m \cdot g \cdot L \cdot \sin \varphi = 0.$$

Transformando la ecuación de orden dos en un sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{L} \sin x - \frac{c}{mL} y \end{cases} \quad (12.4.2.)$$

Este nuevo sistema del péndulo tampoco es lineal, pero es casi lineal en el origen, siendo $f(x, y) = (g/L)x - (g/L) \cdot \sin x$ y su sistema lineal asociado:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{L}x - \frac{c}{mL}y \end{cases},$$

de matriz asociada:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & -\frac{c}{mL} \end{pmatrix}$$

$$\text{de autovalores: } \lambda = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4gm^2L}}{2mL} \text{ y } \mu = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4gm^2L}}{2mL}.$$

La naturaleza del punto crítico depende de los valores de λ y μ , que a su vez depende de los valores de c , m y L . Si $c > 0$, (con m y L positivos) se observa que ambos autovalores son negativos, y por tanto el origen es un punto crítico asintóticamente estable. Esta consecuencia es realista, pues al haber resistencia del aire, todas las soluciones tienden hacia la posición vertical.

El sistema 12.4.2 tiene puntos críticos distintos del $(0, 0)$, son los puntos $\mathbf{v}_n = (n\pi, 0)$ para n entero. Se trasladan los ejes a dichos puntos: $x = n\pi + u$; $y = v$ y el sistema se transforma en:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -\frac{g}{L}\sin(n\pi + u) - \frac{c}{mL}v \end{cases} \quad (12.4.3)$$

Teorema 12.4.2:

El sistema del péndulo (12.4.3) es un sistema casi lineal en los puntos $\mathbf{v}_n = (n\pi, 0)$ para n entero.

Demostración:

La primera ecuación del sistema es lineal. La segunda ecuación se puede escribir como:

$$v' = (-g/L) \cdot u - (c/mL) \cdot v + f(u, v)$$

siendo $f(u, v) = (g/L) \cdot u - (g/L) \cdot \sin(n\pi + u)$.

La función $f(u, v)$ es continua y con derivadas parciales continuas. Se anula en el origen: $f(0, 0) = 0$, y sus derivadas parciales $f_x(x, y) = (g/L) - (g/L) \cdot \cos(n\pi + u)$, $f_y(x, y) = 0$, se anulan en el origen: $f_x(0, 0) = 0$, $f_y(0, 0) = 0$, por lo que el sistema del péndulo es casi lineal en el nuevo origen. $\square$

Para n par el sistema es idéntico al caso del origen, y para n impar se tiene $f(u, v) = (g/L) \cdot u + (g/L) \cdot \sin u$. Se analiza el comportamiento del péndulo en el punto $\mathbf{v}_1 = (\pi, 0)$. El sistema lineal auxiliar es:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = \frac{g}{L}u - \frac{c}{mL}v \end{cases},$$

de matriz asociada:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{L} & -\frac{c}{mL} \end{pmatrix}$$

de autovalores: $\lambda = \frac{-c - \sqrt{c^2 + 4gm^2L}}{2mL}$ y $\mu = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4gm^2L}}{2mL}$.

Ahora, en todos los casos, los autovalores son reales, pues el término de dentro de la raíz es positivo, pero se observa que λ es negativo, mientras que μ es positivo: $\lambda < 0 < \mu$. En consecuencia el punto es un punto de silla, punto crítico inestable.

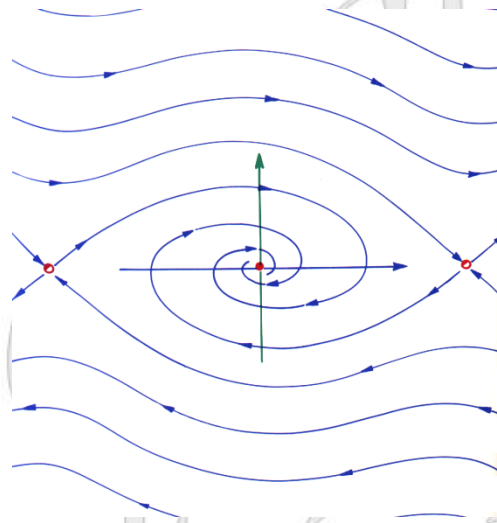


Figura 12.15: Diagrama de fase del péndulo con rozamiento

Si ahora se quiere estudiar lo que ocurre cuando se tiene una fuerza externa, el sistema obtenido ya no es autónomo. Su resolución se complica. Se pueden obtener soluciones con el ordenador usando programas especiales.

12.4.3. Dinámica de poblaciones: sistemas de *Lotka-Volterra*

Vito Volterra (1 860 – 1 940), importante matemático italiano, utilizó como modelo para explicar la dinámica de una población en la que coexisten unas presas y unos depredadores, un sistema de ecuaciones diferenciales. Se habían

recogido datos estadísticos que mostraban que en el mar Adriático durante la primera guerra mundial habían aumentado porcentualmente más la cantidad de unos peces no comestibles (depredadores) que los que habían dejado de capturarse, comestibles (presas), al disminuir la actividad pesquera. Este modelo se ha utilizado con éxito, por ejemplo, para explicar el comportamiento de las poblaciones de conejos y zorros o para explicar el incremento de la población de tiburones en el Mediterráneo durante la primera guerra mundial al haber disminuido la pesca, y por tanto aumentado las presas. Explica también como el uso de insecticidas puede hacer crecer el número de insectos dañinos al matar también a sus depredadores naturales.

Este modelo se basa en las siguientes hipótesis:

- Si no hay depredadores, las presas, x , no tienen limitaciones en su crecimiento: $x' = ax$, $a > 0$.
- La presencia de los depredadores, y , hace disminuir el número de presas de forma proporcional al número de depredadores:

$$x' = ax - bxy, a, b > 0.$$

- Los depredadores se alimentan exclusivamente de las presas, por lo que en ausencia de ellas, se extinguirían: $y' = -cy$, $c > 0$.
- Cuantas más presas hay, más aumenta el número de depredadores:

$$y' = -cy + dxy, c, d > 0.$$

El sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy \end{cases}, a, b, c, d > 0$$

se conoce con el nombre de Lotka-Volterra debido a que ya había sido propuesto por Alfred J. Lotka como modelo de ciertas reacciones químicas.

Es un sistema bidimensional autónomo. El origen es un punto crítico, que se explica porque si no hay ni presas ni depredadores, nunca los habrá. El sistema sólo tiene sentido físico para valores positivos de las variables x e y , pues no puede haber un número negativo de presas ni de depredadores. Además, si en el instante inicial una de las variables es nula, la otra si es presa, aumenta exponencialmente, y disminuye exponencialmente si es depredador, por lo que sus trayectorias recorren los semiejes positivos.

Para obtener los puntos de equilibrio se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} ax - bxy = 0 \\ -cy + dxy = 0 \end{cases}$$

y se obtienen dos puntos de equilibrio, el origen $(0, 0)$, y el punto $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$. El origen es un punto de equilibrio inestable que indica que si no existen ni presas ni depredadores, nunca los habrá. El otro punto es de más interés, pues indica que si se llegara a esa posición, las presas sería devoradas y los depredadores tendrían alimento, pero ambas poblaciones se mantendrían estables. Se trasladan los ejes a este punto, $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ y se busca el sistema lineal asociado cuya matriz asociada

es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -bc \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

de autovalores imaginarios puros: $\pm i\sqrt{ac}$ por lo que las órbitas son cerradas y el punto es un centro, punto de equilibrio estable, pero no asintóticamente estable, que corresponde con soluciones periódicas. Este tipo de equilibrio no es posible garantizar que se mantiene para el sistema no lineal de partida.

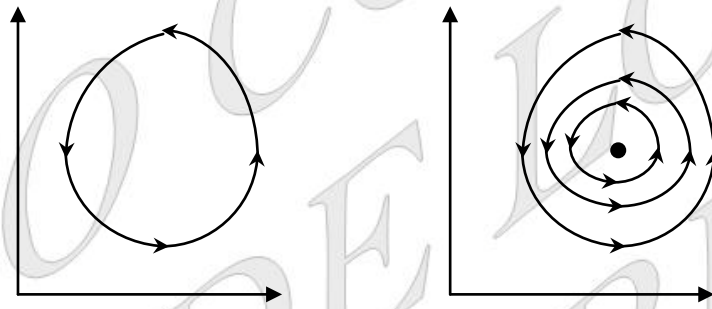


Figura 12.16: Sistema presa – depredador de Lotka-Volterra.

Analizando el diagrama de fase, es posible hacerse una idea del comportamiento del sistema. Por ejemplo observando la región inferior derecha, es decir si x es “grande” e y es “pequeño”, se comprueba que ambas poblaciones, de presas y de depredadores aumentan por la abundancia de presas y la escasez de enemigos. El diagrama sugiere un movimiento oscilatorio alrededor del punto de equilibrio.

La solución de este sistema ya se comentó en el capítulo 7, apartado 7.2.6 y se resolvió en el capítulo 9, apartado 9.3.3 integrando la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-cy + dxy}{ax - bxy}.$$

Se comprueba que las poblaciones de depredadores y presas oscilan periódicamente con amplitud y periodo que dependen de las condiciones iniciales.

Al interpretar el sistema casi lineal de partida, al ser el punto de equilibrio del sistema lineal asociado un centro, que no se conserva, puede ocurrir que sea un punto en espiral estable, un punto en espiral inestable o que exista un ciclo límite (en el caso de introducir la posibilidad de que el punto de equilibrio sea repulsor, pero las órbitas sean atraídas por el ciclo límite como se observa en la figura 12.17).

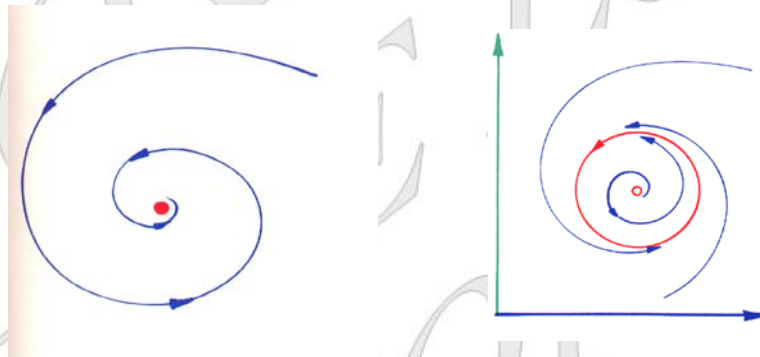


Figura 12.17: Sistema presa – depredador de Lotka-Volterra.

El modelo se puede hacer más realista añadiendo nuevas hipótesis, como que las presas compitan entre sí por el alimento siguiendo una ecuación logística:

$$x' = x(a - \lambda x) - bxy.$$

Se puede suponer también que los depredadores siguen una ecuación logística. Al estudiar este nuevo sistema aparece un nuevo punto crítico en el eje

de abscisas: $\left(\frac{a}{\lambda}, 0\right)$ y depende de los valores de los parámetros su determinación.

Al estudiar el sistema lineal asociado, al trasladar los ejes a este punto, se tiene que si $a/\lambda < c/d$ entonces es un punto asintóticamente estable y si $a/\lambda > c/d$ entonces es un punto inestable.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 12.4.1:

Estudiar la dinámica del sistema de Van der Pol siguiente:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x + y - x^2y \end{cases}.$$

El sistema es casi lineal y tiene un único punto crítico en el origen con $f_2(x, y) = -x^2y$, que se anula en el origen así como sus derivadas parciales primeras, siendo el sistema lineal asociado:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x + y \end{cases},$$

cuyos autovalores son: $\lambda = (1 \pm \sqrt{3}i)/2$. Son autovalores complejos, con parte real positiva, luego las soluciones del sistema lineal se mueven en espiral alejándose del origen, que es un punto inestable. Por tanto, cerca del origen, las soluciones del sistema de Van der Pol también se alejarán en espiral.

Ejemplo 12.4.2:

Estudiar la dinámica del sistema que modela la competencia entre dos especies siguiente:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - x^2 - xy \\ \frac{dy}{dt} = 3y - y^2 - 2xy \end{cases}.$$

Este sistema modela la dinámica de dos poblaciones que compiten por los recursos. Se comprueba que un aumento de una de las especies hace disminuir a la otra.

Si se hace $x = 0$, entonces $x' = 0$, e $y' = 3y(1 - y/3)$, un modelo logístico de población siendo su diagrama de fase el eje de ordenadas con puntos de equilibrio en $(0, 0)$ y $(0, 3)$. Igualmente si $y = 0$, entonces $y' = 0$, e $x' = 2x(1 - x/2)$, un modelo logístico de población siendo su diagrama de fase el eje de abscisas con puntos de equilibrio en $(0, 0)$ y $(2, 0)$. Al modelizar poblaciones y no tener sentido los valores negativos y al coincidir los ejes con curvas solución las soluciones que interesan son únicamente las del primer cuadrante.

Se resuelve el sistema para hallar los puntos de equilibrio y se obtiene que son $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 3)$ y $(1, 1)$.

El punto $(1, 1)$ tiene su interés. Se traslada a él el origen mediante: $u = x - 1$, $v = y - 1$, y se obtiene:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -u - v - u^2 - uv \\ \frac{dv}{dt} = -2u - v - v^2 - 2uv \end{cases}.$$

El sistema es casi lineal con $f_1(u, v) = -u^2 - uv$ y $f_2(u, v) = -v^2 - 2uv$, que se anulan en el origen así como sus derivadas parciales primeras, siendo el sistema lineal asociado:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -u - v \\ \frac{dv}{dt} = -2u - v \end{cases},$$

cuyos autovalores son: $\lambda = 1 \pm \sqrt{2}$, uno positivo y el otro negativo por lo que $(u, v) = (0, 0)$ es un punto de silla de este sistema lineal asociado. Por tanto, cerca del punto $(1, 1)$, las soluciones del sistema no lineal se comportarán como un punto de silla.

Ejercicios

12.11. Estudiar la dinámica del sistema que modela la competencia entre dos especies siguiente:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 10x - x^2 - xy \\ \frac{dy}{dt} = 30y - y^2 - 2xy \end{cases}.$$

12.12. En general un sistema de Lotka – Volterra que modela el comportamiento de dos especies en competencia es:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax - Bx^2 - Cxy \\ \frac{dy}{dt} = Dy - Ey^2 - Fxy \end{cases}$$

donde x , y son positivas y los parámetros A , B , C , D , E y F son positivos.

Para que valores de los parámetros existe al menos un punto de equilibrio para $x > 0$ y $y > 0$.

12.5. ESTABILIDAD EN SISTEMAS HAMILTONIANOS O CONSERVATIVOS, EN SISTEMAS DISIPATIVOS Y EN SISTEMAS GRADIENTE

En esta sección se estudian unos sistemas que deben su nombre al matemático irlandés William Rowan Hamilton (1805 – 1865), en los que se conserva la energía, otros se que deben al matemático ruso Aleksandr Mikhaïlovich Lyapunov (1857 – 1918) en los que la energía se disipa, y otros denominados sistemas gradiente.

12.5.1. Sistemas conservativos y funciones de Hamilton

Definición 12.5.1:

Un sistemas de ecuaciones diferenciales se denomina **sistema hamiltoniano** o **sistema conservativo** si existe una función real $H(x, y)$ que verifica, para todo x e y , que:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H(x,y)}{\partial y} \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H(x,y)}{\partial x} \end{cases}$$

A la función $H(x, y)$ se la denomina **función de Hamilton** para el sistema.

Proposición 12.5.1:

La función $H(x, y)$ se conserva en cualquier solución del sistema.

Demostración:

Sea $(x(t), y(t))$ cualquier solución del sistema, entonces, por la regla de la cadena y la definición, se sigue que:

$$\frac{dH(x(t), y(t))}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial y} \cdot \left(-\frac{\partial H}{\partial x}\right) = 0. \quad \square$$

Por tanto las curvas solución del sistema se encuentran a lo largo de las curvas de nivel de la función $H(x, y)$, con lo que para esbozar el diagrama de fase de estos sistemas, basta con dibujar las curvas de nivel de la función hamiltoniana. Por desgracia es difícil encontrar sistemas que sean hamiltonianos. A continuación se estudia cómo determinar si un sistema lo es.

Proposición 12.5.2:

Si $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y}$, entonces el sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

es hamiltoniano.

Demostración:

Si se tiene el sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

y se quiere saber si existe una función $H(x, y)$ tal que

$$\begin{cases} f(x, y) = \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} \\ g(x, y) = -\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} \end{cases}$$

Si dicha función tiene derivadas segundas continuas verifica la igualdad de sus derivadas cruzadas:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y} \quad \square$$

Una vez que se ha comprobado que un sistema es hamiltoniano, se puede construir la función H sin más que aplicar la definición e integrar:

Como $f(x, y) = \frac{\partial H(x, y)}{\partial y}$, entonces $H(x, y) = \int f(x, y) dy + C(x)$, donde $C(x)$

es una función que no depende de la variable y .

Como $-g(x, y) = \frac{\partial H(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int f(x, y) dy + C(x) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \int f(x, y) dy + C'(x)$,

despejando C' e integrando se obtiene $C(x)$ y por tanto $H(x, y)$.

Proposición 12.5.3:

Si el sistema $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x,y) \end{cases}$ es hamiltoniano, entonces sus puntos de

equilibrio no pueden ser ni atractores ni repulsores.

Demostración:

Sea (x_0, y_0) un punto de equilibrio del sistema, entonces su matriz jacobiana es:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} \end{pmatrix}.$$

Por la igualdad de las derivadas cruzadas, la matriz A tiene la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix},$$

siendo su ecuación característica: $\lambda^2 - a^2 - bc = 0$, y sus autovalores $\lambda = \pm \sqrt{a^2 + bc}$. Caben tres posibilidades:

Caso 1: $a^2 + bc > 0$. Los dos autovalores son reales y tienen distinto signo. El punto de equilibrio es inestable y es un punto de silla.

Caso 2: $a^2 + bc < 0$. Los dos autovalores son imaginarios puros, su parte real es nula. El punto de equilibrio es estable, pero no es asintóticamente estable, es un centro.

Caso 3: $a^2 + bc = 0$. El 0 es un autovalor doble. $\square$

12.5.2. Sistemas disipativos y funciones de Lyapunov

Los sistemas hamiltonianos o conservativos resultan ser una idealización de la realidad. Un péndulo no permanece indefinidamente oscilando. Sin embargo, el péndulo ideal sin rozamiento (estudiado en la sección 12.4.2 y en el ejemplo 12.5.2), se comprueba que es un sistema de Hamilton y permanece oscilando indefinidamente, y lo mismo ocurre con el oscilador armónico sin rozamiento que se estudia en el ejemplo 12.5.1. La idea de la función de Hamilton puede generalizarse utilizando las funciones de Lyapunov.

Definición 12.5.2:

Una función $L(x, y)$ es una **función de Lyapunov** para un sistema de ecuaciones diferenciales si, para cada solución $(x(t), y(t))$ que no sea una solución de equilibrio del sistema, se verifica que:

$$\frac{d}{dt}L(x(t), y(t)) \leq 0,$$

siendo la desigualdad estricta para todo t , salvo para un conjunto finito de valores de t . Se dice entonces que el sistema es **disipativo**.

En el caso de sistemas hamiltonianos, la derivada de la función de Hamilton es cero a lo largo de cualquier solución, ahora se impone que la función de Lyapunov nunca crezca, y que disminuya a lo largo de cualquier solución.

Estas funciones son de gran ayuda al dibujar el diagrama de fase, pues las soluciones deben cortar los conjuntos de nivel de las funciones de Lyapunov, pasando de valores mayores a menores.

No todos los sistemas tienen funciones de Lyapunov, o es sencillo encontrarlas. En los ejemplos que se verán al final de este apartado del oscilador armónico amortiguado, la función de Hamilton se transforma en la función de Lyapunov. En ese caso la energía no se conserva sino que se **disipa**.

12.5.3 Sistemas gradiente

Definición 12.5.3:

Un sistema de ecuaciones diferenciales se llama un **sistema gradiente** si existe una función $G(x, y)$ tal que:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{\partial G(x, y)}{\partial y} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial G(x, y)}{\partial x} \end{cases} \text{ para todo } (x, y).$$

Proposición 12.5.4:

La función $G(x, y)$ es creciente a lo largo de cualquier solución del sistema que no sea un punto crítico.

Demostración:

Sea $(x(t), y(t))$ cualquier solución del sistema que no sea un punto crítico, entonces, por la regla de la cadena y la definición, se sigue que:

$$\frac{dG(x(t), y(t))}{dt} = \frac{\partial G}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right)^2 \geq 0. \quad \square$$

Por tanto el valor de $G(x, y)$ aumenta a lo largo de las curvas solución del sistema que no sean puntos críticos. En consecuencia la función $-G(x, y)$ disminuye a lo largo de las soluciones y por tanto es una función de Lyapunov para ese sistema. Sin embargo no todos los sistemas que poseen función de Lyapunov provienen de funciones opuestas de sistemas gradientes. En el ejemplo 12.5.3 puede verse un sistema con función de Lyapunov en el que el origen es un atractor espiral, por lo que no puede deducirse de un sistema gradiente, como consecuencia de la siguientes proposición:

Proposición 12.5.5:

Si el sistema $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$ es un sistema gradiente, entonces sus puntos de

equilibrio no pueden ser ni centros ni nodos espirales.

Demostración:

Sea (x_0, y_0) un punto de equilibrio del sistema, entonces su matriz jacobiana asociada es:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x} \end{pmatrix}.$$

Por la igualdad de las derivadas cruzadas, la matriz A tiene la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

siendo su ecuación característica: $\lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2 = 0$, y sus autovalores

$$\lambda = \frac{a+c \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4ac + 4b^2}}{2} = \frac{(a+c) \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}.$$

El discriminante es siempre positivo por lo que los autovalores son siempre reales. En consecuencia los sistemas gradiente no pueden tener ni centros ni espirales. $\square$

Ejemplos resueltos

Ejemplo 12.5.1:

Estudiar si el sistema siguiente del oscilador armónico es hamiltoniano, y si lo es, determinar su función de Hamilton:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -kx \end{cases}.$$

Al ser $f(x, y) = y$ y $g(x, y) = -kx \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y} = 0$, y en consecuencia el

sistema es hamiltoniano, siendo:

$$H(x, y) = \int f(x, y) dy + C(x) = y^2/2 + C(x) = y^2/2 + kx^2/2.$$

Los conjuntos de nivel de la función $H(x, y)$ son elipses de centro el origen.

La variable x representa el desplazamiento y la variable y la velocidad.

Ejemplo 12.5.2:

Estudiar si el sistema siguiente del péndulo simple, sin rozamiento, es hamiltoniano, y si lo es, determinar su función hamiltoniana:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -g \sin x \end{cases}$$

Al ser $f(x, y) = y$ y $g(x, y) = -g \sin x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y} = 0$, y en consecuencia el

sistema es hamiltoniano, siendo:

$$H(x, y) = \int f(x, y) dy + C(x) = y^2/2 + C(x) = y^2/2 - g \cos x.$$

La variable x representa el ángulo que se desplaza el péndulo y la variable y su velocidad.

Los puntos de equilibrio $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ son centros. Cerca y alrededor de ellos las soluciones son periódicas, son soluciones oscilantes. Los puntos de equilibrio $\pm\pi, \pm 3\pi, \dots$ son puntos de silla. Las soluciones que pasan por ellos son separatrices. Estas soluciones separan a otras soluciones rotatorias que se tendrían para velocidades iniciales altas.

Ejemplo 12.5.3:

Comprobar si en el sistema siguiente la función $L(x, y) = x^2 + y^2$ es una función de Lyapunov del sistema, y determinar la dinámica del mismo:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y \\ \frac{dy}{dt} = -x - y \end{cases}.$$

Para comprobar si $L(x, y) = x^2 + y^2$ es una función de Lyapunov del sistema se calcula su derivada a lo largo de cualquier solución $(x(t), y(t))$ del sistema:

$$\frac{dL(x(t), y(t))}{dt} = 2x \cdot \frac{dx}{dt} + 2y \cdot \frac{dy}{dt} = 2x(-x + y) + 2y(-x - y) = -2(x^2 + y^2) \leq 0$$

anulándose únicamente en el origen, por lo que la función $L(x, y)$ es decreciente a lo largo de cualquier solución que no sea un punto de equilibrio, por lo que es una función de Lyapunov.

Para estudiar la dinámica del sistema se calculan los autovalores $\lambda = -1 \pm i$, por lo que el origen es un atractor en espiral, por tanto no puede ser $L = -G$ de un sistema gradiente.

Ejercicios

12.13. Estudiar si son hamiltonianos los sistemas siguientes y si lo son, determinar su función de Hamilton.

a)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y^2 \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 3y \end{cases}.$$

Solución: NO es hamiltoniano

b)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x - x^2 \end{cases} \quad \text{Solución: } H(x, y) = y^2/2 - x^2/2 + x^3/3$$

12.14. Comprobar que la función $L(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ es una función de Liapunov

para el sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x^3 \\ \frac{dy}{dt} = -y^3 \end{cases}.$$

12.6. DINÁMICAS CAÓTICAS

En esta sección se estudian nuevos ejemplos, ahora de dimensión mayor que dos, en los que ya no se verifica el teorema de Poincaré – Bendixon, y en los que aparecen nuevos fenómenos de gran interés, como las dinámicas caóticas.

12.6.1. El sistema de Lorenz

En la atmósfera ocurren fenómenos de convección, en los que el aire se mueve debido a las diferencias de temperatura entre unos lugares y otros. Cuando Lorenz escribió su artículo dijo la célebre frase de: *Puede el vuelo de una mariposa en Brasil formar un tornado en Tejas*, y desde entonces se habla del **Efecto Mariposa**. En este apartado se estudia el comportamiento del sistema de

Lorenz.

En 1916 Lord Rayleigh descubrió el número que lleva su nombre dado por:

$$R_a = g \cdot \alpha \cdot H^3 \cdot (\Delta T) \cdot \nu^{-1} \cdot k^{-1}. R_c = \pi^4 \frac{(1+a^2)^3}{a^2}$$

que depende, entre otros parámetros, de la gravedad, g , y de las diferencias de temperaturas, ΔT .

Cuarenta años más tarde, en 1962, Barry Saltzman obtuvo un sistema de ecuaciones diferenciales para describir la convección. Un año después Edward Lorenz estudió su famosa versión.

Definición 12.6.1:

Se denomina **sistema de Lorenz** al sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma y - \sigma x \\ \frac{dy}{dt} = rx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases} \quad (12.6.1)$$

donde t es el tiempo y las variables x , y y z no son coordenadas espaciales sino que x es proporcional a la intensidad del movimiento de convección, y es proporcional a la diferencia de temperaturas entre la corriente ascendente y la descendente y z es proporcional a la distorsión.

Las constantes son:

- σ es el número de Prandtl y vale ν/k , $\sigma = \nu/k$, siendo:

o ν = Coeficiente de viscosidad.

o k = Coeficiente de conductividad térmica.

➤ $r = R_\alpha/R_c$ siendo R_α y R_c los números de Lord Rayleigh.

➤ $b = 4/(1 + a^2)$.

Se observa que los tres coeficientes σ , r y b son positivos, r es función de ΔT y además es mayor que 1, $r > 1$. Lorenz realizó un estudio detallado del sistema (12.6.1) con la ayuda del ordenador.

Teorema 12.6.1:

El sistema de Lorenz es casi lineal en el origen.

Demostración:

El sistema lineal asociado es:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma y - \sigma x \\ \frac{dy}{dt} = rx - y \\ \frac{dz}{dt} = -bz \end{cases},$$

de matriz asociada:

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix},$$

por lo que $f_2(x, y, z) = -xz$, y $f_3(x, y, z) = xy$, funciones continuas que se anulan en $(0, 0, 0)$, y cuyas derivadas parciales primeras también se anulan en $(0, 0, 0)$. $\square$

Se estudia el sistema lineal asociado, y se calculan sus autovalores, que son:

$$\lambda_1 = \frac{-(\sigma+1) + \sqrt{(\sigma-1)^2 + 4r\sigma}}{2},$$

$$\lambda_2 = \frac{-(\sigma+1) - \sqrt{(\sigma-1)^2 + 4r\sigma}}{2},$$

$$\lambda_3 = -b.$$

Se observa que siempre $\lambda_3 = -b$, por lo que es un autovalor real y negativo.

Se analizan los siguientes tres casos:

- **Caso 1:** $0 < r < 1 \Rightarrow (\sigma-1)^2 + 4r\sigma = \sigma^2 - 2\sigma + 1 + 4r\sigma = \sigma^2 + 2\sigma + 1 - 4\sigma + 4r\sigma = (\sigma+1)^2 + 4\sigma(r-1) < (\sigma+1)^2$ pues $(r-1) < 0$. Por tanto λ_1 y λ_2 son autovalores reales y negativos. El origen es un nodo asintóticamente estable. La interpretación física es que la convención se anula al aumentar el tiempo.
- **Caso 2:** $r > 1 \Rightarrow (\sigma-1)^2 + 4r\sigma = (\sigma+1)^2 + 4\sigma(r-1) > (\sigma+1)^2$. Por tanto λ_1 es ahora un autovalor positivo, mientras λ_2 y λ_3 son autovalores reales y negativos. El origen es un punto de silla, un nodo inestable.
- **Caso 3:** $r = 1 \Rightarrow \lambda_1 = 0$, mientras λ_2 y λ_3 son autovalores reales y negativos, por lo que el origen es una solución estable.

Para $r = 1$ hay un cambio en la dinámica del sistema, por lo que $r = 1$ es una **bifurcación** para la familia de los sistemas de Lorenz considerando a r como parámetro, pues para valores de r menores de uno el origen es un punto crítico

asintóticamente estable y para valores de r mayores de uno, inestable.

Para $r > 1$ hay más puntos críticos.

Teorema 12.6.2:

Si $r > 1$, además del origen, existen dos nuevos puntos críticos P y Q para el sistema de Lorenz dados por: $P = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$ y $Q = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$.

Demostración:

Se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} \sigma y - \sigma x = 0 \\ rx - y - xz = 0 \\ xy - bz = 0 \end{cases}$$

Si $x = 0$, entonces $y = 0$ y $z = 0$, siendo el origen $(0, 0, 0)$ la solución obtenida.

Pero si x es distinto de cero entonces: $y = x \Rightarrow z = r-1 \Rightarrow x^2 = y^2 = b(r-1)$, por lo que se obtienen dos puntos críticos:

$$P = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1) \text{ y } Q = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1). \quad \square$$

Para estudiar la dinámica del sistema en las proximidades de ellos, se trasladan los ejes al punto P :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{b(r-1)} + u \Rightarrow x' = u' = -\sigma x + \sigma y = -\sigma u + \sigma v \\ y = \sqrt{b(r-1)} + v \Rightarrow y' = v' = rx - y - xz = u - v - \sqrt{b(r-1)} w \\ z = r-1 + w \Rightarrow z' = w' = xy - bz = \sqrt{b(r-1)} u + \sqrt{b(r-1)} v - bz. \end{array} \right.$$

La matriz asociada es:

$$A_P = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}.$$

La ecuación característica es:

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2b\sigma(r - 1) = 0.$$

Por simetría, la ecuación característica de Q es la misma que la de P , por lo que ambos puntos, P y Q son ambos asintóticamente estables o son ambos inestables o ninguna de las dos cosas. Se analiza la dinámica de P .

Si $\sigma > b + 1$ entonces $\sigma - b - 1 > 0$. Denominando $r^* = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}$ entonces $r^* > 1$ cuando $\sigma > b + 1$ y $\sigma > 1$.

Si $r^* > r > 1$ entonces las tres raíces tienen negativa su parte real por lo que en este caso P es un punto crítico asintóticamente estable.

Si $r > r^*$ y $r > 1$ dos de las raíces tienen su parte real positiva, en consecuencia P es un punto crítico inestable. En este caso el sistema tiene tres puntos críticos, el origen, P y Q , y los tres son inestables. Para $r = r^*$ se tiene, de nuevo, una bifurcación, pues los puntos críticos P y Q pasan de ser asintóticamente estables a ser inestables, cuando r pasa de ser menor que r^* a ser mayor.

El estudio de las órbitas de las soluciones es complicado. Se denomina **familia de Lorenz** a los sistemas con $\sigma = 10$, $b = 8/3$ y $r > 1$. Por ejemplo, para $\sigma =$

10, $b = 8/3$, entonces $\sigma > b + 1$, $r^* = 470/19 \cong 24,74$, $r = 28$ entonces $r > r^*$, en consecuencia los tres puntos críticos son inestables. La superficie en la que la órbita reside es el **atractor de Lorenz** cuya dimensión de Hausdorff es 2,07. Es un atractor extraño. Pequeñas diferencias en las condiciones iniciales pueden, al cabo de un cierto tiempo, tener comportamientos muy diferentes, por lo que el atractor es caótico, al haber una dependencia sensitiva de las condiciones iniciales.

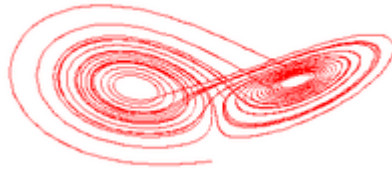


Figura 12.18: Atractor de Lorenz, con valores $r = 28$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$

El sistema de Lorenz ha sido estudiado durante décadas y se han localizado varias bifurcaciones para $r > 28$. Las órbitas se clasifican en distintos tipos. Se dice que una órbita es del tipo ab^2 si gira una vez alrededor de uno de los puntos críticos y dos veces alrededor del otro. Francheschini en 1980 identificó una órbita estable del tipo ab^2 para $r \cong 100,75$.

En la actualidad sigue habiendo cuestiones abiertas relativas al sistema de Lorenz y su dinámica.

Ejercicios

- 12.15. En el sistema de Lorenz (12.6.1) trasladar los ejes al punto Q y estudiar la dinámica en un entorno de dicho punto.

12.7. EJERCICIOS

- 12.16. Hacer un esbozo del diagrama de fase de las siguientes ecuaciones diferenciales. Identificar los puntos de equilibrio como atractores, repulsores o puntos de silla:

a) $y' = (3 + y)$

b) $y' = 3y^2 \cdot (2 + y)$

c) $y' = 3y^3 \cdot (2 + y)^2$

d) $y' = y \cdot (3 - y) \cdot (2 + y)$.

- 12.17. En los sistemas lineales siguientes determinar la solución general, clasificar el origen como punto fijo y dibujar el diagrama de fase:

a)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 9y \\ \frac{dy}{dt} = x + 8y \end{cases}.$$

(Solución: $y(t) = (K_1 + K_2 t) \cdot e^{5t}$. Repulsor)

$$\text{b)} \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = y - 2z \\ \frac{dz}{dx} = y + 3z \end{cases}.$$

(Solución: $y(x) = e^{2x} \cdot ((-C_1 - C_1) \cdot \sin x + (C_1 - C_2) \cdot \cos x)$; $z(x) = e^{2x} \cdot (C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x)$. Nodo repulsor en espiral).

$$\text{c)} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z \\ \frac{dy}{dt} = 3x + z \\ \frac{dz}{dt} = 3x + y \end{cases}.$$

(Solución: $x(t) = K_1 e^{3t} + K_2 e^{-2t}$; $y(t) = \frac{3}{2} K_1 e^{3t} - K_2 e^{-2t} + K_3 e^{-t}$; $z(t) = \frac{3}{2} K_1 e^{3t} - K_2 e^{-2t} - K_3 e^{-t}$; Punto de silla).

12.18. Estudiar la dinámica de los sistemas lineales siguientes determinando la solución general, clasificando el punto crítico y dibujando el diagrama de fase:

$$\text{a)} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y + z \\ \frac{dy}{dt} = -x + 5y - z \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 3z \end{cases}$$

$$\text{b)} \quad \begin{cases} \frac{dy}{dt} = 2y + z \\ \frac{dz}{dt} = -y + 4z \end{cases}$$

$$c) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 5y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$$

12.19. Estudiar la dinámica de los sistemas lineales siguientes, determinar la solución general, dibujar el diagrama de fase y analizar los subespacios E , P y N :

$$a) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = -2x \end{cases}.$$

$$b) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y \\ \frac{dz}{dt} = 0 \end{cases}.$$

$$c) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = z \\ \frac{dy}{dt} = -x \\ \frac{dz}{dt} = -y \end{cases}.$$

12.20. En los sistemas lineales siguientes, calcular los autovalores y los autovectores, dibujar las rectas que determinan dichos autovectores, determinar la solución general y dibujar el diagrama de fase.

$$a) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y \\ \frac{dy}{dt} = 3x - y \end{cases}.$$

$$\text{b)} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y \end{cases}.$$

$$\text{c)} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases}.$$

$$\text{d)} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 3y \\ \frac{dy}{dt} = -y \end{cases}.$$

12.21. Los sistemas siguientes modelizan poblaciones de especies, unas cooperativas y otras en competencia. Indicar qué modelos son de cada tipo. Determinar los puntos de equilibrio. Estudiar su dinámica:

$$\text{a)} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + xy \\ \frac{dy}{dt} = -y + 2xy \end{cases}.$$

$$\text{b)} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - x^2 - xy \\ \frac{dy}{dt} = 4y - xy - y^2 \end{cases}.$$

$$\text{c)} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + xy \\ \frac{dy}{dt} = -y + 2xy \end{cases}.$$

$$\text{d)} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - x^2 - xy \\ \frac{dy}{dt} = 2y - xy - y^2 \end{cases}.$$

12.22. Estudiar la dinámica de la ecuación diferencial del generador de válvulas:

$$L \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + R \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{1}{C} y = \frac{1}{C} f(M, y')$$

donde L , C , R y M son constantes positivas, analizando el sistema auxiliar:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -w^2 x - hy + g(y) \end{cases}$$

en el origen.

12.23. Estudiar la dinámica de la ecuación logística $y' = ay - by^2$, donde a y b son constantes positivas.

12.24. Estudiar la dinámica del sistema de Lotka-Volterra en un entorno de su punto de equilibrio:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = cx - d \end{cases}$$

donde a , b , c y d son constantes positivas y comprobar que tiene un punto de equilibrio en $(d/c, a/b)$. Trasladar los ejes a dicho punto y comprobar que los valores propios son imaginarios puros. Comprobar que:

$$L(x, y) = cx + by - d \cdot \log x - a \cdot \log y$$

es una función de Liapunov para dicho sistema en el cuadrante $x > 0$, $y > 0$.

12.25. Se considera el movimiento oscilatorio de un edificio alto, un rascacielos

flexible que oscila cuando hay fuertes ráfagas de viento. Sea $y(t)$ el desplazamiento en metros del edificio, siendo $y = 0$ la posición vertical. Se modela mediante la ecuación del oscilador armónico:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + P \cdot \frac{dy}{dt} + Q \cdot y = 0$$

donde $P = 0,2$ y $Q = 0,25$. Estudiar el sistema lineal asociado. Dibujar el diagrama de fase. Comprobar que el sistema es estable y el origen es un punto de equilibrio estable en espiral.

- 12.26. Se considera el movimiento oscilatorio de un edificio alto, un rascacielos flexible que oscila cuando hay fuertes ráfagas de viento. Sea $y(t)$ el desplazamiento en metros del edificio, siendo $y = 0$ la posición vertical. Se modela mediante la ecuación del oscilador armónico, pero en esta ocasión se tiene en cuenta la fuerza de la gravedad actuando sobre el voladizo, con lo que se añade el término independiente y^3 :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + P \cdot \frac{dy}{dt} + Q \cdot y = y^3$$

donde $P = 0,2$ y $Q = 0,25$. Estudiar el sistema lineal asociado. Dibujar el diagrama de fase. Comprobar que si la condición inicial es suficientemente próxima al origen entonces se comporta como en el ejercicio anterior, pero si no lo es, el comportamiento de las soluciones es inquietante. Encontrar nuevos puntos críticos y comprobar que son puntos de silla. Interpretar físicamente el resultado.

12.27. Estudiar la dinámica del sistema que modela la competencia entre dos especies siguiente:

$$a) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 150x - x^2 - 3xy \\ \frac{dy}{dt} = 100y - y^2 - 2xy \end{cases}.$$

12.28. Estudiar si es hamiltoniano el sistema siguiente y si lo es, determinar su función de Hamilton.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x \operatorname{sen} y + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -\cos y \end{cases}$$

(Solución: $H(x, y) = y^2 + x \cdot \cos x$)

12.29. Estudiar los valores de las constantes a y b para los que el origen es un punto crítico estable en el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + ay \\ \frac{dy}{dt} = bx - 2y \end{cases}$$

12.30. Estudiar los valores de la constante a para los que el origen es un punto crítico estable en el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - 2y \\ \frac{dy}{dt} = ay - 2z \\ \frac{dz}{dt} = az - 2x \end{cases}$$

12.31. Comprobar si el siguiente sistema es casi lineal y estudiar la dinámica en el

origen:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + 2y - 3x^2 \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 2y + 2x^2 + y^4 \end{cases}$$

- 12.32. Comprobar si el siguiente sistema es casi lineal y estudiar la dinámica en el origen:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3y - x^3 \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y^4 \end{cases}$$

- 12.33. Comprobar si el siguiente sistema es casi lineal y estudiar la dinámica en el origen:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 + 2y \\ \frac{dy}{dt} = x + y^2 \end{cases}$$

- 12.34. Comprobar si el siguiente sistema es casi lineal y estudiar la dinámica en el origen:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - xy^4 \\ \frac{dy}{dt} = -2y - x^2y^4 \end{cases}$$

- 12.35. Comprobar si el siguiente sistema es casi lineal y estudiar la dinámica en el origen:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - 3x^4 \\ \frac{dy}{dt} = -3x - 7y^3 \end{cases}$$

- 12.36. Comprobar si el siguiente sistema es casi lineal y estudiar la dinámica en el origen:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x^3 - y \\ \frac{dy}{dt} = x^5 - 2y^2 \end{cases}$$

- 12.37. El sistema siguiente se refiere a un sistema depredador – presa. Describir el comportamiento de la población de presas si se han extinguido los depredadores:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 3xy \\ \frac{dy}{dt} = -2y + xy \end{cases}$$

- 12.38. El sistema anterior referido a un sistema depredador – presa, describir el comportamiento de la población de depredadores si se han extinguido las presas.

- 12.39. El sistema siguiente se refiere a un sistema depredador – presa. Buscar los puntos de equilibrio y clasificarlos:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - xy \\ \frac{dy}{dt} = -y + 10xy \end{cases}$$

- 12.40. Dibujar el diagrama de fase del sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = 2 \end{cases}$$

- 12.41. Dibujar el diagrama de fase del sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

12.42. Dibujar el diagrama de fase del sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 1 \\ \frac{dy}{dt} = 2 \end{cases}$$

12.43. Dibujar el diagrama de fase del sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x \\ \frac{dy}{dt} = -2y \end{cases}$$

12.44. Convertir la ecuación diferencial siguiente: $y'' - y = 0$ en un sistema y dibujar el diagrama de fase asociado.

12.45. Obtener el sistema lineal asociado a la ecuación diferencial siguiente: $y'' + 3y = 0$ y dibujar el diagrama de fase.

12.46. Calcular los puntos de equilibrio de los siguientes sistemas:

a)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = x - 2x^2 - 2y \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 7y - 1 \\ \frac{dy}{dt} = 6x + 3y - 12 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x \\ \frac{dy}{dt} = y - 3 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 - 4 \\ \frac{dy}{dt} = 3y \end{cases}$$

NO COPIAR,
© DE LOS
AUTORES