CAPÍTULO 11

Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Cuando se estudia matemáticamente una situación de la realidad, el modelo que se obtiene suele tener un carácter no lineal, siendo esto lo que le confiere, en la mayoría de los casos, una gran dificultad. Uno de los procedimientos más utilizados dentro de la Matemática, y de la Ciencia en general, cuando se aborda un problema difícil, es considerar un problema más sencillo que sea, en algún sentido, una buena aproximación del anterior. Al estudiar este segundo problema se intenta obtener, de las conclusiones, algún tipo de resultado para el problema primitivo. Una de las formas más usuales de simplificar el problema es linealizarlo. Si se quiere estudiar un problema no lineal, el primer paso obligado es estudiar el problema lineal asociado de la manera más completa posible para poder analizar así que ocurrirá en el caso no lineal. El estudio de los sistemas lineales no es difícil y en numerosas ocasiones se pueden obtener resultados concluyentes pues la estructura algebraica de las soluciones es sencilla y a veces se puede dar una descripción de la misma en términos de funciones elementales.

Un sistema de ecuaciones diferenciales de orden superior se transforma en un sistema de primer orden añadiendo más variables. Por esta razón el capítulo se centra en el estudio de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. La *sección 1* comienza realizando una primera aproximación entre los sistemas lineales y las ecuaciones diferenciales de orden superior y estableciendo los teoremas de existencia y unicidad. En la *sección 2* se desarrolla la teoría general de la estructura de las soluciones de los sistemas lineales de primer orden que es similar a la de las ecuaciones lineales de orden superior. Así el conjunto de soluciones de un sistema lineal de primer orden homogéneo tiene estructura de espacio vectorial y el no homogéneo de espacio afín. La *sección 3* está centrada en los métodos de resolución de los sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes. Utilizando la teoría algebraica para calcular los autovalores y autovectores de una matriz se establece un procedimiento que permite resolver el sistema. Otro forma de resolver sistemas lineales es utilizando la exponencial de una matriz, que es el contenido de la *sección 4*. El capítulo termina con la *sección 5* en la que se desarrollan los métodos de resolución de sistemas lineales no homogéneos, en los que de nuevo se observa un paralelismo con los estudiados en el capítulo anterior para resolver las ecuaciones lineales completas de orden superior.

11.1. SISTEMAS LINEALES DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Un sistema de ecuaciones diferenciales de orden superior puede transformarse fácilmente en un sistema de primer orden sin más que añadir más variables: si el sistema de orden superior es lineal también lo es el de primer orden. Por esta razón, sin pérdida de generalidad, es posible estudiar únicamente los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden.

11.1.1. Conceptos previos

Definición 11.1.1:

Un ***sistema de k ecuaciones diferenciales de orden superior n*** expresado de la forma $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x), \mathbf{y}''(x), ..., \mathbf{y}^{n)}(x)) = 0$ se denomina **lineal** cuando la función vectorial ***f*** es una función lineal con respecto a la función $\mathbf{y}(x)$ y a todas sus derivadas.

En particular un ***sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden*** expresado de la forma $\mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x)) = 0$ se denomina ***lineal*** cuando la función vectorial ***f*** es una función lineal respecto a $\mathbf{y}(x)$ y $\mathbf{y}'(x)$

Cuando es posible despejar ***y'*** el sistema se escribe de la siguiente forma:

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1, ..., y_n) \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1 ..., y_n) \\ \quad ... \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1, ..., y_n) \end{cases} \qquad f_1, ..., f_n : S \subset \Re^{n+1} \to \Re$$

siendo $f_1, f_2, ..., f_n$ funciones lineales respecto a las variables $y_1, y_2, ..., y_n$, es decir, también se puede expresar:

$$\begin{cases} y_1'(x) = a_{11}(x)y_1(x) + a_{12}(x)y_2(x) + ... + a_{1n}(x)y_n(x) + b_1(x) \\ y_2'(x) = a_{21}(x)y_1(x) + a_{22}(x)y_2(x) + ... + a_{2n}(x)y_n(x) + b_2(x) \\ \quad ... \\ y_n'(x) = a_{n1}(x)y_1(x) + a_{n2}(x)y_2(x) + ... + a_{nn}(x)y_n(x) + b_n(x) \end{cases} \qquad (11.1.1)$$

siendo $a_{ij}(x)$ y $b_i(x)$ funciones definidas en un intervalo (a, b), $\forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.

El sistema anterior se puede expresar en forma vectorial: $\boldsymbol{y}'(\mathrm{x}) = A(x)\cdot\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{b}(x)$, siendo $A(x)$ una matriz cuadrada de orden n, formada por las funciones $a_{ij}(x)$ y $\boldsymbol{b}(x)$, $\boldsymbol{y'}(x)$, $\boldsymbol{y}(x)$ funciones vectoriales de dimensión n definidas en un intervalo (a, b) de $\mathfrak{R}$.

En el *capítulo 9* se desarrolló una manera natural de asociar a cada ecuación diferencial ordinaria de orden n un sistema equivalente de ecuaciones diferenciales de primer orden; así mismo, dado un sistema se puede determinar una ecuación diferencial de orden superior asociada, aunque no hay equivalencia ya que la ecuación puede tener soluciones que no lo son del sistema como se muestra en el *ejemplo 11.1.3*. En esta transformación entre sistemas de primer orden y ecuaciones de orden n, la propiedad de linealidad se conserva como se demuestra en la siguiente proposición.

Proposición 11.1.1:

Si una ecuación diferencial de orden n es lineal también es lineal el sistema asociado de n ecuaciones diferenciales de primer orden y recíprocamente si el sistema es lineal también lo es su ecuación diferencial asociada.

Demostración:

Dada la ecuación diferencial lineal:

$$y^{n)} + P_1(x)\cdot y^{n-1)} + \ldots + P_{n-1}(x)\cdot y' + P_n(x)\cdot y = G(x),$$

realizando el cambio de variable:

$$y_1 = y;\ y_2 = y';\ \ldots;\ y_n = y^{n-1)},$$

se obtiene $y'_n = y^{n)}$, y por lo tanto la ecuación se transforma en el sistema:

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x) \\ y_2'(x) = y_3(x) \\ \ldots \\ y_n'(x) = -P_1(x)y_n(x) - P_2(x)y_{n-1}(x) - \ldots - P_n(x)y_1(x) - G(x) \end{cases}$$

que es un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

Recíprocamente si y_1, y_2, ..., y_n son soluciones del sistema (11.1.1) al derivar la primera ecuación con respecto a x:

$y''_1 = a_{11}'\cdot y_1 + a_{11}\cdot y'_1 + a_{12}'\cdot y_2 + a_{12}\cdot y'_2 + \ldots + a_{1n}'\cdot y_n + a_{1n}\cdot y'_n + b'_1$

y sustituir las derivadas y'_1, y'_2, ..., y'_n por sus expresiones en el sistema (11.1.1) se obtiene $y_1'' = d_{21}\cdot y_1 + d_{22}\cdot y_2 + \ldots + d_{2n}\cdot y_n + h_2$. Se deriva esta expresión con respecto a x, se sustituye del modo anterior y se obtiene $y_1'''(x) = d_{31}\cdot y_1 + d_{32}\cdot y_2 + \ldots + d_{3n}\cdot y_n + h_2$.

Se repite el proceso hasta la derivada de orden n y se calcula:

$y_1^{n)}(x) = d_{n1}\cdot y_1 + d_{n2}\cdot y_2 + \ldots + d_{nn}\cdot y_n + h_n$.

De esta forma se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} y_1'(x) = a_{11}(x)y_1(x) + a_{12}(x)y_2(x) + \ldots + a_{1n}(x)y_n(x) + b_1(x) \\ y_1''(x) = d_{21}(x)y_1(x) + d_{22}(x)y_2(x) + \ldots + d_{2n}(x)y_n(x) + h_2(x) \\ \ldots \\ y_1^{n)}(x) = d_{n1}(x)y_1(x) + d_{n2}(x)y_2(x) + \ldots + d_{nn}(x)y_n(x) + h_n(x) \end{cases} \quad (11.1.2)$$

De las $n - 1$ primeras ecuaciones se calculan y_2, y_3, ..., y_n en función de x, la función y_1 y sus derivadas hasta el orden $n - 1$, y al introducir estas expresiones en la última ecuación de (11.1.2) se obtiene la ecuación diferencial lineal de orden n:

$y_1^{n)}(x) = Q_1(x)\cdot y_1^{n-1)} + \ldots + Q_{n-1}(x)\cdot y_1' + Q_n(x)\cdot y_1 + H(x)$. □

Definición 11.1.2:

Un ***sistema*** de *n* ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con ***coeficientes constantes*** se expresa de la siguiente forma:

$$\begin{cases} y'_1(x) = a_{11}y_1(x) + a_{12}y_2(x) + \ldots + a_{1n}y_n(x) + b_1(x) \\ y'_2(x) = a_{21}y_1(x) + a_{22}y_2(x) + \ldots + a_{2n}y_n(x) + b_2(x) \\ \ldots \\ y'_n(x) = a_{n1}y_1(x) + a_{n2}y_2(x) + \ldots + a_{nn}y_n(x) + b_n(x) \end{cases}$$

donde $a_{ij} \in \Re$, y $b_i(x)$ son funciones reales de variable real.

Si para todo i, $1 \le i \le n$, $b_i(x) = 0$, $\forall x \in \Re$, el sistema se denomina ***homogéneo***.

Las equivalentes ecuaciones matriciales son: $\boldsymbol{y}'(x) = A\cdot\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{b}(x)$ para un sistema no homogéneo y $\boldsymbol{y}'(x) = A\cdot\boldsymbol{y}(x)$ para un sistema homogéneo, donde A es una matriz de números reales, cuadrada de orden n, $A = (a_{ij})$.

11.1.2. Teoremas de existencia y unicidad

Los **teoremas fundamentales de existencia y unicidad** de las soluciones de un problema de valor inicial para sistemas lineales de ecuaciones diferenciales de primer orden se pueden enunciar de forma similar a los obtenidos para sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden y se demostrarán a partir de ellos.

Teorema 11.1.2: ***Teorema de existencia y unicidad***

Sea $A(x)$ una función matricial cuadrada de orden n, $\boldsymbol{b}(x)$ una función vectorial, continuas en un intervalo (a, b) de $\Re$, y sea $\boldsymbol{y}'(x) = A(x)\cdot\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{b}(x)$ un sistema lineal de ecuaciones diferenciales de primer orden. Sea $x_0 \in (a, b)$, si se impone la condición inicial $\mathbf{y}(x_0) = (y_1(x_0), y_2(x_0), ..., y_n(x_0)) = (y_{01}, y_{02}, ..., y_{0n})$, entonces existe una única función vectorial $\boldsymbol{\varphi}(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x))$ que es solución del sistema y verifica las condiciones iniciales.

Demostración:

En el *teorema 9.2.1* de existencia del *capítulo 9* para sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden para garantizar la existencia se exigía la continuidad de las funciones $f_k(x, \mathbf{y})$, para todos los valores de k entre 1 y n. En nuestro caso particular $f_k(x, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(x) \cdot y_j(x) + b_k(x)$. Como por hipótesis las funciones $a_{kj}(x)$ y $b_k(x)$ son funciones continuas en el intervalo (a, b) se tiene garantizada la existencia de solución de cualquier problema de valor inicial en ese intervalo.

Además las derivadas parciales de las funciones $f_k(x, \mathbf{y})$, respecto de las variables $y_j(x)$ son precisamente las funciones $a_{kj}(x)$ que por hipótesis son continuas por lo tanto, por el *teorema 9.2.2*, se asegura la existencia y unicidad local de la solución para un problema de valor inicial, y dicha solución puede extenderse a todo intervalo en el que sean continuas las funciones $a_{kj}(x)$ y $b_k(x)$. □

Es interesante observar que para sistemas lineales el intervalo maximal de existencia de cualquier solución es el mismo intervalo para cualquier condición inicial, y coincide con el intervalo dominio de definición de las funciones $A(x)$ y $\mathbf{b}(x)$, mientras que si el sistema es no lineal el intervalo maximal de existencia depende de la condición inicial.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 11.1.1: Clasificar los siguientes sistemas en lineales o no lineales, homogéneos o no homogéneos, de primer orden o de orden superior.

a) $\begin{cases} (D^2-2)y_1-3y_2=e^{2x} \\ (D^2+2)y_1+y_2=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \end{cases}$ c) $\begin{cases} y_1' = \dfrac{y_2^2}{y_1} \\ y_2' = \dfrac{y_1^2}{y_2} \end{cases}$.

El sistema del apartado a) es lineal, no homogéneo de orden dos.

El sistema del apartado b) es lineal, homogéneo y de primer orden.

El sistema del apartado c) es no lineal, homogéneo y de primer orden.

Los tres ejemplos tienen los coeficientes constantes.

Ejemplo 11.1.2: Expresar en forma matricial el sistema lineal asociado a la ecuación diferencial lineal homogénea $y''' + a_2 \cdot y'' + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$.

Realizando el cambio de variable $y_1 = y$; $y_2 = y'$, $y_3 = y''$, se obtiene $y'_3 = y'''$, y por lo tanto la ecuación se transforma en el sistema:

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x) \\ y_2'(x) = y_3(x) \\ y_3'(x) = -a_0 y_1(x) - a_1 y_2(x) - a_2 y_3(x) \end{cases}$$

que expresado en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ y_3'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 11.1.3: Calcular una ecuación diferencial de orden dos asociada al sistema $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ y comprobar que tiene soluciones que no son soluciones del sistema.

La solución de general de este sistema es:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = K_1\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot e^x + K_2\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot e^x \Rightarrow y_1 = K_1\cdot e^x;\ y_2 = K_2\cdot e^x,$$

y no existe una ecuación diferencial lineal de segundo orden que tenga estas soluciones, así por ejemplo derivando la primera ecuación $y_1' = y_1$ se tiene $y_1'' = y_1'$. Una solución de esta ecuación son las funciones constantes que sin embargo no son solución del sistema de partida.

Ejemplo 11.1.4: Obtener una ecuación diferencial de segundo orden asociada al sistema $\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 3y_1 + 2y_2 \end{cases}$, y a partir de sus soluciones resolver el sistema.

Derivando la primera ecuación se tiene $y_1'' = y_1' + 2y_2'$. Sustituyendo los valores de y_1' e y_2' del sistema se tiene: $y_1'' = 7y_1 + 6y_2$.

Se considera el sistema en las variables y_1 e y_2: $\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_1'' = 7y_1 + 6y_2 \end{cases}$. Se despeja y_2 en la primera ecuación: $y_2 = \frac{1}{2}(y_1' - y_1)$, y se sustituye en la segunda, con lo que se obtiene la ecuación $y_1'' - 3y_1' - 4y_1 = 0$.

La solución general de esta ecuación diferencial es $y_1 = K_1\cdot e^{4x} + K_2\cdot e^{-x}$.

Sustituyendo en y_2 tanto y_1 como su derivada se obtiene: $y_2 = \frac{3}{2}K_1\cdot e^{4x} - K_2\cdot e^{-x}$.

Por lo tanto la solución general del sistema es:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = k_1 e^{4x} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k_2 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicios

11.1. Calcular la ecuación diferencial asociada a cada uno de los siguientes sistemas y a partir de sus soluciones obtener la solución general del sistema.

a) $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

11.2. Expresar en forma matricial el sistema lineal asociado a la ecuación diferencial lineal homogénea $y'' + 2y' + y = 0$.

11.3. Resolver el sistema $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = y_2 \end{cases}$ a partir de las soluciones de la ecuación diferencial de orden dos asociada a este sistema.

11.2. SISTEMAS LINEALES DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

11.2.1. Dependencia e independencia lineal

Definición 11.2.1:

Dado un conjunto de funciones vectoriales $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n\}$ definidas en un intervalo (a, b) se dice que son ***linealmente dependientes*** en el intervalo (a, b), si existen n constantes $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ no todas nulas, tales que: $\alpha_1 \cdot \mathbf{y}_1(x) + \alpha_2 \cdot \mathbf{y}_2(x) + ... + \alpha_n \cdot \mathbf{y}_n(x) = \mathbf{0}$, $\forall x \in (a, b)$.

Si por el contrario se verifica que esta identidad solamente se cumple cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, entonces se dice que las funciones $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n\}$ son ***linealmente independientes*** en el intervalo (a, b).

Definición 11.2.2:

Dado un conjunto de funciones vectoriales $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n\}$, con $\mathbf{y}_k(x) = (y_{k1}(x), y_{k2}(x), ..., y_{kn}(x))$, $1 \le k \le n$, se denomina ***wronskiano*** de estas funciones y se denota por $W[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n]$ a la función definida por el siguiente determinante:

$$W[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ... \mathbf{y}_n](x) = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{21}(x) & ... & y_{n1}(x) \\ y_{12}(x) & y_{22}(x) & ... & y_{n2}(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_{1n}(x) & y_{2n}(x) & ... & y_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

es decir $W[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ... \mathbf{y}_n](x) = det\,[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ... \mathbf{y}_n](x)$.

Proposición 11.2.1:

Si las funciones $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$, ..., $\mathbf{y}_n$ son linealmente dependientes en el intervalo (a, b), entonces su wronskiano en ese intervalo es la función nula.

Demostración:

Si las funciones son linealmente dependientes una de ellas $\mathbf{y}_k$ se puede expresar como combinación lineal de las otras y por lo tanto, la columna k-ésima del determinante se puede expresar como una combinación lineal de las otras columnas, lo que supone que el determinante es cero. □

Esta proposición prueba que si un conjunto de funciones vectoriales es linealmente dependiente entonces son linealmente dependientes los vectores numéricos que se obtienen al hallar las imágenes de estas funciones en cada punto.

El recíproco no es cierto, para algún valor de x pueden ser dichos vectores linealmente dependientes y no serlo las funciones. Si los vectores son linealmente independientes para algún valor, x, entonces se puede asegurar que son linealmente independientes las funciones. Pero incluso puede ocurrir que para cada valor x los vectores sean linealmente dependientes y ser linealmente independientes las funciones.

Esta anomalía de que unas funciones linealmente independientes puedan tener valores en un punto que no lo sean, desaparece si las funciones son solución de un mismo sistema lineal homogéneo.

11.2.2. Estructura de las soluciones del sistema homogéneo

En los siguientes teoremas se supone un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales de primer orden expresado en forma vectorial $\mathbf{y}'(x) = A(x)\cdot\mathbf{y}(x)$ siendo $A(x)$ una función matricial cuadrada de orden n, continua en un intervalo (a, b) de $\Re$, e $\mathbf{y}'(x)$, $\mathbf{y}(x)$ funciones vectoriales de $\Re^n$ en $\Re$.

Teorema 11.2.3.

Sean $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ soluciones linealmente independientes del sistema $\mathbf{y}'(x) = A(x)\cdot\mathbf{y}(x)$ en el intervalo (a, b). Entonces, dadas n constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$, la función $\sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{y}_k$ es también solución del sistema en el intervalo (a, b).

Demostración:

Las funciones $\mathbf{y}_k(x)$, $1 \le k \le n$, son soluciones del sistema, y por tanto verifican $\mathbf{y}_k'(x) = A(x)\cdot\mathbf{y}_k(x)$. Por ser la derivada lineal se tiene que:

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{y}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{d\mathbf{y}_k}{dx} = \sum_{k=1}^{n} c_k A(x)\cdot \mathbf{y}_k(x) = A(x)\cdot \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{y}_k(x). \square$$

Teorema 11.2.4:

Si las funciones $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ son soluciones linealmente independientes en el intervalo (a, b) del sistema $\mathbf{y}'(x) = A(x)\cdot\mathbf{y}(x)$ entonces su wronskiano no se anula en ningún punto de ese intervalo.

Demostración:

Se demuestra el teorema por reducción al absurdo, por lo que se supone que existe algún $x_0 \in (a, b)$ tal que $W[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n](x_0) = 0$.

Por lo tanto una columna del wronskiano es una combinación lineal de las otras. Se supone que es la primera, entonces:

$\boldsymbol{y}_1(x_0) = c_2\cdot\boldsymbol{y}_2(x_0) + c_3\cdot\boldsymbol{y}_3(x_0) + ... + c_n\cdot\boldsymbol{y}_n(x_0)$

Sea $\boldsymbol{z}(x) = -\boldsymbol{y}_1(x) + c_2\cdot\boldsymbol{y}_2(x) + c_3\cdot\boldsymbol{y}_3(x) + ... + c_n\cdot\boldsymbol{y}_n(x)$, $\forall x \in (a, b)$

Esta función es solución del sistema por ser una combinación lineal de soluciones; además $\boldsymbol{z}(x_0) = \mathbf{0}$, luego en el punto x_0 la función $\boldsymbol{z}(x)$ coincide con la función nula, que también es solución del sistema. Por el teorema de unicidad de soluciones $\boldsymbol{z}(x) = \mathbf{0}$, $\forall x \in (a, b)$, lo que contradice que las funciones $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, ..., \boldsymbol{y}_n$ sean linealmente independientes en (a, b). □

Teorema 11.2.5:

Si las funciones $\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{y}_2$, ..., $\boldsymbol{y}_n$ son soluciones del sistema lineal de ecuaciones diferenciales $\boldsymbol{y}'(x) = A(x)\cdot\boldsymbol{y}(x)$ en un intervalo (a, b), entonces su wronskiano en ese intervalo o es la función nula o no se anula en ningún punto de dicho intervalo.

Demostración:

Se puede comprobar la siguiente expresión para la derivada del wronskiano:

$$W'[\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, ..., \boldsymbol{y}_n] = W[\boldsymbol{y}'_1, \boldsymbol{y}_2, ..., \boldsymbol{y}_n] + W[\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}'_2, ..., \boldsymbol{y}_n] + ... + W[\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, ..., \boldsymbol{y}'_n].$$

Como $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, ..., \boldsymbol{y}_n$ son soluciones del sistema para todo k, tal que $1 \le k \le n$, se verifica que $\boldsymbol{y}_k'(x) = A(x)\cdot\boldsymbol{y}_k(x)$. Sustituyendo en la expresión anterior se tiene que $W'[\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, ..., \boldsymbol{y}_n](x) = (a_{11}(x) + a_{22}(x) + ... + a_{nn}(x))\cdot W[\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, ..., \boldsymbol{y}_n](x)$ que es una ecuación diferencial lineal de primer orden que tiene por solución $W[\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, ..., \boldsymbol{y}_n](x) = Ce^{\int Traza(A(x))dx}$. Como la función exponencial no se anula, se tiene que $W[\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, ..., \boldsymbol{y}_n](x) = 0$ sólo cuando C es igual a 0, por lo que $W[\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, ..., \boldsymbol{y}_n](x)$ es la función nula o no se anula en ningún punto del intervalo (a, b). □

De la demostración de este teorema se deduce que:

$W'[\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, ..., \boldsymbol{y}_n](x) = traza(A) \cdot W[\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, ..., \boldsymbol{y}_n](x)$.

Como conclusión de los teoremas anteriores se tiene el siguiente corolario:

Corolario 11.2.6:

Si las funciones $\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{y}_2$, ..., $\boldsymbol{y}_n$ son soluciones del sistema lineal homogéneo de ecuaciones diferenciales $\boldsymbol{y}'(\mathrm{x}) = A(x) \cdot \boldsymbol{y}(x)$ en el intervalo (a, b), las tres condiciones siguientes son equivalentes:

a) Las funciones $\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{y}_2$, ..., $\boldsymbol{y}_n$ son linealmente independientes en (a, b).

b) Existe un $x \in (a, b)$ tal que $W[\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, ..., \boldsymbol{y}_n](x)$ es distinto de cero.

c) Para todo $x \in (a, b)$ se verifica que $W[\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, ..., \boldsymbol{y}_n](x)$ es distinto de cero.

Es evidente que:

- a) $\Rightarrow$ b) por el teorema 11.2.4,
- b) $\Rightarrow$ a) por el teorema 11.2.1,
- b) $\Rightarrow$ c) por el teorema 11.2.5,
- c) $\Rightarrow$ b) trivial.

Definición 11.2.3:

Se llama ***sistema fundamental de soluciones*** del sistema lineal homogéneo $\boldsymbol{y}'(\mathrm{x}) = A(x) \cdot \boldsymbol{y}(x)$ en un intervalo (a, b), a cualquier conjunto de n soluciones linealmente independientes en (a, b).

Teorema 11.2.7:

Siempre existe un sistema fundamental de soluciones del sistema lineal homogéneo de primer orden $\boldsymbol{y}'(\mathrm{x}) = A(x)\cdot\boldsymbol{y}(x)$, en el intervalo (a, b).

Demostración:

Sea $x_0 \in (a, b)$. Por el teorema de existencia de soluciones se sabe que existen funciones $\boldsymbol{y}_k(x)$, para k desde 1 hasta n, que son solución del sistema y cada una verifica la condición inicial siguiente: $\boldsymbol{y}_1(x_0) = (1, 0, ..., 0)$, $\boldsymbol{y}_2(x_0) = (0, 1, ..., 0)$, ..., $\boldsymbol{y}_n(x_0) = (0, 0, ..., 1)$,

Las funciones $\boldsymbol{y}_1(x)$, $\boldsymbol{y}_2(x)$, ..., $\boldsymbol{y}_n(x)$ son linealmente independientes, ya que si existen n constantes c_1, c_1, ..., c_n tales que $c_1\boldsymbol{y}_1(x) + c_2\boldsymbol{y}_2(x) + ... + c_n\boldsymbol{y}_n(x) = \mathbf{0}\ \forall x \in (a, b)$, se tiene que:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k y_{k_1}(x_0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0.$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k y_{k_2}(x_0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

....

$$\sum_{k=1}^{n} c_k y_{k_n}(x_0) = 0 \Rightarrow c_n = 0$$

En consecuencia las n funciones son linealmente independientes y por lo tanto forman un sistema fundamental de soluciones. □

Teorema 11.2.8:

Si $\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, ..., \boldsymbol{y}_n\}$ es un sistema fundamental de soluciones del sistema lineal homogéneo de primer orden $\boldsymbol{y}'(\mathrm{x}) = A(x)\cdot\boldsymbol{y}(x)$, en el intervalo (a, b), entonces toda solución $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x))$ del sistema se puede expresar de la forma $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x)$, donde $c_1, c_2, ..., c_n$ son constantes.

Demostración:

Sea $\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, ..., \boldsymbol{y}_n\}$ un sistema fundamental de soluciones, φ una solución del sistema $\boldsymbol{y}'(x) = A(x)\cdot\boldsymbol{y}(x)$, y x_0 un punto del intervalo (a, b), entonces por el *corolario 11.2.6*, $W[\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, ..., \boldsymbol{y}_n](x_0) \neq 0$.

Se determina $\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0), ..., \varphi_n(x_0)$ y se considera el siguiente sistema de n ecuaciones en las incógnitas $c_1, c_2, ..., c_n$:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k y_{k_1}(x_0) = \varphi_1(x_0)$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k y_{k_2}(x_0) = \varphi_2(x_0)$$

....

$$\sum_{k=1}^{n} c_k y_{k_n}(x_0) = \varphi_n(x_0)$$

Como $W[\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, ..., \boldsymbol{y}_n](x_0)$ es el determinante de la matriz de los coeficientes y es distinto de cero, el sistema tiene solución única, es decir existen $c_1, c_2, ..., c_n$ constantes que verifican las n ecuaciones y por el teorema de unicidad $\varphi = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k$. □

Teorema 11.2.9:

Sea Λ el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo de primer orden $\boldsymbol{y}'(x) = A(x)\cdot\boldsymbol{y}(x)$ en el intervalo (a, b). Entonces Λ tiene estructura de ***espacio vectorial de dimensión n***.

Demostración:

Como el *teorema 11.2.3* garantiza la linealidad de las soluciones del sistema $\boldsymbol{y}'(x) = A(x)\cdot\boldsymbol{y}(x)$, y además se verifican los axiomas de espacio vectorial, se tiene que Λ el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo tiene estructura de espacio vectorial. Un sistema fundamental de soluciones del sistema, que existe como resultado del *teorema 11.2.7*, es una base del espacio vectorial Λ ya que:

a) Es un sistema de generadores, pues por el *teorema 11.2.8* cualquier solución se puede expresar como combinación lineal de los elementos del sistema fundamental de soluciones.

b) Por definición son funciones linealmente independientes. □

Se puede observar que cada solución no puede depender de más de n soluciones independientes, ya que suponiendo que hubiera $n + 1$ y particularizando en un punto x_0 se encontrarían $n + 1$ vectores de $\Re^{\mathbf{n}}$ linealmente independientes, que es imposible.

Corolario 11.2.10:

Sea $\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, ..., \boldsymbol{y}_n\}$ un sistema fundamental de soluciones del sistema lineal homogéneo $\boldsymbol{y}'(x) = A(x)\cdot\boldsymbol{y}(x)$ en el intervalo (a, b). La ***solución general*** de este sistema se puede expresar de la forma:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \boldsymbol{y_k}(x) = c_1\cdot\begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ ... \\ y_{1n}(x) \end{pmatrix} + ... + c_n\cdot\begin{pmatrix} y_{n1}(x) \\ ... \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

11.2.3. Matriz fundamental

Definición 11.2.4:

Se denomina ***matriz fundamental*** del sistema lineal homogéneo $\boldsymbol{y}'(x) = A(x)\cdot\boldsymbol{y}(x)$ a una matriz $\Phi(x)$ cuyas columnas son n soluciones linealmente independientes del sistema, es decir, son un sistema fundamental de soluciones en un intervalo (a, b),

$$\Phi(x) = (\boldsymbol{y_1}(x), \boldsymbol{y_2}(x), \ldots, \boldsymbol{y_n}(x)) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) & \ldots & y_{n1}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{1n}(x) & \ldots & y_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

Definición 11.2.5:

Se denomina ***matriz solución*** del sistema lineal homogéneo $\boldsymbol{y}'(x) = A(x)\cdot\boldsymbol{y}(x)$ a una matriz $\psi(x)$ cuyas columnas son soluciones del sistema, sean linealmente independientes o no.

Definición 11.2.6:

Se denomina ***matriz fundamental principal*** del sistema lineal homogéneo $\boldsymbol{y}'(x) = A(x)\cdot\boldsymbol{y}(x)$ a una matriz fundamental $\Phi(x)$ tal que para un valor x_0 verifique que $\Phi(x_0) = I$, siendo I la matriz identidad.

En algunos textos se dice que una matriz de soluciones linealmente independientes es fundamental cuando además es principal.

La solución general de un sistema homogéneo se puede expresar en términos de la matriz fundamental del sistema: $\boldsymbol{y} = \Phi(x)\cdot\boldsymbol{C}$, donde $\boldsymbol{C}$ es un vector de constantes indeterminadas. Una matriz fundamental queda caracterizada por verificar:

a) $\Phi'(x) = A(x)\cdot\Phi(x)$, pues es una matriz solución, y

b) Su determinante es distinto de cero.

Propiedades de la matriz fundamental:

1. Fórmula de *Jacobi*: Si $\psi(x)$ es una matriz solución entonces:

$$(\det\psi)'(x) = traza(A(x))\cdot\det\psi(x)$$

$$\det(\Psi(x)) = \det\Psi(x_0)\cdot e^{\int_{x_0}^{x} traza(A(s)).ds}$$

Resultados que ya han sido comentados en la demostración del *teorema 11.2.5*.

2. Sea $\Phi(x)$ una matriz solución. $\Phi(x)$ es una matriz fundamental si y sólo si existe algún $x_0 \in (a, b)$ tal que $\det(\Phi(x_0))$ es distinto de cero.

Es una consecuencia del *corolario 11.2.6*.

3. Si Φ es una matriz fundamental entonces cualquier otra matriz fundamental es de la forma $\Phi\cdot P$ donde P es una matriz regular de orden n. Sin embargo, como el producto de matrices no es necesariamente conmutativo, $P\cdot\Phi$ puede no ser una matriz fundamental.

4. Si Φ es una matriz fundamental se comprueba que:

$$y(x) = y_G(x) + y_P(x) = \Phi(x)\cdot C + \int \Phi(x)\cdot\Phi^{-1}(s)\cdot b(s)\cdot ds$$

Esta fórmula se estudia posteriormente en 11.5.1, y se conoce con el nombre de **fórmula de variación de las constantes**.

5. Si Φ es una matriz fundamental, y si se considera el problema de valor inicial: $\begin{cases} y'(x) = A(x)\cdot y(x) + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ donde (x_0, y_0) $\in$ (a, b)x$\mathfrak{R}^n$ entonces la única solución es:

$$y(x) = \Phi(x)\cdot\Phi^{-1}(x_0).x_0 + \int_{x_0}^{x}\Phi(x)\cdot\Phi^{-1}(s)\cdot b(s)\cdot ds\,.$$

Se observa que conocida la matriz fundamental se puede obtener el conjunto de soluciones del sistema homogéneo, y que si se pudiera calcular la integral que aparece en la *propiedad 4* se tendría de manera explícita todas las soluciones. Desgraciadamente, existen pocos tipos de sistemas en los que se puede encontrar de manera explícita la matriz fundamental.

11.2.4. Estructura de las soluciones del sistema no homogéneo

El conjunto de soluciones de un sistema lineal de primer orden no homogéneo tiene estructura de espacio afín, siendo su espacio vectorial asociado el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo. El desarrollo para obtener este resultado es muy similar al que se realizaba para determinar la estructura de las soluciones de las ecuaciones diferenciales de orden superior. Previamente se demuestra que una solución general del sistema no homogéneo se puede obtener a partir de una solución particular de éste y la solución general del sistema homogéneo. Este resultado, que ya se estudió para las ecuaciones lineales de primer orden y de orden superior, es esencial para resolver sistemas no homogéneos.

Teorema 11.2.11:

Sea $A(x)$ una función matricial y $\boldsymbol{b}(x)$ una función vectorial, continuas en un intervalo abierto (a, b). Si $\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{y}_2$, ..., $\boldsymbol{y}_n$ son n soluciones linealmente independientes del sistema lineal homogéneo de primer orden $\boldsymbol{y}'(\mathrm{x}) = A(x)\cdot\boldsymbol{y}(x)$ en el intervalo (a, b) y φ_P es una solución cualquiera del sistema no homogéneo $\boldsymbol{y}'(\mathrm{x}) = A(x)\cdot\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{b}(x)$, entonces para toda solución φ de este sistema, existen n constantes $c_1, c_2, ..., c_n$, tales que φ puede expresarse por $\varphi = \varphi_P + \sum_{k=1}^{n} c_k \boldsymbol{y}_k$

Demostración:

Sea φ una solución arbitraria del sistema $\boldsymbol{y}'(\mathrm{x}) = A(x)\cdot\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{b}(x)$. Como φ_P también es solución se tiene que ambas funciones verifican el sistema, por lo que $\varphi'(\mathrm{x}) = A(x)\cdot\varphi(x) + \boldsymbol{b}(x)$ y $\varphi_P'(\mathrm{x}) = A(x)\cdot\varphi_P(x) + \boldsymbol{b}(x)$.

Por lo tanto restando ambas igualdades: $\varphi'(\mathrm{x}) - \varphi_P'(\mathrm{x}) = A(x)\cdot(\varphi(x) - \varphi_P'(\mathrm{x}))$, es decir, $\varphi - \varphi_P$ es una solución del sistema homogéneo.

Por el *teorema 11.2.8* existen n constantes $c_1, c_2, ..., c_n$, tales que $\varphi - \varphi_P = \sum_{k=1}^{n} c_k \boldsymbol{y}_k \Rightarrow \varphi = \varphi_P + \sum_{k=1}^{n} c_k \boldsymbol{y}_k$, de donde se deduce que la solución general φ del sistema no homogéneo se puede expresar como la suma de una solución particular de éste, φ_P, más la solución general del sistema homogéneo asociado $\sum_{k=1}^{n} c_k \boldsymbol{y}_k$. □

Teorema 11.2.12:

Sea $A(x)$ una función matricial y $\boldsymbol{b}(x)$ una función vectorial, continuas en un intervalo abierto (a, b). El conjunto de soluciones del sistema no homogéneo $\boldsymbol{y}'(\mathrm{x}) = A(x)\cdot\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{b}(x)$ tiene estructura de ***espacio afín*** de dimensión n construido sobre el espacio vectorial de soluciones del sistema homogéneo $\boldsymbol{y}'(\mathrm{x}) = A(x)\cdot\boldsymbol{y}(x)$.

Sea Λ el conjunto de soluciones del sistema homogéneo, que por el *teorema 11.2.9* tiene estructura de espacio vectorial de dimensión n, y sea $\mathfrak{I}$ el conjunto de soluciones del sistema no homogéneo.

La aplicación h: $\mathfrak{I} \times \mathfrak{I} \to \Lambda$, definida por $h(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi_2 - \varphi_1$ estructura a $\mathfrak{I}$ como espacio afín ya que:

Si $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{I} \Rightarrow (\varphi_2 - \varphi_1)' = (\varphi_2)' - (\varphi_1)' = (A(x)\cdot\varphi_2(x) + \boldsymbol{b}(x)) - (A(x)\cdot\varphi_1(x) + \boldsymbol{b}(x)) = A(x)\cdot(\varphi_2 - \varphi_1)(x) \Rightarrow \varphi_2 - \varphi_1 \in \Lambda$.

Además se verifican los axiomas de espacio afín:

1º $\forall\varphi_1 \in \mathfrak{I}$ y $\forall\psi \in \Lambda$ entonces $\exists\ \varphi_2 \in \Xi$, tal que $h(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi_2 - \varphi_1 = \psi$.

Basta tomar $\varphi_2 = \varphi_1 + \psi \in \mathfrak{I}$. Es evidente que $\varphi_2 \in \mathfrak{I}$ ya que $\varphi_2'(x) = (\varphi_1 + \psi)'(x) = \varphi_1'(x) + \psi'(x) = A(x)\cdot\varphi_1(x) + \boldsymbol{b}(x) + A(x)\cdot\psi(x) = A(x)\cdot(\varphi_1 + \psi)(x) + \boldsymbol{b}(x) = A(x)\cdot\boldsymbol{\varphi_2}(x) + \boldsymbol{b}(x)$.

2º Si $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \mathfrak{I}$ entonces $h(\varphi_1, \varphi_2) + h(\varphi_2, \varphi_3) = h(\varphi_1, \varphi_3)$, lo que se verifica ya que $\varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_3 - \varphi_2 = \varphi_3 - \varphi_1$.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 11.2.1: Comprobar que $\Phi_1(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ -e^{2x} & -xe^{2x}+e^{2x} \end{pmatrix}$ y $\Phi_2(x) = \begin{pmatrix} e^{2x}+xe^{2x} & xe^{2x} \\ -xe^{2x} & e^{2x}-xe^{2x} \end{pmatrix}$ son matrices fundamentales del sistema:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Para comprobar que $\Phi_1(x)$ es solución del sistema $\boldsymbol{y}' = A\cdot\boldsymbol{y}$, se debe verificar que $\Phi_1'(x) = A\cdot\Phi_1(x)$.

$\Phi_1'(x) = \begin{pmatrix} 2e^{2x} & e^{2x}+2xe^{2x} \\ -2e^{2x} & e^{2x}-2xe^{2x} \end{pmatrix}$ y coincide con $A\cdot\Phi_1(x)$ ya que

$$A\cdot\Phi_1(x) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ -e^{2x} & e^{2x}-xe^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2x} & e^{2x}+2xe^{2x} \\ -2e^{2x} & e^{2x}-2xe^{2x} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto es una matriz solución y como además es regular (pues su determinante vale $4e^{4x}$ por lo que es distinto de cero), entonces es una matriz fundamental.

Análogamente $\Phi_2'(x) = \begin{pmatrix} 3e^{2x}+2xe^{2x} & e^{2x}+2xe^{2x} \\ -e^{2x}-2xe^{2x} & e^{2x}-2xe^{2x} \end{pmatrix}$ y $A\cdot\Phi_2(x) =$ $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{2x}+xe^{2x} & xe^{2x} \\ -xe^{2x} & e^{2x}-xe^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^{2x}+2xe^{2x} & e^{2x}+2xe^{2x} \\ -e^{2x}-2xe^{2x} & e^{2x}-2xe^{2x} \end{pmatrix}$, por lo que $\Phi_2(x)$ es una matriz solución del sistema. Además es regular (pues su determinante vale e^{4x} por lo que es distinto de cero). Por lo tanto es también una matriz fundamental.

Ejemplo 11.2.2: Dada la matriz $\Phi(x) = \begin{pmatrix} 2e^{2x} & 3e^{x} \\ e^{2x} & 2e^{x} \end{pmatrix}$ encontrar un sistema de ecuaciones diferenciales para el que $\Phi(x)$ sea una matriz fundamental.

$\boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} 2e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{y}_2 = \begin{pmatrix} 3e^{x} \\ 2e^{x} \end{pmatrix}$ son soluciones linealmente independientes del sistema buscado. Además $\boldsymbol{y}_1' = 2\boldsymbol{y}_1$ e $\boldsymbol{y}_2' = \boldsymbol{y}_2$. Por lo tanto $\Phi(x)$ es una matriz fundamental del sistema $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 11.2.3: Demostrar que si $\boldsymbol{z}_1 = (\boldsymbol{a} + i \cdot \boldsymbol{b}) \cdot e^{(\alpha+\beta i)x}$ y $\boldsymbol{z}_2 = (\boldsymbol{a} - i \cdot \boldsymbol{b}) \cdot e^{(\alpha-\beta i)x}$ son soluciones complejas linealmente independientes de un sistema lineal de dos ecuaciones diferenciales entonces:

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}_1 = Real((\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \cdot i)e^{(\alpha+\beta i)x}) \\ \boldsymbol{y}_2 = Im((\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \cdot i)e^{(\alpha+\beta i)x}) \end{cases}$$

son soluciones reales del sistema linealmente independientes.

Las funciones $\boldsymbol{y}_1$ y $\boldsymbol{y}_2$ son combinaciones lineales de las funciones $\boldsymbol{z}_1$ e $\boldsymbol{z}_2$ ya que:

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}_1 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{z}_2) = e^{\alpha x} \cdot (\boldsymbol{a} \cdot \cos \beta x - \boldsymbol{b} \cdot \mathrm{sen}\, \beta x), \\ \boldsymbol{y}_2 = \frac{1}{2i}(\boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{z}_2) = e^{\alpha x} (\boldsymbol{b} \cdot \cos \beta x + \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{sen}\, \beta x) \end{cases}$$

por lo tanto son también soluciones del sistema. Además son linealmente independientes ya que:

$$W[\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2] = e^{\alpha x} \begin{vmatrix} a_1 \cos\beta x - b_1 \operatorname{sen}\beta x & b_1 \cos\beta x + a_1 \operatorname{sen}\beta x \\ a_2 \cos\beta x - b_2 \operatorname{sen}\beta x & b_2 \cos\beta x + a_2 \operatorname{sen}\beta x \end{vmatrix} = e^{\alpha x}\cdot(a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Para demostrar que $a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \neq 0$, se calcula el wronskiano de las soluciones $\boldsymbol{z}_1$ e $\boldsymbol{z}_2$, que por hipótesis son linealmente independientes, y por lo tanto es distinto de cero:

$$W[\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2] = e^{\alpha x}\cdot \begin{vmatrix} (a_1 + ib_1)e^{\beta x} & (a_1 - ib_1)e^{-\beta x} \\ (a_2 + ib_2)e^{\beta x} & (a_2 - ib_2)e^{-\beta x} \end{vmatrix} = 2i\cdot e^{\alpha x}\cdot(b_1 a_2 - b_2 a_1).$$

Comparando ambos determinantes se observa que las soluciones $\boldsymbol{z}_1$ y $\boldsymbol{z}_2$ son linealmente independientes si y sólo si $\boldsymbol{y}_1$ e $\boldsymbol{y}_2$ son linealmente independientes.

Ejercicios

11.4. Comprobar que $\Phi(x) = \begin{pmatrix} 4e^{2x} & -e^{-3x} \\ e^{2x} & e^{-3x} \end{pmatrix}$ es una matriz fundamental del sistema $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

11.5. Dada la matriz $\Phi(x) = \begin{pmatrix} e^{3x} & (1-2x)e^{3x} \\ e^{3x} & -2xe^{3x} \end{pmatrix}$ encontrar un sistema de ecuaciones diferenciales para el que $\Phi(x)$ es una matriz fundamental.

11.6. Comprobar que $\Phi(x) = \begin{pmatrix} 0 & -2e^x & 0 \\ 0 & e^x & 2e^{3x} \\ e^x & xe^x & e^{3x} \end{pmatrix}$ es una matriz fundamental del sistema $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

11.3. SISTEMAS LINEALES HOMOGÉNEOS CON COEFICIENTES CONSTANTES

En los **sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes** es posible dar una descripción completa del conjunto de soluciones y de muchas de sus propiedades cualitativas. Por razones de claridad los ejemplos se limitan a sistemas de dos o tres ecuaciones. En esta sección se estudian los sistemas homogéneos, haciendo uso del cálculo de autovectores y autovalores. Sólo se contempla el caso en que los coeficientes son reales, pero el caso de coeficientes complejos se podría estudiar de forma similar con ligeras modificaciones, como reemplazar la transpuesta de una matriz por la hermítica conjugada.

Un sistema lineal y homogéneo de coeficientes constantes $\mathbf{y'} = A \cdot \mathbf{y}$ es un sistema autónomo pues A, al ser constante no depende de x, por lo que basta con estudiarlo en $x = 0$ para tenerlo estudiado para cualquier problema de valor inicial. Los sistemas autónomos se estudiarán con mayor profundidad en el *capítulo 12: Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales*.

Ante un sistema lineal, lo primero que se debe intentar es transformarlo en otro más sencillo o en una ecuación de orden *n*. Las estrategias para conseguirlo pueden ser muy diversas, como son las distintas técnicas algebraicas que permiten resolver un sistema lineal o utilizar determinados cambios de variable. Una forma sistemática de realizar combinaciones lineales entre las ecuaciones del sistema de manera que se reduzca a una ecuación de orden superior consiste en utilizar operadores diferenciales, procedimiento que se desarrolla a continuación.

11.3.1. Resolución por eliminación mediante el operador diferencial D

En el capítulo anterior se definía el ***operador diferencial*** **D** como una aplicación de $\Im$ en $\Im$ tal que $\forall f \in \Im$, D(*f*) = $\dfrac{df}{dx}$, siendo $\Im$ la familia de funciones reales de variable real infinitamente derivables en un intervalo (*a*, *b*).

Dado el sistema:

$$\begin{cases} b_{11}y_1'(x)+b_{12}y_2'(x)+\ldots+b_{1n}y_n'(x)=a_{11}y_1(x)+a_{12}y_2(x)+\ldots+a_{1n}y_n(x) \\ b_{21}y_1'(x)+b_{22}y^{''}{}'(x)+\ldots+b_{2n}y_n'=a_{21}y_1(x)+a_{22}y_2(x)+\ldots+a_{2n}y_n(x) \\ \ldots \\ b_{n1}y_1'(x)+b_{n2}y_2'(x)+\ldots+b_{nn}y_n'(x)=a_{n1}y_1(x)+a_{n2}y_2(x)+\ldots+a_{nn}y_n(x) \end{cases} \qquad (11.3.1)$$

Aplicando que D(*y*) = *y’* se puede expresar:

$$\begin{cases} (a_{11}-b_{11}D)y_1(x)+(a_{12}-b_{21}D)y_2(x)+...+(a_{1n}-b_{1n}D)y_n(x)=0 \\ (a_{21}-b_{21}D)y_1(x)+(a_{22}-b_{22}D)y_2(x)+...+(a_{2n}-b_{2n}D)y_n(x)=0 \\ ... \\ (a_{n1}-b_{n1}D)y_1(x)+(a_{n2}-b_{n2}D)y_2(x)+...+(a_{nn}-D)y_n(x)=0 \end{cases}$$

o bien en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11}D & a_{12}-b_{12}D & ... & a_{1n}-b_{1n}D \\ a_{21}-b_{21}D & a_{22}-b_{22}D & ... & a_{2n}-b_{2n}D \\ .... & ... & ... & ... \\ a_{n1}-b_{n1}D & a_{n2}-b_{n2}D & ... & a_{nn}-b_{nn}D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ ... \\ y_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sea el operador Δ(D) = $\begin{vmatrix} a_{11}-b_{11}D & a_{12}-b_{12}D & ... & a_{1n}-b_{1n}D \\ a_{21}-b_{21}D & a_{22}-b_{22}D & ... & a_{2n}-b_{2n}D \\ .... & ... & ... & ... \\ a_{n1}-b_{n1}D & a_{n2}-b_{n2}D & ... & a_{nn}-b_{nn}D \end{vmatrix}$

que se supone que no es la función nula. Δ(D) es un operador polinómico de grado *n*.

Si $\Delta(D) = r_0 + r_1 \cdot D + ... + r_n \cdot D^n$ entonces

$\Delta(D)(y_k(x)) = r_0 \cdot y_k(x) + r_1 \cdot y'_k(x) + ... + r_n \cdot y_k^{n)}(x)$.

Para todo *k*, $1 \leq k \leq n$ se resuelve la ecuación diferencial homogénea de grado *n*: $r_0 \cdot y_k(x) + r_1 \cdot y'_k(x) + ... + r_n \cdot y_k^{n)}(x) = 0$

Una vez obtenidas cada una de las funciones $y_k(x)$ en función de *n* constantes, se tienen en total n^2 constantes que se eliminan hasta dejar sólo *n* sustituyéndolas en el sistema.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 11.3.1: Utilizar el método por eliminación mediante el operador D para resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - 2z \\ \dfrac{dz}{dx} = y + 3z \end{cases}$$

Para resolver el sistema se integra la ecuación diferencial de segundo orden homogénea: $\Delta(\mathrm{D})(z(x)) = 0$.

$$\Delta(\mathrm{D}) = \begin{vmatrix} 1-D & -2 \\ 1 & 3-D \end{vmatrix} = \mathrm{D}^2 - 4\mathrm{D} + 5 = (\mathrm{D} - (2 + i))(\mathrm{D} - (2 - i))$$

La ecuación $(\mathrm{D}^2 - 4\mathrm{D} + 5)z(\mathrm{x}) = 0$ tiene como solución general:

$$z(x) = e^{2x}\cdot(C_1\cdot sen\ x + C_2\cdot cos\ x).$$

Sustituyendo esta solución en la segunda ecuación del sistema:

$y(x) = 2e^{2x}\cdot(C_1 sen\ x + C_2 cos\ x) + e^{2x}\cdot(C_1\cdot cos\ x - C_2\cdot sen\ x) - 3e^{2x}\cdot(C_1\cdot sen\ x + C_2\cdot cos\ x) = e^{2x}\cdot((-C_1 - C_2)\cdot sen\ x + (C_1 - C_2)\cdot cos\ x)$

Por lo tanto la solución del sistema es:

$$\begin{cases} y(x) = e^{2x}\cdot((-C_1 - C_2)\cdot sen\ x + (C_1 - C_2)\cdot cos\ x) \\ z(x) = e^{2x}\cdot(C_1\cdot sen\ x + C_2\cdot cos\ x). \end{cases}$$

Ejemplo 11.3.2: Resolver el sistema:

$$\begin{cases} y'' - 4z = 0 \\ z'' + 4y = 0 \end{cases},$$

utilizando el operador D.

Se expresa el operador D en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} D^2 & -4 \\ 4 & D^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto $\Delta(D) = D^4 + 16$.

Se resuelve la ecuación homogénea de orden 4: $(D^4 + 16)(y(x)) = 0$.

Las raíces de la ecuación característica de esta ecuación diferencial son:

$\lambda_1 = \sqrt{2}\,(1 + i)$; $\lambda_2 = \sqrt{2}\,(-1 + i)$; $\lambda_3 = \sqrt{2}\,(-1 - i)$; $\lambda_4 = \sqrt{2}\,(1 - i)$,

y la solución general:

$$y(x) = e^{\sqrt{2}x}\cdot(C_1\cdot cos\sqrt{2}\,x + C_2\cdot sen\sqrt{2}\,x) + e^{-\sqrt{2}x}(C_3 cos\sqrt{2}\,x + C_4 sen\sqrt{2}\,x).$$

Al calcular $y''(x)$ y sustituir en la primera ecuación se obtiene $z(x)$.

$$y'(x) = \sqrt{2}\,e^{\sqrt{2}x}\cdot((C_1 + C_2)\cdot cos\,\sqrt{2}\,x + (-C_1 + C_2)\cdot sen\,\sqrt{2}\,x)) + \sqrt{2}\,e^{-\sqrt{2}x}\cdot((C_4 - C_3)\cdot cos\,\sqrt{2}\,x + (-C_3 - C_4)\cdot sen\,\sqrt{2}\,x)).$$

$$y''(x) = 4e^{\sqrt{2}x}(C_2\cdot cos\,\sqrt{2}\,x - C_1\cdot sen\,\sqrt{2}\,x) + 4e^{-\sqrt{2}x}(-C_4\cdot cos\,\sqrt{2}\,x + C_3\cdot sen\,\sqrt{2}\,x).$$

$$z(x) = e^{\sqrt{2}x}(C_2 cos\sqrt{2}\,x - C_1 sen\sqrt{2}\,x) + e^{-\sqrt{2}x}(-C_4 cos\sqrt{2}\,x + C_3 sen\sqrt{2}\,x).$$

La solución del sistema es:

$$\begin{cases} y(x) = e^{\sqrt{2}x}\cdot(C_1\cdot cos\sqrt{2}\,x + C_2\cdot sen\sqrt{2}\,x) + e^{-\sqrt{2}x}(C_3 cos\sqrt{2}\,x + C_4 sen\sqrt{2}\,x). \\ z(x) = e^{\sqrt{2}x}\cdot(C_2 cos\sqrt{2}\,x - C_1 sen\sqrt{2}\,x) + e^{-\sqrt{2}x}(-C_4 cos\sqrt{2}\,x + C_3 sen\sqrt{2} \end{cases}$$

x).

11.3.2. Resolución buscando soluciones exponenciales. Método de Euler

La función exponencial, $y = e^{ax}$, verifica que sus derivadas son múltiplos de sí misma. Por lo tanto parece natural que sean de ese tipo las soluciones de un sistema lineal homogéneo con coeficientes constantes.

Se considera el sistema $\mathbf{y}' = A\cdot\mathbf{y}$. Se busca una solución de la forma $\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} B_1 \\ \ldots \\ B_n \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda x}$. Se sustituye en el sistema:

$$\begin{cases} B_1 \lambda e^{\lambda x} = a_{11} B_1 e^{\lambda x} + a_{12} B_2 e^{\lambda x} + \ldots + a_{1n} B_n e^{\lambda x} \\ B_2 \lambda e^{\lambda x} = a_{21} B_1 e^{\lambda x} + a_{22} B_2 e^{\lambda x} + \ldots + a_{2n} B_n e^{\lambda x} \\ \ldots \\ B_n \lambda e^{\lambda x} = a_{n1} B_1 e^{\lambda x} + a_{n2} B_2 e^{\lambda x} + \ldots + a_{nn} B_n e^{\lambda x} \end{cases}$$

y se divide entre $e^{\lambda x}$:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) B_1 + a_{12} B_2 + \ldots + a_{1n} B_n = 0 \\ a_{21} B_1 + (a_{22} - \lambda) B_2 + \ldots + a_{2n} B_n = 0 \\ \ldots \\ a_{n1} B_1 + a_{n2} B_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda) B_n = 0 \end{cases} \qquad (11.3.2)$$

El resultado es un sistema algebraico lineal homogéneo en las variables B_1, B_2, ..., B_n que sólo tiene solución distinta de la trivial cuando el determinante de los coeficientes es igual a cero, es decir:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & ... & a_{2n} \\ .... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Esta ecuación se denomina ***ecuación característica***. Al desarrollar el determinante se obtiene una ecuación polinómica en λ de grado n, en la que el tipo de raíces de la ecuación determina la expresión de las soluciones.

Caso 1: La ecuación característica tiene todas las raíces reales y distintas.

Sean λ_1, λ_2, ..., λ_n las raíces de la ecuación característica, entonces para todo k, $1 \le k \le n$, al sustituir λ por cada valor λ_k en el sistema (11.3.2) se obtiene una solución, no trivial, del sistema algebraico (B_{1k}, B_{2k}, ..., B_{nk}) que determina una solución del sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\boldsymbol{y}_k(x) = (y_{kj}(x)) = \begin{pmatrix} B_{1k} \\ ... \\ B_{nk} \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda_k x}.$$

De esta forma se obtienen n soluciones que, en este caso, son linealmente independientes, y por lo tanto determinan la solución general del sistema que es de la forma $\boldsymbol{y}(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) + ... + C_n \cdot y_n(x)$, y por tanto:

$$\boldsymbol{y}(x) = C_1 \cdot \begin{pmatrix} B_{11} \\ ... \\ B_{n1} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} B_{12} \\ ... \\ B_{n2} \end{pmatrix} e^{\lambda_2 x} + ... + C_n \cdot \begin{pmatrix} B_{1n} \\ ... \\ B_{nn} \end{pmatrix} e^{\lambda_n x}.$$

Caso 2: La ecuación característica tiene raíces complejas distintas.

En este caso se puede obtener la solución general en función de exponenciales complejas y las soluciones de (11.3.2) pueden ser también números complejos. Para analizar el caso en el que se quieren obtener soluciones reales se supone un sistema de dos ecuaciones diferenciales cuya ecuación característica tiene dos raíces complejas conjugadas $\alpha + \beta i$, $\alpha - \beta i$, y dos soluciones linealmente independientes complejas:

$\boldsymbol{y}_1(x) = \boldsymbol{B_1}\cdot e^{(\alpha+\beta i)x} = (\boldsymbol{a} + i\boldsymbol{b})\cdot e^{(\alpha+\beta i)x}$ y

$\boldsymbol{y}_2(x) = \boldsymbol{B_2}\cdot e^{(\alpha-\beta i)x} = (\boldsymbol{a} - i\boldsymbol{b})\cdot e^{(\alpha-\beta i)x}$.

La parte real y la parte imaginaria de estas soluciones se obtienen como combinación lineal de ellas, por lo que son soluciones, son linealmente independientes y son funciones reales, como se comprobó en el *ejemplo 11.2.3*. La solución general del sistema es:

$$\boldsymbol{y}(x) = e^{\alpha x}\cdot\left(C_1\cdot\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\cdot \cos \beta x - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\cdot \operatorname{sen} \beta x\right) + C_2\cdot\left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\cdot \cos \beta x + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\cdot \operatorname{sen} \beta x\right)\right).$$

Caso 3: La ecuación característica tiene raíces múltiples.

Se supone un sistema de dos ecuaciones diferenciales cuya ecuación característica tiene una raíz doble. El caso general se estudia en el siguiente apartado. Sea λ_1 la raíz, entonces $\boldsymbol{y_1}(x) = \boldsymbol{B_1} e^{\lambda_1 x} = \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 x}$ es una solución.

La analogía con las ecuaciones de orden *n* llevaría a pensar que la otra solución linealmente independiente con ella es $\boldsymbol{y_2}(x) = \boldsymbol{B_2} x e^{\lambda_1 x}$. Sin embargo puede no ser así, la otra solución del sistema tiene la forma $\boldsymbol{y_2}(x) = (\boldsymbol{B}_1 x + \boldsymbol{B}_2)\cdot e^{\lambda_1 x}$. Sustituyendo esta solución en el sistema se determinan los vectores $\boldsymbol{B}_1$ y

$\mathbf{B}_2$.

La solución general del sistema es:

$$\mathbf{y}(x) = C_1\cdot\begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 x} + C_2\cdot\left(\begin{pmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{pmatrix}\cdot x\right)e^{\lambda_1 x}.$$

Ejemplos resueltos

Ejemplo 11.3.3: Resolver el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + z \\ \dfrac{dz}{dt} = 3x + y \end{cases}$$

Se calculan las raíces de la ecuación característica: $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 3 & -\lambda & 1 \\ 3 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$-\lambda^3 + 7\lambda + 6 = 0 \Rightarrow (-1)\cdot(\lambda - 3)\cdot(\lambda + 2)\cdot(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow$ Las raíces de la ecuación característica $\lambda = 3$, $\lambda = -2$ y $\lambda = -1$ son reales y distintas.

Para $\lambda = 3$ se buscan soluciones de la forma $x(t) = A_1 e^{3t}$, $y(t) = B_1 e^{3t}$, $z(t) = C_1 e^{3t}$ siendo A_1, B_1, C_1 soluciones del sistema algebraico homogéneo:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cuya solución es $A_1 = K$, $B_1 = C_1 = \dfrac{3}{2}K_1$, por lo que la solución buscada es $x(t)$

$= 2e^{3t}$, $y(t) = 3e^{3t}$, $z(t) = 3e^{3t}$.

Para $\lambda = -2$, se buscan soluciones de la forma $x(t) = A_2e^{-2t}$, $y(t) = B_2e^{-2t}$, $z(t) = C_2e^{-2t}$ siendo A_2, B_2, C_2 soluciones del sistema algebraico homogéneo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cuya solución es $A_2 = K_2$, $B_2 = C_2 = -K_2$, por lo que la solución buscada es $x(t) = e^{-2t}$, $y(t) = -e^{-2t}$, $z(t) = -e^{-2t}$.

Para $\lambda = -1$, se buscan soluciones de la forma $x(t) = A_3e^{-t}$, $y(t) = B_3e^{-t}$, $z(t) = C_3e^{-t}$ siendo A_3, B_3, C_3 soluciones del sistema algebraico homogéneo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cuya solución es $A_3 = 0$, $B_3 = -C_3 = K_3$, por lo que la solución buscada es $x(t) = 0$, $y(t) = e^{-t}$, $z(t) = -e^{-t}$.

La solución general del sistema de ecuaciones diferenciales es:

$$\begin{cases} x(t) = 2K_1\cdot e^{3t} + K_2\cdot e^{-2t} \\ y(t) = 3K_1\cdot e^{3t} - K_2\cdot e^{-2t} + K_3\cdot e^{-t} \\ z(t) = 3K_1\cdot e^{3t} - K_2\cdot e^{-2t} - K_3\cdot e^{-t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = K_1\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}\cdot e^{3t} + K_2\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\cdot e^{-2t} + K_3\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\cdot e^{-t}.$$

Ejemplo 11.3.4: Resolver el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2y - 9z \\ \dfrac{dz}{dx} = y + 8z \end{cases}.$$

Se resuelve la ecuación característica: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -9 \\ 1 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0 \Rightarrow (\lambda - 5)^2 = 0$, por lo tanto la ecuación característica tiene una raíz doble y una solución del sistema es de la forma:

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix} = (\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} x)\cdot e^{5x}.$$

Al sustituir en la primera ecuación del sistema se obtiene:

$(5(A_1 + A_2x) + A_2)\cdot e^{5x} = 2(A_1 + A_2x)\cdot e^{5x} - 9(B_1 + B_2x)\cdot e^{5x} \Rightarrow$

$3A_1 + 9B_1 + A_2 + (3A_2 + 9B_2)\cdot x = 0 \Rightarrow$

Si $B_2 = K_2$, $A_2 = -3K_2$ y si $B_1 = K_1$, $A_1 = -3K_1 + K_2$,

y por lo tanto la solución general del sistema es:

$$\begin{cases} y(x) = (-3K_1 + K_2 - 3K_2x)\cdot e^{5x}, \\ z(x) = (K_1 + K_2x)\cdot e^{5x}. \end{cases}$$

11.3.3. Ecuación característica. Autovalores y autovectores

Se considera el sistema $\boldsymbol{y}' = A\cdot\boldsymbol{y}$ con $\boldsymbol{y}(x) = (y_k(x))$, $1 \le k \le n$. Se supone que el sistema tiene una solución de la forma $\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{v}\cdot e^{\lambda x}$, donde $\boldsymbol{v}$ es un vector de $\Re^n$ no nulo. Para que $\boldsymbol{y}(x)$ sea solución se debe verificar que:

$$\boldsymbol{y}'(x) = \lambda\cdot\boldsymbol{v}\cdot e^{\lambda x} = A\cdot\boldsymbol{v}\cdot e^{\lambda x} \Rightarrow \lambda\cdot\boldsymbol{v} = A\cdot\boldsymbol{v},$$

es decir, $A \cdot \boldsymbol{v}$ es un múltiplo de $\boldsymbol{v}$, lo que indica que $\boldsymbol{v}$ es un autovector de la matriz A y λ un autovalor.

Por este procedimiento, en el caso en que se pudieran encontrar n soluciones de este tipo linealmente independientes, se tendría resuelto el sistema. Antes de demostrar que existe al menos una solución de esta forma y de buscar un sistema fundamental de soluciones se definen los conceptos algebraicos necesarios para desarrollar la teoría.

Definición 11.3.1:

Dada una matriz cuadrada A de orden n, se denomina ***vector propio***, ***vector característico***, ***autovector*** o ***eigenvector*** de A, a un vector $\boldsymbol{v}$ real o complejo, distinto de cero, para el que existe un valor λ, tal que $A \cdot \boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$ o lo que es lo mismo $(A - \lambda \mathrm{I}) \cdot \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ donde I es la matriz identidad.

Definición 11.3.2:

Dada una matriz cuadrada A de orden n, y $\boldsymbol{v}$ un vector característico de A, se denomina ***valor propio***, ***autovalor*** o ***eigenvalor*** de A, a un número real o complejo λ que verifica que $(A - \lambda \mathrm{I}) \cdot \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.

Si para un valor λ y un vector $\boldsymbol{v}$ se verifica que $(A - \lambda \mathrm{I}) \cdot \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, se dice que λ es un autovalor de la matriz A y $\boldsymbol{v}$ es un autovector de A asociado al autovalor λ.

Definición 11.3.3:

Dada una matriz cuadrada A de orden n, se denomina ***ecuación característica*** de A a la ecuación $|A - \lambda \mathrm{I}| = 0$.

Proposición 11.3.1:

Dada una matriz cuadrada A de orden n, λ es un autovalor de A si y sólo si es una raíz de su ecuación característica.

Demostración:

Sea $A = (a_{ij})$ y $\boldsymbol{v} = (v_1, ..., v_n)$ un autovector de A asociado al autovalor λ. La ecuación matricial $(A - \lambda I)\cdot\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ se expresa:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)v_1 + a_{12}v_2 + ... + a_{1n}v_n = 0 \\ a_{21}v_1 + (a_{22}-\lambda)v_2 + ... + a_{2n}v_n = 0 \\ \qquad\qquad ... \\ a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + ... + (a_{nn}-\lambda)v_n = 0 \end{cases}.$$

Este sistema admite una solución no trivial para los valores de λ para los que el determinante de los coeficientes $|A - \lambda I|$ se anula, por lo que si λ es un autovalor de A es equivalente a decir que es una raíz de su ecuación característica. □

Ya que $|A - \lambda I| = 0$ es una ecuación polinómica de grado n, no puede tener mas de n autovalores. Si λ es una raíz múltiple de orden m se dice que el autovalor tiene multiplicidad m. Por el teorema fundamental del Álgebra se sabe que A tiene exactamente n autovalores contando cada uno tantas veces como indica su multiplicidad.

Proposición 11.3.2:

Si $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_m$ son m autovectores de A asociados, respectivamente, a m autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, entonces los vectores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_m$ son linealmente independientes.

Demostración:

Se demuestra por inducción sobre m. Para $m = 1$ es inmediato ya que un autovector no puede ser el vector cero.

Supuesto cierto para $k - 1$ vectores, se consideran k autovectores $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, ..., $\boldsymbol{v}_k$ asociados a los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$.

Si existen c_i no todos nulos tales que $\sum_{i=1}^{k} c_i \boldsymbol{v}_i = 0$, al multiplicar por la matriz A se tiene que $\sum_{i=1}^{k} c_i \lambda_i \boldsymbol{v}_i = 0$.

Se puede suponer que al menos una de las constantes $c_1, c_2, ..., c_{k-1}$ es distinta de cero, multiplicando $\sum_{i=1}^{k} c_i \boldsymbol{v}_i$ por λ_k y restando $\sum_{i=1}^{k} c_i \lambda_i \boldsymbol{v}_i$, se anula el sumando k-ésimo y se obtiene $\sum_{i=1}^{k-1} c_i (\lambda_k - \lambda_i) \boldsymbol{v}_i = 0$, lo que contradice la hipótesis de inducción ya que los autovalores son distintos. Por lo tanto las constantes c_i son nulas para todo i lo que implica que los autovectores son linealmente independientes. □

Proposición 11.3.3:

Sea $\boldsymbol{y}(x)$ una solución del sistema $\boldsymbol{y}' = A \cdot \boldsymbol{y}$. Si existe un valor x_0 tal que el vector $\boldsymbol{y}(x_0)$ es un autovector de A asociado al autovalor λ, es decir $A \cdot \boldsymbol{y}(x_0) = \lambda \boldsymbol{y}(x_0)$, entonces para todo valor de x se verifica que $A \cdot \boldsymbol{y}(x) = \lambda \boldsymbol{y}(x)$.

Demostración:

Se considera la función $\boldsymbol{z}(x) = \boldsymbol{y}'(x) - \lambda \boldsymbol{y}(x)$. Por ser $\boldsymbol{y}(x)$ una solución del sistema se tiene que $\boldsymbol{z}(x) = A \cdot \boldsymbol{y}(x) - \lambda \boldsymbol{y}(x)$, como por hipótesis $A \cdot \boldsymbol{y}(x_0) = \lambda \boldsymbol{y}(x_0)$, se verifica que $\boldsymbol{z}(x_0) = 0$. Aplicando el teorema de unicidad $\boldsymbol{z}(x)$ es la función idénticamente cero y por lo tanto para todo valor de x se tiene que $A\cdot\boldsymbol{y}(x) = \lambda\boldsymbol{y}(x)$. □

Definición 11.3.4:

Se dice que una solución $\boldsymbol{y}(x)$ del sistema $\boldsymbol{y}' = A\cdot\boldsymbol{y}$ es una ***solución característica*** si para algún valor λ se verifica que $A\cdot\boldsymbol{y}(x) = \lambda\boldsymbol{y}(x)$.

Proposición 11.3.4:

Sea el sistema $\boldsymbol{y}' = A\cdot\boldsymbol{y}$. Para cada autovalor λ de la matriz A, existe al menos una solución característica del sistema, $\boldsymbol{y}(x)$, que se puede expresar de la forma $\boldsymbol{y}(x) = (v_1e^{\lambda x}, v_2e^{\lambda x}, ..., v_ne^{\lambda x})$, siendo $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ un autovector asociado al autovalor λ.

Demostración:

Sea λ un autovalor de la matriz A y $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ un autovector asociado a λ, sea $\boldsymbol{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x))$ una solución característica del sistema tal que $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{v}$, que existe por la *proposición 11.3.3* y verifica que $\boldsymbol{y}'(x) = A\cdot\boldsymbol{y}(x) = \lambda\boldsymbol{y}(x)$. Por lo tanto para todo k, $1 \le k \le n$ se tiene que $y_k'(x) = \lambda y_k(x)$. Integrando se tiene $y_k(x) = c_ke^{\lambda x}$, y puesto que $y_k(0) = c_k = v_k$ se obtiene:

$$\boldsymbol{y}(x) = (v_1e^{\lambda x}, v_2e^{\lambda x}, ..., v_ne^{\lambda x}). \ \square$$

El siguiente teorema permite determinar un sistema fundamental de soluciones y por lo tanto la solución general del sistema cuando los autovalores de la ecuación característica son distintos.

Teorema 11.3.5:

Un conjunto de soluciones características del sistema $\boldsymbol{y}' = A\cdot\boldsymbol{y}$ asociadas a autovalores diferentes de la matriz A es linealmente independiente. En particular si A tiene n autovalores distintos el conjunto de soluciones características es un sistema fundamental de soluciones.

Demostración:

Sean $\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{y}_2$, ..., $\boldsymbol{y}_m$ soluciones características del sistema asociadas, respectivamente, a los m autovalores distintos λ_1, λ_2, ..., λ_m. Por la *proposición 11.3.2* para un valor fijo x_0, los vectores $\boldsymbol{y}_1(x_0)$, $\boldsymbol{y}_2(x_0)$, ..., $\boldsymbol{y}_m(x_0)$ son linealmente independientes y por el *corolario 11.2.6* también son linealmente independientes las funciones $\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{y}_2$, ..., $\boldsymbol{y}_m$.

En particular, si la matriz A tiene n autovalores distintos, las soluciones características $\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{y}_2$, ..., $\boldsymbol{y}_n$ forman un sistema fundamental de soluciones. □

Para todo k, $1 \le k \le n$ por la *proposición 11.3.4* se tiene que $\boldsymbol{y}_k(x) = (v_{k1}e^{\lambda_k}, v_{k2}e^{\lambda_k}, ..., v_{kn}e^{\lambda_k})$ y por tanto la solución general $\boldsymbol{y}(x)$ se puede expresar de la forma:

$$\boldsymbol{y}(x) = C_1\cdot\begin{pmatrix} v_{11} \\ ... \\ v_{1n} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 x} + C_2\cdot\begin{pmatrix} v_{21} \\ ... \\ v_{2n} \end{pmatrix} e^{\lambda_2 x} + ... + C_n\cdot\begin{pmatrix} v_{n1} \\ ... \\ v_{nn} \end{pmatrix} e^{\lambda_n x} =$$

$$= C_1\cdot\boldsymbol{v}_1\cdot e^{\lambda_1 x} + C_2\cdot\boldsymbol{v}_2\cdot e^{\lambda_2 x} + ... + C_n\cdot\boldsymbol{v}_n\cdot e^{\lambda_n x}$$

siendo $\boldsymbol{v}_k = (v_{k1}, v_{k2}, ..., v_{kn})$ un autovector asociado al autovalor λ_k.

El sistema fundamental que se obtiene, en general, puede estar formado por soluciones complejas pero a partir de él se pueden obtener n soluciones reales linealmente independientes y por lo tanto constituyen un sistema fundamental de soluciones; es el resultado de la siguiente proposición.

Proposición 11.3.6:

Sean las funciones $\boldsymbol{z}_1$, $\boldsymbol{z}_2$, ..., $\boldsymbol{z}_n$ soluciones características reales o complejas linealmente independientes del sistema $\boldsymbol{y}' = A\cdot\boldsymbol{y}$, siendo A una matriz real de orden n, entonces se pueden obtener a partir de ellas n soluciones reales linealmente independientes.

Demostración:

Para toda solución compleja $\boldsymbol{z}_k = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\mathrm{i})\cdot e^{(\alpha+\beta \mathrm{i})x}$, se tiene la solución $\boldsymbol{z}_{2k} = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\mathrm{i})\cdot e^{(\alpha-\beta \mathrm{i})x}$. Para cada par de soluciones complejas $\boldsymbol{z}_k$, $\boldsymbol{z}_{2k}$ se obtienen dos soluciones reales linealmente independientes, que son:

$$\boldsymbol{y}_k = Real((\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\mathrm{i})\cdot e^{(\alpha+\beta \mathrm{i})x}) \text{ e } \boldsymbol{y}_{2k} = Im((\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\mathrm{i})\cdot e^{(\alpha+\beta \mathrm{i})x}).$$

Las funciones $\boldsymbol{y}_k$ e $\boldsymbol{y}_{2k}$ son combinaciones lineales de las funciones $\boldsymbol{z}_k$ y $\boldsymbol{z}_{2k}$ ya que:

$$\boldsymbol{y}_k = \frac{1}{2}(\boldsymbol{z}_k + \boldsymbol{z}_{2k}) = e^{\alpha x}\cdot(\boldsymbol{a}\cdot \cos \beta x - \boldsymbol{b}\cdot \operatorname{sen} \beta x);$$

$$\boldsymbol{y}_{2k} = \frac{1}{2i}(\boldsymbol{z}_k - \boldsymbol{z}_{2k}) = e^{\alpha x}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot \cos \beta x + \boldsymbol{a}\cdot \operatorname{sen} \beta x)$$

por lo tanto son también soluciones del sistema y por construcción son linealmente independientes. □

Antes del estudio del caso general se recuerdan algunos resultados de Álgebra lineal.

Definición 11.3.5:

Sea λ un autovalor de la matriz A, se dice que un vector $\boldsymbol{y}_0 \in \mathfrak{R}^n$, $\boldsymbol{y}_0 \neq \mathbf{0}$, esta asociado a λ con multiplicidad m si para el número entero m, y no para otro menor, se verifica que $(A - \lambda I)^m \boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{0}$, es decir:

$$\boldsymbol{y}_0 \in Ker(A - \lambda I)^m \,/\, Ker(A - \lambda I)^{m-1}.$$

Proposición 11.3.7:

Sean $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$, los autovalores de la matriz A, con multiplicidades m_1, m_2, ..., m_r, siendo $\sum_{k=1}^{r} m_k = n$. Entonces para cada autovalor λ_k existe un conjunto de m_k vectores $\boldsymbol{y}_{kj}$, $j \in \{1, 2, ..., m_k\}$ tales que $\boldsymbol{y}_{kj}$ está asociado a λ_k con multiplicidad menor o igual a m_k y el conjunto de vectores $\boldsymbol{y}_{kj}$; $j \in \{1, 2, ..., m_k\}$, $k \in \{1, 2, ..., r\}$, es linealmente independiente.

Esta proposición es consecuencia de las siguientes proposiciones.

Proposición 11.3.8:

Sea $\boldsymbol{y}(x)$ una solución del sistema $\boldsymbol{y}' = A\cdot\boldsymbol{y}$. Si se verifica que para un valor x_0, $(A - \lambda I)^m \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{0}$, entonces para todo x se verifica que $(A - \lambda I)^m \boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{0}$.

Demostración:

Sea $\boldsymbol{z}(x) = (D - \lambda)^m(\boldsymbol{y}(x)) = (A - \lambda I)^m \boldsymbol{y}(x)$; $\boldsymbol{z}(x)$ es solución del sistema $\boldsymbol{y}' = A\cdot\boldsymbol{y}$ por ser combinación lineal de $\boldsymbol{y}(x)$ y de sus derivadas, además $\boldsymbol{z}(x_0) = (A - \lambda I)^m \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{0}$ y por el teorema de unicidad se tiene que $\boldsymbol{z}(x) = \boldsymbol{0}$. □

Proposición 11.3.9:

Si $\boldsymbol{y}(x)$ es una solución del sistema $\boldsymbol{y}' = A\cdot\boldsymbol{y}$ asociada a un autovalor λ con multiplicidad m, es decir, $(A - \lambda I)^m \boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{0}$ entonces $\boldsymbol{y}(x)$ es de la forma:

$$\boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) \\ p_2(x) \\ \dots \\ p_n(x) \end{pmatrix} e^{\lambda x}. \tag{11.3.2}$$

siendo p_k(x), $1 \le k \le n$, polinomios de grado menor o igual a $m - 1$.

Demostración:

Sea $\boldsymbol{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x))$ una solución del sistema tal que $(A - \lambda I)^m \boldsymbol{y}(x) = \mathbf{0}$, por lo tanto se verifica entonces que $(D - \lambda)^m(y_k(x)) = 0$, $1 \le k \le n$.

Por otra parte $(D - \lambda)^m(y_k(x)) = (D - \lambda)^m(e^{\lambda x} \cdot e^{-\lambda x} \cdot y_k(x))$ y aplicando el *lema 10.3.1*: $(D - \lambda)^m(y_k(x)) = e^{\lambda x} \cdot D^m(e^{-\lambda x} \cdot y_k(x))$.

Por lo tanto $e^{\lambda x} \cdot D^m(e^{-\lambda x} \cdot y_k(x)) = 0$; simplificando se obtiene $D^m(e^{-\lambda x} \cdot y_k(x)) = 0$, e integrando $y_k(x) = p_k(x) \cdot e^{\lambda x}$, $1 \le k \le n$ y $grado(p_k(x)) \le m - 1$. □

Teorema 11.3.10:

Siempre existe un sistema fundamental de soluciones del sistema $\boldsymbol{y}' = A \cdot \boldsymbol{y}$, formado por funciones de la forma (11.3.2). Además si se conocen los autovalores de la matriz A, este sistema fundamental se puede obtener mediante un número finito de operaciones elementales.

Demostración:

Por la *proposición 11.3.7* existe un conjunto de n vectores linealmente independientes $\boldsymbol{y}_{k0}$ asociados a los autovalores λ_k de A. Si se determinan las soluciones del sistema $\boldsymbol{y}' = A \cdot \boldsymbol{y}$ de modo que verifiquen las condiciones iniciales $\boldsymbol{y}_k(x_0) = \boldsymbol{y}_{k0}$, estas funciones serán linealmente independientes y de la forma (11.3.2).

Además si λ es un autovalor cualquiera con multiplicidad m se pueden obtener m soluciones linealmente independientes del sistema de la forma $\mathbf{y}(x)$ $= \begin{pmatrix} p_{i1}(x) \\ p_{i2}(x) \\ \dots \\ p_{in}(x) \end{pmatrix} e^{\lambda x}$, con $p_{ij}(x)$ polinomio de grado i con coeficientes indeterminados, siendo $i \leq m - 1$.

Para $i = 0$, sustituyendo $\mathbf{y}(x)$ en el sistema se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas lineales en los coeficientes indeterminados de los polinomios. Este sistema puede que no tenga solución, que tenga una o que tenga varias soluciones no triviales linealmente independientes. Se repite el proceso para $i = 1$ y se obtienen $2n$ ecuaciones lineales en los $2n$ coeficientes indeterminados. Se continúa el proceso hasta $i = m - 1$, hasta obtener m soluciones linealmente independientes.

Haciendo lo mismo con los otros autovalores se obtiene un sistema fundamental de soluciones. □

Se puede precisar más el proceso seguido para calcular los autovectores correspondientes a autovalores múltiples utilizando conceptos algebraicos.

Dado el sistema $\mathbf{y}' = A\cdot\mathbf{y}$, puede ocurrir que la matriz A sea diagonalizable o que no lo sea. En el caso en que la matriz A sea diagonalizable, entonces existe una matriz diagonal D y una matriz P regular tal que $P^{-1}\cdot D\cdot P = A$, entonces existen n autovectores $\mathbf{v}_i$ linealmente independientes, que son las columnas de la matriz P de cambio de base. Estos autovectores son las bases de los subespacios $Ker(A - \lambda_i)$, siendo λ_i los autovalores de la matriz A. Las soluciones linealmente independientes del sistema son de la forma $\varphi_i(x) = \mathbf{v}_i\cdot$

$e^{\lambda_i x}$.

Cuando la matriz A no es diagonalizable el número de autovectores que se obtienen de las bases de los subespacios $Ker(A - \lambda_i)$ es un valor k menor que n y por lo tanto el número de soluciones linealmente independientes de la forma $\varphi_i(x) = \boldsymbol{v}_i \cdot e^{\lambda_i}$ es también k. Las $n - k$ soluciones restantes son del tipo $\varphi_i(x) = \begin{pmatrix} p_{i1}(x) \\ p_{i2}(x) \\ \ldots \\ p_{in}(x) \end{pmatrix} e^{\lambda_i x}$, $p_{ij}(x)$ es un polinomio tal que $grado(p_{ij}(x)) \leq m - 1$ siendo m la multiplicidad de λ_i.

En la siguiente proposición se desarrolla un método para simplificar el cálculo de estos polinomios.

Proposición 11.3.11:

Sea λ un autovalor de A de multiplicidad s tal que en el subespacio $Ker(A - \lambda I)$ sólo se encuentra un autovector $\boldsymbol{v}_1$ linealmente independiente; entonces se pueden encontrar s soluciones linealmente independientes del sistema $\boldsymbol{y}' = A \cdot \boldsymbol{y}$, de la forma: $\varphi_1(x) = \boldsymbol{v}_1 \cdot e^{\lambda x}$ tal que $(A - \lambda I) \cdot \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0}$ y para todo j, $2 \leq j \leq s$,

$$\varphi_j(x) = \left(\boldsymbol{v}_1 \cdot \frac{x^{s-1}}{(j-1)!} + \boldsymbol{v}_2 \cdot \frac{x^{s-2}}{(j-2)!} + \ldots + \boldsymbol{v}_j\right) \cdot e^{\lambda x} \text{ tal que } (A - \lambda I) \cdot \boldsymbol{v}_{j-1} = \boldsymbol{v}_j.$$

Demostración:

Si λ es un autovalor de A de multiplicidad s tal que en el subespacio $Ker(A - \lambda I)$ sólo se encuentra un autovector $\boldsymbol{v}_1$ linealmente independiente se tiene una solución del sistema: $\varphi_1(x) = \boldsymbol{v}_1 \cdot e^{\lambda x}$.

Una segunda solución se busca de la forma $\varphi_2(x) = (\boldsymbol{v}_1 x + \boldsymbol{v}_2) \cdot e^{\lambda x}$. Para determinar $\boldsymbol{v}_2$ se aplica que $\varphi_2(x)$ es solución, es decir $\varphi_2'(x) = A\cdot\varphi_2(x)$, por lo tanto $\boldsymbol{v}_1\cdot e^{\lambda x} + (\boldsymbol{v}_1\cdot x + \boldsymbol{v}_2)\cdot\lambda\cdot e^{\lambda x} = A\cdot(\boldsymbol{v}_1 x + \boldsymbol{v}_2)\cdot e^{\lambda x}$.

Simplificando se tiene $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_1\cdot x\cdot\lambda + \boldsymbol{v}_2\cdot\lambda = A\cdot\boldsymbol{v}_1\cdot x + A\cdot\boldsymbol{v}_2$. Aplicando que $\lambda\cdot\boldsymbol{v}_1 = A\cdot\boldsymbol{v}_1$ se obtiene: $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2\cdot\lambda = A\cdot\boldsymbol{v}_2$ y por lo tanto $\boldsymbol{v}_1 = (A - \lambda I)\cdot\boldsymbol{v}_2$.

La tercera solución se busca de la forma $\varphi_3(x) = (\boldsymbol{v}_1\cdot\frac{x^2}{2} + \boldsymbol{v}_2\cdot x + \boldsymbol{v}_3)\cdot e^{\lambda x}$.

Se sustituye en el sistema:

$$(\boldsymbol{v}_1\cdot x + \boldsymbol{v}_2)\cdot e^{\lambda x} + (\boldsymbol{v}_1\cdot\frac{x^2}{2} + \boldsymbol{v}_2\cdot x + \boldsymbol{v}_3)\cdot\lambda\cdot e^{\lambda x} = A\cdot(\boldsymbol{v}_1\cdot\frac{x^2}{2} + \boldsymbol{v}_2\cdot x + \boldsymbol{v}_3)\cdot e^{\lambda x}.$$

Se simplifica:

$$\boldsymbol{v}_1\cdot x + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1\cdot\frac{x^2}{2}\cdot\lambda + \boldsymbol{v}_2\cdot x\cdot\lambda + \boldsymbol{v}_3\cdot\lambda = A\cdot\boldsymbol{v}_1\cdot\frac{x^2}{2} + A\cdot\boldsymbol{v}_2\cdot x + A\cdot\boldsymbol{v}_3.$$

Se aplica que $\lambda\cdot\boldsymbol{v}_1 = A\cdot\boldsymbol{v}_1$ y que $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2\cdot\lambda = A\cdot\boldsymbol{v}$ por lo que se obtiene $\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3\cdot\lambda = A\cdot\boldsymbol{v}_3$, es decir $(A - \lambda I)\cdot\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_2$.

Análogamente se calculan las distintas soluciones hasta $\varphi_s(x)$ que es de la forma: $\varphi_s(x) = (\boldsymbol{v}_1\cdot\frac{x^{s-1}}{(s-1)!} + \boldsymbol{v}_2\cdot\frac{x^{s-2}}{(s-2)!} + \ldots + \boldsymbol{v}_s)\cdot e^{\lambda x}$.

Se sustituye en el sistema y se simplifican términos teniendo en cuenta que $(A - \lambda I)\cdot\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{0}$ y que $(A - \lambda I)\cdot\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{v}_{j-1}$ para todo j, $2 \le j \le s - 1$:

$$(A - \lambda I)\cdot\boldsymbol{v}_{s-1} = \boldsymbol{v}_s. \;\square$$

Otros resultados algebraicos que conviene recordar son:

Proposición 11.3.12:

La suma de los autovalores de una matriz A es igual a la traza de A y su producto al determinante de *A*.

Proposición 11.3.13:

Si *A* es una matriz simétrica entonces *A* tiene todos sus autovectores reales y además tiene n autovectores ortonormales.

Otro método para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales es calcular directamente la matriz fundamental, lo que conlleva calcular la exponencial de una matriz, que se desarrolla en el siguiente apartado.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 11.3.5: Calcular la solución general del sistema $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z \\ \frac{dy}{dt} = x + z \\ \frac{dz}{dt} = x + y \end{cases}$

Se resuelve la ecuación característica: $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$-\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0$. Los autovalores son $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = 2$.

Se determina el subespacio *Ker*(*A* + I): $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, que tiene dimensión 2 y por lo tanto una base está formada por $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Existen por tanto dos autovectores linealmente independientes asociados al autovalor –1, y dos soluciones linealmente independientes $\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t}$ y $\varphi_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$

Se determina el subespacio *Ker*(*A* – 2I): $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Un autovector de este subespacio es $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y la solución $\varphi_3(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$.

Por lo tanto la solución general del sistema es

$$\varphi(t) = K_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{-t} + K_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{-t} + K_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{2t}.$$

Ejemplo 11.3.5: Resolver el sistema $\begin{pmatrix} 1-D & 2 \\ -2 & 5-D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Se calculan las raíces de la ecuación característica $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ y se obtiene un autovalor doble $\lambda = 3$.

Se determina el subespacio *Ker*(*A* – 3I): $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y se obtiene un único autovector $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ linealmente independiente. Una solución es $\boldsymbol{\varphi_1}(x)$ $= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{3x}$.

Se busca un vector $\boldsymbol{v}_2$ tal que $\boldsymbol{v}_1 = (A - 3I) \cdot \boldsymbol{v}_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y se obtiene $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Otra solución es $\boldsymbol{\varphi_2}(x) = (\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) \cdot e^{3x}$.

Por lo tanto la solución general del sistema es:

$$\varphi(x) = K_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot e^{3x} + K_2 (\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) \cdot e^{3x}).$$

Ejercicios

11.7. Resolver el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 5y - z \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + 3z \end{cases}.$$

11.8. Calcular la solución general del sistema: $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2y + z \\ \dfrac{dz}{dx} = -y + 4z \end{cases}$.

11.9. Encontrar dos soluciones linealmente independientes del sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - 5z \\ \dfrac{dz}{dx} = 2y - z \end{cases}.$$

11.10. Resolver el sistema $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y - z \\ \dfrac{dz}{dt} = -x + y + z \end{cases}$ con las condiciones iniciales x(0) = 2, y(0) = 3, z(0) = 4.

11.11. Calcular la solución general del sistema: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

11.12. Resolver el sistema: $\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$.

11.4. EXPONENCIAL DE UNA MATRIZ

El conjunto de las funciones matriciales tiene estructura de espacio métrico, por lo que se puede hablar de límites, series, derivadas ... de funciones matriciales, y es isomorfo al espacio euclídeo $\Re^{n^2}$. Definiendo como producto interno el producto de matrices se tiene una estructura de álgebra.

Si se compara un sistema con la ecuación $y' = a \cdot y$, de solución $y = e^{ax} \cdot C$, se puede pensar que la solución del sistema $\boldsymbol{y}' = A \cdot \boldsymbol{y}$ es de la forma $\boldsymbol{y} = e^{Ax} \cdot \boldsymbol{C}$. Para ello se debe definir la exponencial de una matriz.

Definición 11.4.1:

Sea A una matriz constante. Se define la ***exponencial de la matriz*** A mediante la expresión:

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + ... + \frac{A^n}{n!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Por lo tanto $e^{Ax} = I + Ax + \frac{A^2x^2}{2!} + ... + \frac{A^nx^n}{n!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^nx^n}{n!}$.

En cada término de la matriz se tiene una serie numérica y como la serie de *Taylor* asociada a la función exponencial converge en todo el plano complejo, puede probarse que tal matriz siempre existe.

Cuando la matriz A es diagonal o es nilpotente, la expresión de e^A se simplifica considerablemente con respecto a su forma general, como se demuestra en las siguientes proposiciones.

Proposición 11.4.1:

Si A es una matriz diagonal de orden m, $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_m \end{pmatrix}$, entonces

$e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & e^{\lambda_m} \end{pmatrix}$.

Demostración:

Si A es una matriz diagonal se tiene que $A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_m^k \end{pmatrix}$.

Por lo tanto:

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^2}{2!} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2^2}{2!} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \frac{\lambda_m^2}{2!} \end{pmatrix} + ... +$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^n}{n!} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2^n}{n!} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \frac{\lambda_m^n}{n!} \end{pmatrix} + ... = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & e^{\lambda_m} \end{pmatrix}. \square$$

Definición 11.4.2:

Una matriz A es ***nilpotente*** si existe $k \in \mathbf{N}$ tal que A^k es la matriz nula.

Proposición 11.4.2:

Si A es nilpotente entonces e^A tiene un número finito de sumandos.

Esta proposición es una consecuencia inmediata de la definición de matriz nilpotente.

11.4.1. Propiedades de la exponencial de una matriz

1. Si **0** es la matriz nula entonces $e^{\mathbf{0}} = I$
2. Si I es la matriz identidad y $r \in \mathfrak{R}$ entonces $e^{r \cdot I} = e^r \cdot I$
3. Si A y B son matrices de orden n y $A \cdot B = B \cdot A$, entonces $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.
4. Si r, $s \in \mathfrak{R}$ y A es una matriz de orden n entonces $e^{A(r+s)} = e^{Ar} \cdot e^{As}$.
5. La exponencial de la matriz A, e^A, es regular ya que $det(e^A) = e^{trazaA}$.
6. La inversa de la exponencial de una matriz $(e^A)^{-1} = e^{-A}$, ya que $e^A \cdot e^{-A} = e^{A-A} = I$.

Proposición 11.4.3:

La matriz e^{Ax} es una matriz fundamental principal del sistema $\boldsymbol{y}' = A \cdot \boldsymbol{y}$,

Demostración:

Al derivar $e^{Ax} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n \frac{x^n}{n!}$, se tiene que:

$$\frac{d}{dx}(e^{Ax}) = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} A^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = A \cdot e^{Ax}.$$

Por lo tanto e^{Ax} es una matriz fundamental del sistema $\boldsymbol{y}' = A \cdot \boldsymbol{y}$.

Además cuando $x = 0$ entonces $e^{Ax} = I$ por lo que además es una matriz fundamental principal del sistema. □

11.4.2. Cálculo de la función matricial e^{Ax}

La solución única del problema de valor inicial $\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ es $\boldsymbol{y} = e^{Ax} \cdot \boldsymbol{y}_0$. Si se considera el problema más general $\begin{cases} y' = Ay \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, la solución es $\boldsymbol{y} = e^{A(x-x_0)} \cdot \boldsymbol{y}_0$.

En ambos casos hay que calcular la matriz e^{Ax}, por lo que se va a desarrollar un procedimiento útil y efectivo para calcular dicha función matricial,

Proposición 11.4.4:

Si A es una matriz diagonalizable, tal que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, siendo D una matriz diagonal, entonces $e^{Ax} = P \cdot e^{Dx} \cdot P^{-1}$. Además $det(e^{Ax}) = e^{(trazaD)x}$.

Demostración:

Sea $A = P{\cdot}D{\cdot}P^{-1}$, siendo $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$, λ_1, λ_2, ..., λ_n los autovalores de A y las columnas de la matriz P los autovectores asociados a dichos autovalores. Entonces:

$$A^2 = (P{\cdot}D{\cdot}P^{-1}){\cdot}(P{\cdot}D{\cdot}P^{-1}) = P{\cdot}D^2{\cdot}P^{-1};\ A^3 = P{\cdot}D^3{\cdot}P^{-1}$$

y en general $\forall n \in \mathbf{N}$ se tiene que:

$$A^n = P{\cdot}D^n{\cdot}P^{-1},$$

por lo tanto:

$$e^{Ax} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (P \cdot D^n \cdot P^{-1}) \frac{x^n}{n!} = P{\cdot}e^{Dx}{\cdot}P^{-1}.$$

Por la *proposición 11.4.1* $e^{Ax} = P{\cdot}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 & ... & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 x} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & e^{\lambda_n x} \end{pmatrix}{\cdot}P^{-1}$.

Además ya que $det(A) = det(D)$ se tiene:

$det(e^{Ax}) = det(e^{Dx}) = e^{\lambda_1 x} \cdot e^{\lambda_2 x} \cdot ... e^{\lambda_n x} = e^{(trazaD)x}$. □

Proposición 11.4.5:

Si A es una matriz no diagonalizable, y $A = P{\cdot}J{\cdot}P^{-1}$, siendo J una matriz de Jordan entonces $e^{Ax} = P{\cdot}(e^{Dx}{\cdot}e^{Nx}){\cdot}P^{-1}$, D matriz diagonal y N matriz nilpotente.

Demostración:

Si A no es diagonalizable se tiene que $A = P{\cdot}J{\cdot}P^{-1}$, siendo J una matriz de Jordan y la matriz P tiene por columnas los autovectores asociados a los autovalores de la matriz *A*. *J* no es diagonal, pero *J* = *D* + *N*, siendo *D* una matriz diagonal y *N* una matriz nilpotente por lo tanto:

$$e^{Ax} = P\cdot e^{Jx}\cdot P^{-1} = P\cdot e^{(D+N)x}\cdot P^{-1} = P\cdot(e^{Dx}\cdot e^{Nx})\cdot P^{-1}. \square$$

11.4.3. Estudio del caso general

A continuación se analiza el caso en el que la matriz *A* no es constante. En el caso de una ecuación de primer orden, $y' = b(x)y$, la solución se puede expresar de la forma $y = Ce^{\int b(x)dx}$. Si ahora se analiza el sistema $y' = A(x)y$ se puede pensar que la solución sea de la forma $y = e^{\int A(x)dx}C$. Esto es así cuando se cumplen las condiciones de la proposición que se presenta a continuación:

Proposición 11.4.6:

Sea el sistema $\mathbf{y}' = A(x)\cdot\mathbf{y}$; $B(x) = \int A(x)dx$. Si $A(x)\cdot B(x) = B(x)\cdot A(x)$ entonces $e^{B(x)}$ es una matriz fundamental del sistema.

Demostración:

Al derivar $e^{Bx} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(B(x))^n}{n!} = I + B(x) + \frac{(B(x))^2}{2!} + \ldots + \frac{(B(x))^n}{n!} + \ldots$, se tiene que $\frac{d}{dx}(e^{Bx}) = 0 + B'(x) + \frac{1}{2!}\cdot\frac{d}{dx}(B(x))^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\cdot\frac{d}{dx}(B(x))^n + \ldots$

$$\frac{d}{dx}(B(x))^2 = \frac{d}{dx}(B(x)\cdot B(x)) = B'(x)\cdot B(x) + B(x)\cdot B'(x) = A(x)\cdot B(x) + B(x)\cdot A(x)$$

Si $A(x)\cdot B(x) = B(x)\cdot A(x)$ entonces $\frac{d}{dx}(B(x))^2 = 2B'(x)\cdot B(x)$. Análogamente si $A(x)\cdot B(x) = B(x)\cdot A(x)$ entonces $\frac{d}{dx}(B(x))^n = n\cdot B'(x)\cdot(B(x))^{n-1}$.

Por lo tanto $e^{B(x)}$ es una matriz fundamental del sistema $\boldsymbol{y}' = A(x)\cdot\boldsymbol{y}$. □

Ejemplos resueltos

Ejemplo 11.4.1: Dada la matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz nilpotente $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Calcular e^D y e^N.

$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ es una matriz diagonal por tanto $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$, $n \in \mathbf{N}$, por consiguiente $e^D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} + \ldots =$

$$\begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix}.$$

$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ es una matriz nilpotente pues $N^2 = \mathbf{0}$ y por tanto $N^n = 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, por consiguiente:

$$e^N = I + N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 11.4.2: Calcular una matriz fundamental del sistema $\boldsymbol{y}' = A\cdot\boldsymbol{y}$, siendo $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

La matriz A es diagonalizable. Se calcula la matriz diagonal asociada $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, la matriz de cambio de base es $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y su inversa es $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, por lo tanto:

$$e^{Ax} = P\cdot\begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{x} \end{pmatrix}\cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 4e^{2x} - 3e^{x} & -6e^{2x} + 6e^{x} \\ 2e^{2x} - 2e^{x} & -3e^{2x} + 4e^{x} \end{pmatrix}.$$

Este cálculo se puede simplificar sin necesidad de hallar P^{-1}. Aplicando que cuando $\Phi(x)$ es una matriz fundamental y P una matriz regular entonces $\Phi(x)\cdot P$ es también una matriz fundamental. Y ya que $e^{Dx}\cdot P = P\cdot e^{Dx}\cdot P^{-1}\cdot P = P\cdot e^{Dx}$, se tiene que:

$$P\cdot e^{Dx} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2x} & 3e^{x} \\ e^{2x} & 2e^{x} \end{pmatrix}$$ es una matriz fundamental.

Ejemplo 11.4.3: Calcular una matriz fundamental del sistema $\mathbf{y}' = A\cdot\mathbf{y}$, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

La matriz A no es diagonalizable pero es semejante a $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ con la matriz de autovectores $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$J = D + N = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, D es diagonal y N nilpotente, $N^2 = \mathbf{0}$.

$J^2 = (D + N)^2 = D^2 + D\cdot N + N\cdot D + N^2 = D^2 + 2D\cdot N$.

Y en general:

$$J^n = D^n + 2D^{n-1}\cdot N = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n2^{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto: $e^{Jx} = \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n2^{n-1}x^n}{n!} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} +$

$\begin{pmatrix} 0 & xe^{2x} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix}.$

Por consiguiente $e^{Ax} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \cdot P^{-1}.$

Una matriz fundamental del sistema es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ -e^{2x} & -xe^{2x} + e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Otro método para obtener e^{Jx} es expresarla de la forma:

$$e^{(2I+J-2I)x} = e^{2x}\cdot I\cdot e^{(J-2I)x} = e^{2x}\cdot \left[e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}x} \right] = e^{2x}\cdot \left[I + \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Análogamente se puede obtener e^{Ax}.

$e^{Ax} = e^{(2I+A-2I)x} = e^{2x}\cdot I\cdot e^{(A-2I)x} = e^{2x}\cdot \left[e^{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}x} \right] = e^{2x}\cdot \left[I + \begin{pmatrix} x & x \\ -x & -x \end{pmatrix} \right] =$

$\begin{pmatrix} e^{2x} + xe^{2x} & xe^{2x} \\ -xe^{2x} & e^{2x} - xe^{2x} \end{pmatrix}.$

Ejemplo 11.4.4: Calcular una matriz fundamental del sistema $\mathbf{y}' = A(x)\cdot\mathbf{y}$, siendo $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2x \\ 2x & 1 \end{pmatrix}$.

$$B(x) = \int A(x)dx = \begin{pmatrix} x & x^2 \\ x^2 & x \end{pmatrix}.$$

Las matrices $A(x)$ y $B(x)$ conmutan ya que $A(x)\cdot B(x) = B(x)\cdot A(x) = \begin{pmatrix} x+2x^3 & 3x^2 \\ 3x^2 & x+2x^3 \end{pmatrix}$; por lo tanto $e^{B(x)}$ es una matriz fundamental del sistema. y

$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{x+x^2} & 0 \\ 0 & e^{x-x^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x+x^2} & e^{x-x^2} \\ e^{x+x^2} & -e^{x-x^2} \end{pmatrix}$ también.

Ejercicios

11.13. Calcular una matriz fundamental del sistema $\boldsymbol{y}' = A\cdot\boldsymbol{y}$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

(*Solución:* $\Phi(x) = \begin{pmatrix} 4e^{2x} & -e^{-3x} \\ e^{2x} & e^{-3x} \end{pmatrix}$).

11.14. Calcular una matriz fundamental del sistema $\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{y}$.

(*Solución:* $\Phi(x) = \begin{pmatrix} e^{3x} & (1-2x)e^{3x} \\ e^{3x} & -2xe^{3x} \end{pmatrix}$).

11.15. Calcular una matriz fundamental del sistema $\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{y}$.

11.16. Comprobar si $e^{B(x)}$ es una matriz fundamental del sistema $\boldsymbol{y}' = A(x)\cdot\boldsymbol{y}$, siendo $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2x \\ 3x^2 & 4x^3 \end{pmatrix}$ y $B(x) = \int A(x)dx$.

11.5. SISTEMAS LINEALES NO HOMOGÉNEOS

En esta sección se estudian distintos métodos de resolver los sistemas lineales no homogéneos, el método de variación de constantes, que es válido para cualquier sistema lineal completo, el método de coeficientes indeterminados y utilizando el operador diferencial D, que únicamente pueden utilizarse cuando el sistema lineal homogéneo asociado tiene los coeficientes constantes, y la función b(x) adopta determinadas formas.

11.5.1. Método de variación de las constantes

El método de variación de las constantes o método de variación de parámetros, como procedimiento para resolver un sistema lineal no homogéneo, es muy similar al que se utilizó para resolver ecuaciones lineales de primer orden y de orden superior no homogéneas.

Sea $\boldsymbol{y}'(\mathrm{x}) = A(x)\cdot\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{b}(x)$ el sistema lineal no homogéneo que se quiere resolver y sea $\psi(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \boldsymbol{y}_k(x)$ la solución general del sistema homogéneo asociado que se expresa de la forma $\psi(x) = \Phi(x)\cdot\boldsymbol{C}$, siendo $\Phi(x)$ una matriz fundamental del sistema. Se busca una solución particular del sistema no homogéneo que sea de la forma $\varphi_{\mathbf{p}}(\mathrm{x}) = \Phi(x)\cdot\boldsymbol{v}(x)$, siendo $\boldsymbol{v}(x) = (v_1(x), v_2(x), ..., v_n(x))$ una función vectorial que hay que determinar.

Al derivar la expresión anterior se obtiene:

$$\varphi'(x) = \Phi'(x)\cdot\boldsymbol{v}(x) + \Phi(x)\cdot\boldsymbol{v}'(x),$$

que al sustituir en el sistema:

$$\Phi'(x)\cdot\boldsymbol{v}(x) + \Phi(x)\cdot\boldsymbol{v}'(x) = A(x)\cdot\Phi(x)\cdot\boldsymbol{v}(x) + \boldsymbol{b}(x).$$

Al ser $\Phi(x)$·una matriz fundamental del sistema homogéneo verifica que $\Phi'(x) = A(x)\cdot\Phi(x)$, por lo que al sustituir este resultado en la expresión anterior se obtiene:

$$\Phi(x)\cdot\boldsymbol{v}'(x) = \boldsymbol{b}(x).$$

Como $\Phi(x)$ tiene inversa por ser una matriz regular, se puede multiplicar por su inversa:

$$\boldsymbol{v}'(x) = \Phi^{-1}(x)\cdot\boldsymbol{b}(x)$$

y al integrar se obtiene:

$$\boldsymbol{v}(x) = \int \Phi^{-1}(s)\cdot\boldsymbol{b}(s)\cdot ds.$$

Si se puede encontrar una función $\boldsymbol{v}(x)$ que verifique esta condición, entonces $\varphi_{\mathbf{p}} = \Phi(x)\cdot\boldsymbol{v}(x)$ es una solución particular del sistema:

$$\varphi_{\mathbf{p}}(x) = \Phi(x)\cdot\int \Phi^{-1}(s)\cdot\boldsymbol{b}(s)\cdot ds.$$

Por el *teorema 11.2.11* la solución general φ_g se puede expresar sumando la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales lineal homogéneo asociado a una solución particular del sistema de ecuaciones diferenciales lineal completo: $\varphi_g = \psi + \varphi_p$ es decir:

$$\varphi_g(x) = \psi(x) + \varphi_p(x) = \Phi(x)\cdot\boldsymbol{C} + \Phi(x)\cdot\int \Phi^{-1}(s)\cdot\boldsymbol{b}(s)\cdot ds.$$

11.5.2. Sistemas lineales no homogéneos con coeficientes constantes

El método que se estudia a continuación es similar al que se ha desarrollado para los sistemas homogéneos. Permite reducir de una forma sistemática un sistema lineal a una ecuación diferencial de orden superior y a partir de la solución de ésta resolver el sistema.

Reducción a una ecuación diferencial mediante el operador diferencial D

Se considera el sistema lineal de primer orden con coeficientes constantes *E*·***y'***(x) + *A*·***y***(*x*) = ***b***(*x*) , siendo *A* y *E* matrices cuadradas de orden *n* y ***b***(*x*) una función vectorial que se puede expresar por:

$$\begin{cases} e_{11}y_1'(x)+e_{12}y_2'(x)+\ldots+e_{1n}y_n'(x)+a_{11}y_1(x)+a_{12}y_2(x)+\ldots+a_{1n}y_n(x)=b_1(x) \\ e_{21}y_1'(x)+e_{22}y_2'(x)+\ldots+e_{2n}y_n'(x)+a_{21}y_1(x)+a_{22}y_2(x)+\ldots+a_{2n}y_n(x)=b_2(x) \\ \ldots \\ e_{n1}y_1'(x)+e_{n2}y_2'(x)+\ldots+e_{nn}y_n'(x)+a_{n1}y_1(x)+a_{n2}y_2(x)+\ldots+a_{nn}y_n(x)=b_n(x) \end{cases}$$

Aplicando que D(*y*) = *y'* el sistema anterior se puede expresar de la forma:

$$\begin{cases} (e_{11}D+a_{11})y_1(x)+(e_{12}D+a_{12})y_2(x)+\ldots+(e_{1n}D+a_{1n})y_n(x)=b_1(x) \\ (e_{21}D+a_{21})y_1(x)+(e_{22}D+a_{22})y_2(x)+\ldots+(e_{2n}D+a_{2n})y_n(x)=b_2(x) \\ \ldots \\ (e_{n1}D+a_{n1})y_1(x)+(e_{n2}D+a_{n2})y_2(x)+\ldots+(e_{nn}D+a_{nn})y_n(x)=b_n(x) \end{cases}$$

Sea el operador $\Delta(D) = \begin{vmatrix} e_{11}D + a_{11} & e_{12}D + a_{12} & ... & e_{1n}D + a_{1n} \\ e_{21}D + a_{21} & e_{22}D + a_{22} & ... & e_{2n}D + a_{2n} \\ .... & ... & ... & ... \\ e_{n1}D + a_{n1} & e_{n2}D + a_{n2} & ... & e_{nn}D + a_{nn} \end{vmatrix}$ que se supone que no es el operador nulo.

Se define $\Delta_{\mathbf{k}}(D) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \phantom{e_{11}D + a_{11}} & \phantom{e_{12}D + a_{12}} & & k) & & \phantom{e_{1n}D + a_{1n}} \end{array} \\ \begin{vmatrix} e_{11}D + a_{11} & e_{12}D + a_{12} & ... & b_1(x) & ... & e_{1n}D + a_{1n} \\ e_{21}D + a_{21} & e_{22}D + a_{22} & ... & b_2(x) & .... & e_{2n}D + a_{2n} \\ .... & ... & ... & .... & ... & ... \\ e_{n1}D + a_{n1} & e_{n2}D + a_{n2} & ... & b_n(x) & ... & e_{nn}D + a_{nn} \end{vmatrix} \end{array}$.

Esta expresión, que matemáticamente no tiene sentido ya que es un determinante en el que en la columna k aparecen funciones y en el resto operadores, es una forma de recordar la siguiente definición:

$\Delta_{\boldsymbol{k}}(D) = \Delta_{1k}(D)(b_1(x)) + \Delta_{2k}(D)(b_2(x)) + ... + \Delta_{nk}(D)(b_n(x))$,

siendo $\Delta_{jk}(D)$ el operador de grado $n - 1$ que se obtiene de $\Delta(D)$ al eliminar la fila j y la columna k.

Si $\Delta(D) = r_0 + r_1 D + ... + r_n D^n$ y $\Delta_{jk}(D) = s_{jk}{}^0 + s_{jk}{}^1 D + s_{jk}{}^2 D^2 + ... + s_{jk}{}^{n-1} D^{n-1}$

$\Delta(D)(y_k(x)) = r_0 y_k(x) + r_1 y'_k(x) + ... + r_n y_k{}^{n)}(x)$

$$\Delta_{\mathbf{k}}(D) = \sum_{i=0}^{n-1} s_{1k}^{i} D^i (b_1(x)) + \sum_{i=0}^{n-1} s_{2k}^{i} D^i (b_2(x)) + ... + \sum_{i=0}^{n-1} s_{nk}^{i} D^i (b_n(x))$$

Por lo tanto $r_0 y_k(x) + r_1 y'_k(x) + ... + r_n y_k{}^{n)}(x) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} s_{jk}^{i} D^i (b_j(x)) \right)$, $1 \leq k \leq n$.

Así se obtiene una ecuación diferencial de orden n. Una vez obtenidas cada una de las funciones $y_k(x)$ en función de n constantes, hay en total n^2

constantes que se eliminan hasta dejar sólo *n* sustituyéndolas en el sistema.

Método de coeficientes indeterminados

Este método es similar al que se ha desarrollado para las ecuaciones diferenciales lineales de orden *n*. Consiste en buscar una solución particular “parecida” al término independiente $\boldsymbol{b}(x)$.

Tiene el inconveniente de que sólo se puede utilizar si el sistema homogéneo asociado es de coeficientes constantes y si $\boldsymbol{b}(x)$ es una función vectorial polinómica, exponencial o formada por senos y cosenos, y por sumas y productos de estas funciones. Tiene la ventaja de su sencilla resolución. En el caso en que la solución particular que se debería probar, ya esté contenida en la solución de la homogénea, entonces se multiplica por x^s, siendo s el menor número natural que elimine esta dificultad.

En los ejemplos resueltos a continuación se comentará este método.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 11.5.1: Utilizar el método de variación de las constantes para resolver el sistema:

$$\begin{cases} y' + y + 2z = \cos x + \operatorname{sen} x \\ z' + 2y + z = \operatorname{sen} x - \cos x \end{cases}$$

Se resuelve primero el sistema homogéneo $\begin{cases} y' + y + 2z = 0 \\ z' + 2y + z = 0 \end{cases}$ que tiene como ecuación característica $\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$, cuyas raíces son $\lambda = 1$ y $\lambda = -3$.

Para $\lambda = 1$ se buscan soluciones de la forma: $\begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \cdot e^x$ siendo A_1, B_1 constantes a determinar: $-2A_1 - 2B_1 = 0 \Rightarrow A_1 = -B_1 = K_1$. Un autovector es: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y una solución es: $\boldsymbol{\varphi}_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^x$.

Para $\lambda = -3$, se buscan soluciones de la forma: $\begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} \cdot e^{-3x}$ siendo A_2, B_2 constantes a determinar: $2A_2 - 2B_2 = 0 \Rightarrow A_2 = B_2 = K_2$. Un autovector es: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y una solución es: $\boldsymbol{\varphi}_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-3x}$.

La solución general del sistema homogéneo es:

$$\varphi_H(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix} = K_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^x + K_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-3x}$$

Se busca una solución del sistema no homogéneo de la forma:

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix} = C_1(x) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^x + C_2(x) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-3x}$$

siendo $C_1(x)$ y $C_2(x)$ funciones que se obtienen integrando las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-3x} = \cos x + \operatorname{sen} x \\ -C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-3x} = \operatorname{sen} x - \cos x \end{cases}$$

$C_1'(x) = e^{-x}\cdot cos\ x$

$C_2'(x) = e^{3x}\cdot sen\ x$.

Integrando:

$$\begin{cases} C_1(x) = \dfrac{e^{-x}}{2}\cdot(sen\ x - cos\ x) \\ \\ C_2(x) = \dfrac{e^{3x}}{10}\cdot(3sen\ x - cos\ x) \end{cases}$$

Una solución particular del sistema no homogéneo es:

$$\begin{cases} y_p(x) = \dfrac{1}{2}(senx - \cos x) + \dfrac{1}{10}(3senx - \cos x) = \dfrac{8}{10}senx - \dfrac{6}{10}\cos x \\ z_p(x) = \dfrac{1}{2}(-senx + \cos x) + \dfrac{1}{10}(3senx - \cos x) = \dfrac{-2}{10}senx + \dfrac{2}{5}\cos x \end{cases}$$

Por lo tanto la solución general del sistema es:

$$\begin{cases} y(x) = K_1e^{x} + K_2e^{-3x} + \dfrac{1}{2}(senx - \cos x) + \dfrac{1}{10}(3senx - \cos x) = \dfrac{8}{10}senx - \dfrac{6}{10}\cos x \\ z(x) = -K_1e^{x} + K_2e^{-3x} + \dfrac{1}{2}(-senx + \cos x) + \dfrac{1}{10}(3senx - \cos x) = \dfrac{-2}{10}senx + \dfrac{2}{5}\cos x \end{cases}$$

Para resolver este sistema por el método de los coeficientes indeterminados, se busca una solución “parecida” a ***b***(x) que está formado por sumas de senos y cosenos, por lo que se prueba con:

$$\varphi_P(x) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} sen\ x + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\cdot cos\ x.$$

Al imponer que sea solución del sistema se obtiene: $a = 8/10$, $b = -2/10$, $c = -6/10$, $d = 2/5$.

Ejemplo 11.5.2: Resolver el sistema:

$$\begin{cases} y'+z'+2y+z=x \\ z'+5y+3z=x^2 \end{cases}$$

El sistema expresado en forma matricial mediante el operador D:

$$\begin{pmatrix} D+2 & D+1 \\ 5 & D+3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

El operador $\Delta = \begin{vmatrix} D+2 & D+1 \\ 5 & D+3 \end{vmatrix} = D^2 + 1$.

$\Delta_y(x) = \begin{vmatrix} x & D+1 \\ x^2 & D+3 \end{vmatrix} = (D + 3)(x) – (D +1)(x^2) = 1 + 3x – 2x – x^2$.

$(D^2 + 1)(y(x)) = 1 + x – x^2$,

ecuación diferencial de segundo orden que tiene como solución general $y(x) = C_1 \cdot cos\ x + C_2 \cdot sen\ x + y_p(x)$, siendo $y_p(x)$ una solución particular de la ecuación no homogénea: $y_p(x) = ax^2 + bx + d$.

$(D^2 + 1)(y_p(x)) = 1 + x – x^2 \Rightarrow 2a + ax^2 + bx + d = 1 + x – x^2 \Rightarrow a = –1$, $b = 1$ y $d = 3 \Rightarrow y_p(x) = – x^2 + x + 3 \Rightarrow y(x) = C_1 \cdot cos\ x + C_2 \cdot sen\ x – x^2 + x + 3$.

$\Delta_z(x) = \begin{vmatrix} D+2 & x \\ 5 & x^2 \end{vmatrix} = (D + 2)\ (x^2) – 5x = 2x + 2x^2 – 5x$.

$(D^2 + 1)(z(x)) = –3x + 2x^2$,

ecuación diferencial de segundo orden que tiene como solución general $z(x) = C_3 \cdot cos\ x + C_4 \cdot sen\ x + z_p(x)$, siendo $z_p(x)$ una solución particular de la ecuación no homogénea $z_p(x) = ex^2 + fx + g$.

$(D^2 + 1)(z_p(x)) = –3x + 2x^2 \Rightarrow 2e + ex^2 + fx + g = –3\ x + 2x^2 \Rightarrow e = 2$, $f = –3$ y $g = –4 \Rightarrow z_p(x) = 2x^2 – 3x – 4 \Rightarrow z(x) = C_3 \cdot cos\ x + C_4 \cdot sen\ x + 2x^2 – 3x – 4$.

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$5C_1 + C_4 + 3C_3 = 0$ y $-C_3 + 5C_2 + 3C_4 = 0 \Rightarrow$

$C_1 = \frac{1}{5}(-3C_3 - C_4)$ y $C_2 = \frac{1}{5}(C_3 - 3C_4)$

La solución general del sistema:

$$y(x) = \frac{1}{5}(-3C_3 - C_4)\cdot\cos x + \frac{1}{5}(C_3 - 3C_4)\cdot\operatorname{sen} x - x^2 + x + 3$$

$$z(x) = C_3\cdot\cos x + C_4\cdot\operatorname{sen} x + 2x^2 - 3x - 4.$$

Se observa que también se podía haber resuelto el sistema de una forma más rápida calculando $z(x)$ y sustituyendo su valor en la segunda ecuación para calcular $y(x)$.

Para resolver este sistema por el método de los coeficientes indeterminados, se busca una solución "parecida" a $\boldsymbol{b}(x)$ que está formado por polinomios de segundo grado, por lo que se prueba con:

$$\varphi_P(x) = \begin{pmatrix} a \\ e \end{pmatrix}\cdot x^2 + \begin{pmatrix} b \\ f \end{pmatrix}\cdot x + \begin{pmatrix} d \\ g \end{pmatrix}.$$

Al imponer que sea solución del sistema se obtiene: $a = -1$, $b = 1$, $d = 3$, $e = 2$, $f = -3$ y $g = -4$.

Ejemplo 11.5.3: Resolver el sistema:

$$\begin{cases} y' - z' - z = e^x \\ z' + y - z = e^{2x} \end{cases}$$

Al derivar la segunda ecuación se obtiene: $z'' + y' - z' = 2e^{2x}$.

Se despeja y' en la primera ecuación y se sustituye en la anterior:

$z'' + (z' + z + e^{x}) - z' = 2e^{2x} \Rightarrow z'' + z = 2e^{2x} + e^{x}$,

ecuación diferencial lineal de segundo orden que tiene como solución general:

$z(x) = C_1 \cdot cos\ x + C_2 \cdot sen\ x + z_p(x)$, siendo $z_p(x) = Ae^{2x} + Be^{x}$.

$(D^2 + 1)(Ae^{2x} + Be^{x}) = 2e^{2x} + e^{x}$,

de donde se obtiene $B = \frac{1}{2}$ y $A = \frac{2}{5}$, por lo tanto:

$$z(x) = C_1 \cdot cos\ x + C_2 \cdot sen\ x + \frac{2}{5}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{x}$$

Al sustituir en la segunda ecuación:

$y(x) = (C_1 - C_2) \cdot cos\ x + (C_1 + C_2) \cdot sen\ x + \frac{3}{5}e^{2x}$.

Para resolver este sistema por el método de los coeficientes indeterminados, se busca una solución “parecida” a $\boldsymbol{b}(x)$ que está formada por exponenciales, por lo que se prueba con:

$$\varphi_P(x) = \begin{pmatrix} a \\ e \end{pmatrix} \cdot e^{2x} + \begin{pmatrix} b \\ f \end{pmatrix} \cdot e^{x}.$$

Al imponer que sea solución del sistema se obtiene: $a = 3/5$, $b = 0$, $e = 2/5$ y $f = 1/2$.

Ejercicios

11.17. Utilizar el método de variación de las constantes para resolver el sistema

$$\begin{cases} y' + 2y + 4z = 1 + 4x \\ z' + y - z = \frac{3}{2}x^2 \end{cases}.$$

11.18. Resolver el sistema $\begin{cases} y' - y - z = 3x \\ z' + 2y + z = x \end{cases}$.

11.19. Calcular la solución general del sistema $\begin{cases} y' + 2z' + y + 7z = e^{x} + 2 \\ z' - 2y + 3z = e^{x} - 1 \end{cases}$.

11.20. Integrar el sistema $\begin{cases} y' + y - z = sec\, 2x \\ z' + 5y - z = 0 \end{cases}$.

11.6. EJERCICIOS

11.21. Hallar e^{Ax}, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ y utilizar este resultado para resolver el sistema $\boldsymbol{y}' = A\cdot\boldsymbol{y}$.

(*Solución*: $e^{Ax} = \begin{pmatrix} 1+x & x & x \\ x & 1+x & x \\ -2x & -2x & 1-2x \end{pmatrix} \cdot e^{x}$)

11.22. Sea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x^2 & x^3 \end{pmatrix}$, $x \in \mathfrak{R}$. Probar que $A^2(x) = (1 + x^3)\cdot A(x)$ y calcular $e^{A(x)}$.

11.23. Calcular la solución general del sistema $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(*Solución:* $\varphi(t) = K_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot e^{2t} + K_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^{2t} + K_3 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \right] e^{2t}$)

11.24. Resolver el sistema homogéneo $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(*Solución:* $\varphi(x) = K_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot e^t + K_2\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]e^t + K_3\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{t^2}{2} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\right]e^t$)

11.25. Calcular la solución general ($y(x)$, $z(x)$) del sistema $\begin{cases} y'+z'-y = 2x+1 \\ 2y'+2z'+y = x \end{cases}$.

(*Solución:* $y(x) = -x - \frac{2}{3}$, $z(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x + C$).

11.26. Calcular la solución general (y(x), z(x)) del sistema $\begin{cases} y''-3z'+4y = e^x \\ z''+3y'+4z = e^{-x} \end{cases}$

(*Solución*: $y(x) = K_1\cdot\cos x + K_2\cdot\operatorname{sen} x + K_3\cdot\operatorname{sen} 4x + K_4\cdot\cos 4x + \frac{1}{34}(5e^x - 3e^{-x})$

$z(x) = K_1\cdot\operatorname{sen} x - K_2\cdot\cos x + K_3\cdot\cos 4x - K_4\cdot\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{34}(-3e^x + 5e^{-x})$)

11.27. Utilizar la transformada de Laplace para resolver el sistema $\begin{cases} y'-z'+2y = 3 \\ 3y'+z'-2z = 0 \end{cases}$ con las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $z(0) = 2$.

(*Solución*: $y(x) = \frac{1}{8}(3e^x - 7e^{-x} + 12)$, $z(x) = \frac{1}{8}(9e^x + 7e^{-x})$)

11.28. Utilizando la transformada de Laplace encontrar la solución particular del sistema $\begin{cases} y' = 3y - z \\ z' = y + z \end{cases}$, que verifica que $y(0) = 1$, $z(0) = 2$.

(*Solución*: $y(x) = (1 - x)e^{2x}$, $z(x) = (2 - x)e^{2x}$).

11.29. Resolver el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} x''+2x'+2y'+3z'+x=1 \\ y'+z'-x=0 \\ x'+z=0 \end{cases}$$

(*Solución*: $x(t) = K_1 e^{\frac{-3}{2}t} + \frac{1}{3}$. $y(t) = \frac{-13}{6} K_1 e^{\frac{-3}{2}t} + \frac{1}{3}t + K_2$, $z(t) = \frac{3}{2} K_1 e^{\frac{-3}{2}t}$)

11.30. Calcular la solución general del sistema: $\begin{cases} x'+y'+y=1 \\ x'-z'+2x+z=1 \\ y'+z'+y+2z=0 \end{cases}$.

(*Solución*: $x(\mathrm{t}) = K_1 e^{\frac{-4}{5}t} + \frac{3}{4}$, $y(t) = 4K_1 e^{\frac{-4}{5}t} + K_2 e^{-t} + 1$, $z(t) = \frac{-2}{3} K_1 e^{\frac{-4}{5}t} - \frac{1}{2}$).

11.31. Calcular la solución del sistema $\begin{cases} (D-2)x-3y=2e^{2t} \\ -x+(D-4)y=3e^{2t} \end{cases}$ que verifica las condiciones iniciales $x(0) = \frac{-2}{3}$, $y(0) = \frac{1}{3}$.

(*Solución*: $x(t) = e^{5t} - \frac{5}{3}e^{2t}$, $y(t) = e^{5t} - \frac{2}{3}e^{2t}$)

11.32. Resolver el sistema $\begin{cases} (D-1)x+Dy=2t+1 \\ (2D+1)x+2Dy=t \end{cases}$.

(*Solución*: $x(t) = -t + K$, $y(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2t + Kt$)

11.33. Calcular la solución general del sistema $\begin{cases} 2x'+y'-4x-y=e^t \\ x'+3x+y=0 \end{cases}$.

(*Sol*: $x(t) = K_1 \cdot cost + K_2 \cdot sent - \frac{1}{2}e^t$, $y(t) = (K_1 - 3K_2) \cdot sent - (3K_1 + K_2) \cdot cost + 2e^t$).

11.34. Resolver el sistema $\begin{cases} y'+z'-y+3z=e^{-x}-1 \\ y'+z'+2y+z=e^{2x}+x \end{cases}$.

(*Solución*: $y(x) = \frac{-1}{49} + \frac{3}{7}x + \frac{5}{17}e^{2x} + K_1 e^{\frac{-7}{5}x}$,

$z(x) = \left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{2}{17}e^{2x} + e^{-x} + \frac{52}{49} - \frac{9}{7}x - 3K_1 e^{\frac{-7}{5}x}\right)$).

11.35. Calcular la solución general del sistema $\begin{cases} x'+x-5y=\sec 3t \\ 2x+y'-y=0 \end{cases}$.

11.36. Hallar la solución del sistema $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ que verifica que $\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \\ y_4(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

11.37. Calcular la solución general, para $x > 0$, del sistema:

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-3}{x^2} & \frac{3}{x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1+\ln x}{x^2} \end{pmatrix}$$

11.38. Hallar la solución del sistema $\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{x} & 1 \\ 0 & \frac{3}{x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ que verifica las condiciones iniciales $y(1) = 1$, $z(1) = 1$.

11.39. Hallar la solución del sistema $\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x \\ \cos x \end{pmatrix}$ que verifica las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $z(0) = 0$.

11.40. Hallar la solución del sistema $\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{5x} \\ e^{5x} \end{pmatrix}$ que verifica las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $z(0) = 0$.

11.41. Resolver el siguiente sistema: $\begin{cases} x'(t) = 3x - z \\ y'(t) = -3y - z \\ z'(t) = 2y - z \end{cases}$.

11.42. Integrar el siguiente sistema $\begin{cases} x'(t) = 2x - 2y + \dfrac{e^{-2t}}{t} \\ y'(t) = 8x - 6y + \dfrac{3e^{-2t}}{t} \end{cases}$.

11.43. Calcular la solución general del sistema $\begin{cases} x'(t) = -6x - 3y + 14z + e^{2t} \\ y'(t) = 4x + 3y - 8z \\ z'(t) = -2x - y + 5z \end{cases}$.