

RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES

En la sección anterior se han estudiado diferentes técnicas para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias y sistemas de ecuaciones diferenciales que se ajustaban a un patrón concreto. Sin embargo muchos de los problemas que realmente se presentan en la ingeniería no se pueden resolver mediante estas técnicas, puesto que sólo algunos tipos de ecuaciones diferenciales admiten soluciones en términos de funciones elementales. Las ecuaciones diferenciales aparecen en el diseño de modelos matemáticos de los fenómenos físicos, técnicos, químicos, biológicos, etc. Sin embargo, hasta la segunda mitad del siglo XX eran escasas las ecuaciones diferenciales que se podían resolver de manera explícita.

Es posible modelar la distribución de temperaturas de un sólido, la velocidad de partículas en un fluido, las tensiones de un cuerpo que se deforma, el flujo alrededor del ala de un avión, el impacto de un automóvil contra un obstáculo, el crecimiento de especies animales con presas y depredadores o la evolución del precio de un artículo en el mercado financiero.

La simulación numérica de estos fenómenos tan diferentes permite rentabilizar esfuerzos y mejorar los costes que la experimentación real originaría. En consecuencia, siempre que no sea posible obtener una solución

exacta, (por ejemplo: $y' = x^2 + y^2$) o cuando ésta tenga escaso interés, o sea demasiado complicada de conseguir, o aparezcan integrales que no sean elementales (por ejemplo: $y'' + \sin y = 0$), o cuando su cálculo resulte engorroso (por ejemplo: $y' = y^4 + 1$), está indicado recurrir a los métodos numéricos, que proporcionen valores numéricos de la solución con una aproximación adecuada, en un determinado conjunto de puntos. Incluso cuando sea posible encontrar la solución en términos de funciones elementales o en desarrollo en serie puede ser que la evaluación numérica de la función o el truncamiento de la serie conduzcan a una peor calidad que un método aproximado.

La forma de proceder es buscar una solución aproximada a la ecuación diferencial mediante el uso de un ordenador, utilizando para ello alguno de los métodos numéricos que se conocen, que tienen en nuestros días un desarrollo extraordinario tanto por su número como por sus posibilidades de cálculo, debido al progreso de los ordenadores. Estos métodos se utilizan en la actualidad para resolver las ecuaciones diferenciales en la teoría de los proyectiles balísticos y satélites artificiales, en redes eléctricas, elasticidad de vigas, estabilidad de aviones y teoría de vibraciones, entre otras.

Por ejemplo, en el caso de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, se sabe que existe una solución única para cada problema de valor inicial que se puede calcular. Pero si el número de ecuaciones es muy elevado las manipulaciones algebraicas para obtenerla pueden ser excesivamente laboriosas. En esta sección se analizará la forma de adaptar los métodos numéricos a sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Otra ventaja de estos métodos es que permiten experimentar con una ecuación diferencial modificando valores o coeficientes, con el fin de obtener una información más completa sobre el problema tecnológico o físico que representa.

Los métodos numéricos que se utilizan en la actualidad para la solución de ecuaciones diferenciales tienen su origen en la segunda mitad del siglo XIX. A finales del siglo pasado **Carl David Tolmé Runge** (1 856 – 1 927) presentó unos métodos específicos para obtener mejores aproximaciones que las que ofrecía el método de *Euler*. Pocos años después fueron perfeccionados por **Wilhelm Martin Kutta** y por *Heun*, por lo que se conocen como métodos de *Runge-Kutta*, y pueden considerarse como los más populares de entre los métodos denominados de un paso. También en este período hacen aparición los métodos multipaso que constituyen el otro gran grupo de métodos utilizados.

Pero hasta la década de 1 940 a 1 950, en la que la aparición de los ordenadores hace posible la realización de grandes cálculos a un coste económico y de tiempo razonables, no se generaliza su uso. Supone un cambio radical, pues es a partir de ese momento cuando el “Análisis Numérico” nace como disciplina autónoma, desarrollándose enormemente en la segunda mitad del siglo XX, en estrecha conexión con la evolución tecnológica de los ordenadores.

En el campo de la solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias la investigación de sistemas no *stiff* produjo una serie de métodos y algoritmos que llevan ya algunos años incluidos en paquetes estándar sin apenas modificación. Se siguen buscando métodos *Runge-Kutta* con mejores

constantes de error y mayor orden, se investiga también en comprender la dinámica de los diversos algoritmos. El campo de los sistemas *stiff* es todavía hoy objeto de investigación, pues problemas como los sistemas hamiltonianos están recibiendo atención en la actualidad, a pesar que desde 1980 se dispone de métodos y algoritmos para otros muchos problemas.

Se podría decir que el análisis numérico trata sobre procedimientos para hacer cálculos. De forma simplificada es posible decir que tiene dos partes diferenciadas que se complementan. Una parte es un análisis similar al de otras partes de la Matemática, que permite investigar sobre cuando los procedimientos de cálculo proporcionan una respuesta precisa, su grado de precisión y su costo computacional. De este modo se analiza la convergencia del método, descartando los no convergentes y prefiriendo los de mayor orden de convergencia. Pero hay otros aspectos, no suficientemente investigados, como por ejemplo, el uso de pasos variables en la estimación de un problema de valor inicial, que parece razonable, pero en el que la mejora de la eficiencia computacional varía según los casos, y sólo permite guiar en su uso la experiencia, por lo que tiene una importante componente experimental.

El carácter aplicado se recoge, una vez cubiertos los rudimentos de análisis, dando una descripción de los algoritmos, o presentando numerosos ejemplos con los resultados, tablas, gráficos y diagramas que se obtienen al aplicar los métodos numéricos estudiados a problemas concretos, para poder analizarlos y reflexionar sobre las consecuencias prácticas de utilizar un método u otro. En los ejemplos elegidos se pretende que las conclusiones obtenidas no sean exclusivas de ellos, sino que se den frecuentemente en la práctica.

El problema puede plantearse de la siguiente forma:

Encontrar una solución aproximada al problema de valor inicial o de *Cauchy*:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & x \in (a, b) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

donde, con la misma notación, se puede interpretar como una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales.

El primer aspecto que hay que tener en cuenta es si la función f es lo suficientemente regular como para que se verifiquen los teoremas de existencia y unicidad de las soluciones, pues si no se tuviera esa precaución, el método numérico podría proporcionar una solución que en absoluto resolvería el problema. Y también que el intervalo donde exista esa única solución contenga a la abscisa del punto final x_N .

En algunos casos $f(x, y)$ es tan simple que se puede integrar directamente el problema de valor inicial. Sin embargo en los problemas que usualmente se presentan en la ciencia y en la ingeniería esto no es así, por lo que resulta lógico considerar procedimientos numéricos para obtener una solución aproximada al problema. En ocasiones aunque se pueda integrar directamente puede ser más difícil evaluar la solución, por ejemplo si viene dada en forma implícita complicada, que aplicar un método numérico.

Un primer paso para resolver un problema de valor inicial consiste en sustituir el problema continuo, cuya incógnita es una función definida en un intervalo real, por un problema discreto, cuya incógnita es una función definida en un conjunto finito de puntos. Para ello se consideran los puntos del eje de

abscisas $x_0, x_1, \dots, x_N$, definidos mediante $x_n = x_0 + nh$, donde n varía desde 0 hasta N , siendo $x_N = x$, igual al valor de la abscisa donde se quiere estimar la ecuación diferencial, y siendo el tamaño del paso $h = (x_N - x_0)/N$. En toda esta sección se denomina por y_n o por $y(x_n)$ al valor exacto de la solución del problema de valor inicial en cada punto x_n , mientras que se denomina por z_n al valor que el método que se esté aplicando obtiene para cada x_n . Se pretende llegar a conocer los valores z_n con una aproximación tan grande como se quiera de la solución $y(x_n)$ del problema de valor inicial.

Se ha dividido la sección en dos partes: El primer capítulo está dedicado a uno de los grandes grupos, los métodos de un paso, mientras que el segundo está dedicado al otro gran grupo, el de los métodos multipaso.

Un primer **objetivo** que se pretende es que se obtenga una comprensión intuitiva de determinados métodos numéricos y se sepan aplicar para resolver problemas. Un segundo objetivo es que se tenga una comprensión del concepto de error pudiendo analizarlo y predecirlo, para poder tener un control del error que se comete. Se pretende que quede claro el concepto de convergencia, así como los conceptos de consistencia y estabilidad, por lo que debe insistirse en la equivalencia entre convergencia y consistencia más estabilidad. Se proporcionan ejemplos del cálculo del orden de consistencia de un método, sobre cómo decidir sobre la estabilidad y la convergencia de un método, y analizar los diversos tipos de errores cometidos.

HISTORIA DE LA RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Parece adecuado presentar los conceptos dentro de su contexto histórico, para poder ligar la historia de las Matemáticas con su aprendizaje. Dice Simmons:¹ *“Hay un antiguo refrán armenio que dice: “Quien carezca de sentimientos hacia el pasado estará condenado a vivir en la oscuridad estrecha de su propia generación”. Las matemáticas sin historia estarían desprovistas de su grandeza, puesto que, como las artes -y las matemáticas son uno de los logros supremos de nuestra civilización-, obtienen su grandeza por el hecho de ser una creación humana”.*

En esta introducción histórica de los métodos numéricos de las ecuaciones diferenciales se consideran dos etapas, la primera desde sus orígenes hasta la aparición de los ordenadores hacia el año 1 955, y la segunda desde esta fecha de 1 955 hasta aproximadamente el 1 975, fecha desde la cual se pierde, por su proximidad, la perspectiva histórica.

Antes de los ordenadores eran necesarios meses y meses de trabajo para resolver una única ecuación diferencial con su valor inicial, con un trabajo tedioso, por lo que sólo se resolvían aquellas que se precisaban para su aplicación. Así, por ejemplo, el ejército necesitaba conocer las soluciones de

¹ SIMMONS, F.: *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*. McGraw-Hill. 1992.

las ecuaciones que regían las trayectorias balísticas, que debían ser tabuladas para cada cañón. Uno de los primeros prototipos de ordenador se construyó para resolver las ecuaciones diferenciales necesarias para la bomba de hidrógeno.

Solución numérica antes de los ordenadores

La búsqueda de soluciones aproximadas a problemas matemáticos en general, es un proceso antiguo. Se puede citar como ejemplo los polinomios de *Taylor* que aproximan a una función, o los polinomios interpoladores obtenidos por *Newton* y *Lagrange* para ajustar una función polinómica a una tabla de n valores, o el método de *Newton* para hallar una solución aproximada de una ecuación, o por último, el método de *Euler* para el cálculo de una solución aproximada de una ecuación diferencial.

El **método de Euler**, que data de 1768,² está aún “vivo”, no sólo porque juega un papel excepcional en la enseñanza como base metodológica para explicar métodos más complicados, sino que incluso se sigue utilizando en la actualidad para obtener una primera aproximación en la resolución de ecuaciones.

Es un método de variable discreta en el que se genera una sucesión de valores para la variable independiente (x_n) y una sucesión de valores calculados (z_n) que se pueden considerar tanto escalares como vectoriales. Se define z_n por recursión: Si $y' = f(x, y)$ e $y(a) = y_0$, entonces $x_0 = a$, $z_0 = y_0$; $x_{n+1} =$

² L. Euler (1768): *Institutiones Calculi Integralis*. Volumen 1, Sección Segunda, Capítulo VII,

$x_n + h$, siendo h la longitud de paso, $z_{n+1} = z_n + h \cdot f_n$ siendo $f_n = f(x_n, z_n)$. De la propia definición está claro que el error cometido en el primer paso es un infinitésimo de segundo orden: $z_1 = y(x_1) + O(h^2)$. Se puede demostrar, y ya lo probó *Cauchy*, que el error total obtenido es un infinitésimo de primer orden: $z_n = y(x_n) + O(h)$.

El mismo *Euler* en los ejercicios propone métodos de orden superior que son los que hoy se conocen como métodos de *Taylor*, donde la idea geométrica la proporciona el calcular la derivada segunda, en lugar de utilizar para aproximar la solución por la tangente se hace mediante la parábola que más se aproxima, o en general por el polinomio de grado n que más se aproxima.

Los siguientes métodos se deben a **John C. Adams** (1 819 – 1 892). Analizando anomalías en la órbita de Saturno Adams conjeturó en 1 846 la existencia de otro planeta, siendo observado Neptuno en 1 846.

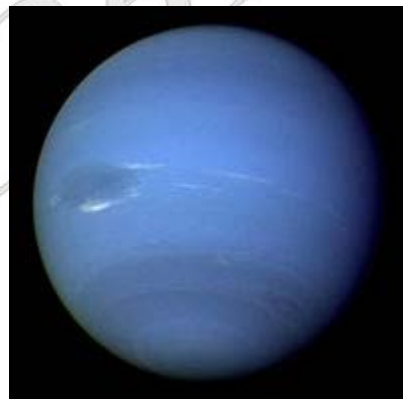
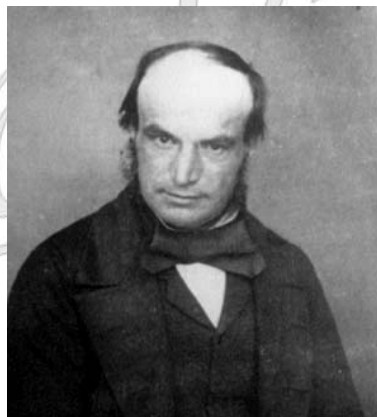


Figura 1: John C. Adams y Neptuno

Fue catedrático en Escocia en St. Andrews, en 1 858, y en Cambridge en 1 859, siendo nombrado director del Observatorio de Cambridge en 1 861. Los métodos que llevan su nombre, *Adams* no los publicó (quizás no los

considerara suficientemente serios). Aparecen publicados por primera vez por *Bashford*, en 1883, en un trabajo sobre problemas de capilaridad, tensión superficial, la forma de una gota..., aunque dijo que ya los conocía de *Adams* desde 1855.

La idea es considerar la ecuación $y' = f(x, y)$ como una integral:

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) \cdot dx$$

pero como $y(x)$ no se conoce, se reemplaza $f(x, y(x))$ por un polinomio interpolador basado en valores ya calculados: $p(x) \approx f(x, y(x))$.

Con el polinomio interpolador más sencillo, una constante, se recupera el método de *Euler*. Si se usa una recta se obtiene un método de segundo orden, y con esta forma de razonar, aumentando el grado del polinomio y el número de puntos de partida, es posible obtener métodos del orden que se quiera. De esta forma se obtienen los métodos explícitos que se conocen con el nombre de **métodos de Adams-Bashford**. La cantidad de trabajo en cada paso es la misma que en el método de *Euler*, pues aunque cada valor se usa varias veces, en cada paso sólo se evalúa una vez la función.

Adams construyó otros métodos, los implícitos, que en la bibliografía se conocen como métodos de **Adams-Moulton**. Existen otros métodos: en 1925 los de *Nyström*, en 1926 los de *Milne*. Todos ellos son combinaciones lineales de $z_{n+1}, z_n, \dots, f_{n+1}, f_n, \dots$.



Figura 2: Carl David Tolmé Runge

Carl David Tolmé Runge nació en 1 856 en Brena. Vivió en La Habana. Estudió hacia 1 876 en Munich y Berlín con *Kronecker* y *Weierstrass*, donde se ocupó del estudio de la variable compleja. En 1 886 se trasladó a Hannover a Escuela Técnica Superior donde conoció a *Plank*, que investigaba en espectroscopia, centrándose en trabajos de matemática aplicada. En 1 905 fue llamado a Göttingen por *Félix Klein*, donde fue nombrado como el primer catedrático de Matemática Aplicada. En 1 895 apareció publicado su trabajo en la revista "*Mathematische Annalenn*".

La idea en la que basó sus métodos numéricos consiste en fijarse en los métodos numéricos de integración. Si $f(x, y)$ no dependiera de y , para integrarla se podría usar la regla del rectángulo, o la regla del punto medio, o la regla de *Simpson*. En particular si se utilizara la regla del rectángulo se recuperaría de nuevo el método de *Euler*. Si se interpola la función por un rectángulo en el punto medio se obtiene lo que denominó "*tangenten trapez*". Si se evalúa por la regla del trapecio se obtiene otra aproximación, que recupera la regla de *Simpson* en el caso en que la función sólo dependiera de x . Si se hace la media aritmética de las dos, no resulta en el caso general de cuarto orden, sino

únicamente de segundo orden, lo que lleva a buscar una media ponderada con la que *Runge* consiguió en 1 895 un método de orden tres.

En 1 900 **Heun** escribió los métodos de *Runge* mediante una expresión general:

$$z_1 = z_0 + h(b_1 \cdot k_1 + \dots + b_s \cdot k_s) \text{ siendo}$$

$$k_1 = f(x_0, y_0),$$

$$k_2 = f(x_0 + c_2 \cdot h, y_0 + b_{21} \cdot h \cdot k_1),$$

$$k_3 = f(x_0 + c_3 \cdot h, y_0 + b_{31} \cdot h \cdot k_1 + b_{32} \cdot h \cdot k_2),$$

....,

$$k_s = f(x_0 + c_s \cdot h, y_0 + b_{s,1} \cdot h \cdot k_1 + \dots + b_{s,s-1} \cdot h \cdot k_{s-1}).$$

Todos los métodos de *Runge* responden a este formato. Pero no avanzó mucho más. Consiguió un método de orden tres con tres etapas y un método de orden cuatro con ocho etapas.

Wilhelm Martin Kutta en 1 901 utilizó este formato general y describió varios métodos de orden cuatro con cuatro etapas. Uno de ellos es el que ha pasado a los libros como el método de *Runge-Kutta*, lo cual es inexacto, pues no lo descubrió *Runge*, sino *Kutta*, y es uno entre varios, y no precisamente del que se muestra más orgulloso. Aunque bien es cierto que *Runge* lo mencionó en un libro sobre Matemática Aplicada.



Figura 3: Wilhelm Martin Kutta

Aparecieron otros métodos numéricos, como el método de *Milne*, que posteriormente al utilizar ordenadores han quedado totalmente en desuso debido a la propagación de los errores.

Solución numérica después de los ordenadores

El primer estudio riguroso de la **teoría matemática** encerrada en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales se debe a **Dahlquist** que escribió su tesis, ya mayor, en el año 1956, siendo publicada en 1959. Es el primero en escribir una teoría que explique conceptos como estabilidad o el orden alcanzable. Sólo escribió seis o siete artículos, pero que son de una importancia excepcional.

Dahlquist planteó una ecuación general:

$$\alpha_k \cdot Z_{n+1} + \alpha_{k-1} \cdot Z_n + \dots + \alpha_0 \cdot Z_{n-k+1} = h(\beta_k \cdot f_{n+1} + \dots + \beta_0 \cdot f_{n-k+1})$$

mediante la cual estudió la estabilidad, el orden alcanzable y cómo debían ser los coeficientes. Al encontrar los mejores coeficientes estos resultaron ser los coeficientes de los métodos de *Adams*.

Para obtener el orden del método en los métodos de *Runge-Kutta* es preciso realizar desarrollos de *Taylor*. El neozelandés **Butcher** mediante problemas combinatorios y la utilización de la teoría de grafos obtuvo unas fórmulas con las que calcularlo sin necesidad de realizar los desarrollos.

En la práctica los métodos que actualmente se utilizan son los **códigos** o librerías de programas, en los que están programados, los métodos de *Adams* para cada paso y cada orden, o los métodos de *Runge-Kutta* de pares encajados. El propio código estima el error y elige el orden que más se adecue, e incluso toma los valores del paso mayores o menores según sea más conveniente. Son por tanto baterías de métodos que se combinan. **Gear** en 1971 escribió un libro con los listados de uno de estos códigos, que ha sido tan utilizado que puede considerarse como la referencia científica más citada.

Por último muy brevemente el estado actual de la cuestión: Hoy se trabaja en métodos específicos para resolver distintas clases de ecuaciones diferenciales, como por ejemplo, los sistemas hamiltonianos, para acercar la teoría numérica a la teoría analítica, los sistemas dinámicos y la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales, con un mayor contenido geométrico, utilizando los grupos de *Lie*. Otro problema que ocupa mucha literatura desde 1965 a 1985 es el tratamiento de los problemas rígidos o “*stiff*”. Y un camino perdido ha sido el utilizar métodos analógicos en lugar de digitales, como el uso del analizador diferencial.