CAPÍTULO 10.

Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

En este capítulo se estudian las ecuaciones diferenciales lineales de orden superior.

Desde que se comenzaron a estudiar las ecuaciones diferenciales ha resultado evidente que es difícil obtener resultados muy generales que permitan obtener las soluciones de un tipo determinado de ecuación. Una excepción a esta carencia de una teoría general para resolver ecuaciones diferenciales se presenta en el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales y en particular de las que tienen coeficientes constantes.

En una ecuación diferencial lineal de orden n homogénea, el conjunto de soluciones tiene estructura de espacio vectorial de dimensión n, por lo que basta encontrar n soluciones linealmente independientes para obtener la solución general. El conjunto de soluciones de cualquier ecuación diferencial lineal de orden n completa tiene estructura de espacio afín, que tiene como espacio vectorial asociado el conjunto de soluciones de la ecuación homogénea asociada. En consecuencia, si se conoce la solución general de la ecuación homogénea asociada, para tener la solución general de la ecuación completa es suficiente encontrar un punto de ese espacio afín, es decir, una solución particular de esta ecuación.

Pero incluso en este caso, a veces, resulta difícil encontrar *n* soluciones linealmente independientes de una ecuación diferencial lineal homogénea. Solamente en el caso más sencillo, en el que los coeficientes de la ecuación son constantes, existe un método general que permite calcular las soluciones en función de los coeficientes de la ecuación.

Si los coeficientes de la ecuación diferencial son funciones analíticas se pueden obtener soluciones en forma de series de potencias, y resolver de esta forma muchas ecuaciones particulares, como las ecuaciones de *Legendre* y *Bessel*, que tienen una importancia especial por sus múltiples aplicaciones en problemas relativos a vibraciones de membranas, flujos de calor y propagación de corrientes eléctricas.

Como en el caso general, las ecuaciones diferenciales lineales de orden superior no siempre pueden ser resueltas explícitamente en términos de funciones elementales conocidas, por lo que resulta necesario determinar las condiciones para poder garantizar la existencia y unicidad de la solución.

El capítulo comienza, en la *Sección 1*, con algunas ideas sobre operadores lineales que permiten simplificar la notación en el estudio de ecuaciones diferenciales lineales, y se explicitan los teoremas de existencia y unicidad de soluciones. En la *Sección 2ª* se estudia la estructura algebraica de las soluciones de una ecuación diferencial lineal. Un estudio algebraico permite determinar las soluciones de una ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes en la *Sección 3ª*.

En las secciones siguientes se proponen varios métodos para resolver la ecuación no homogénea y algunos casos particulares en los que resulta fácil resolver la ecuación con coeficientes no constantes. En la *Sección 6ª* se resuelven algunas ecuaciones especiales mediante desarrollos en series de potencias y se termina el capítulo con la *Sección 7ª* en la que se presentan distintas aplicaciones de estas ecuaciones a la mecánica, a la electrónica y, en general, a la física.

10.1. CONCEPTOS PREVIOS

Definición 10.1.1:

Una ecuación diferencial de orden n se denomina ***lineal*** si es lineal respecto a la variable dependiente y, y a todas sus derivadas hasta el orden n, de modo que se puede expresar de la forma:

$$P_0(x)\cdot y^{n)} + P_1(x)\cdot y^{n-1)} + \ldots + P_{n-1}(x)\cdot y' + P_n(x)\cdot y = G(x) \qquad (10.1.1)$$

donde P_0, P_1, ..., P_n son funciones definidas en un intervalo (a, b) de la recta real.

Definición 10.1.2:

Se denomina ***problema de valor inicial*** o ***problema de Cauchy*** de la ecuación diferencial de orden n (10.1.1), al problema que consiste en encontrar una solución $\varphi(x)$ de la ecuación diferencial que verifique n condiciones iniciales $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi'(x_0) = y_1$, ..., $\varphi^{n-1)}(x_0) = y_{n-1}$, siendo $x_0 \in (a, b)$, y_0, y_1, ..., y_{n-1} números reales cualesquiera.

Definición 10.1.3:

Si las condiciones que debe verificar la solución están definidas en dos o más puntos diferentes el problema se denomina ***problema de contorno*** de una ecuación diferencial.

10.1.1. El operador diferencial D

El estudio de estas ecuaciones se puede simplificar utilizando una notación con operadores.

*Definición 10.1.2***:**

Sea $\mathfrak{I}$ una familia de funciones reales de variable real infinitamente derivables en un intervalo (a, b) de la recta real. Se define el ***operador diferencial*** **D** como una aplicación de $\mathfrak{I}$ en $\mathfrak{I}$ tal que $\forall f \in \mathfrak{I}$, D($f$) = $\frac{df}{dx}$.

*Definición 10.1.3***:**

Dado el operador D, se define $D^2 = D \circ D$ como la composición de aplicaciones, de forma que $D^2(f) = (D \circ D)(f) = D(D(f))$.

Con esta definición se tiene que D^2 está determinado por $D^2(f) = \frac{d^2 f}{dx^2}$, y análogamente el operador D^n queda determinado por $D^n(f) = \frac{d^n f}{dx^n}$.

Sea $P(x)$ una función definida en el intervalo (a, b). El producto $P \cdot D^n$ es un operador determinado en $\mathfrak{I}$ de forma natural por $P \cdot D^n(f) = P \cdot \frac{d^n f}{dx^n}$ tal que, $\forall x \in (a, b)$, $P \cdot \frac{d^n f}{dx^n}(x) = P(x) \cdot \frac{d^n f(x)}{dx^n}$.

En particular si $P(x)$ es una función constante $P(x) = k$, $k \in \mathfrak{R}$, el operador $k \cdot D^n$, queda determinado por $(k \cdot D^n)(f) = k \cdot (D^n(f))$ tal que, $\forall x \in (a, b)$, $(k \cdot D^n)(f(x)) =$

$k\cdot\dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$, es decir, el segundo miembro de esta igualdad es el producto de un número k por la derivada n-ésima de una función.

Propiedades del operador D

$D^n \cdot D^m = D^{n+m}$:

El operador D es lineal, es decir:

$$\begin{cases} \forall f, g \in \mathfrak{I} \text{ se verifica que } D(f+g) = D(f) + D(g). \\ \forall f \in \mathfrak{I},\ \forall k \in \mathfrak{R} \text{ se verifica que } D(k\cdot f) = k\cdot D(f). \end{cases}$$

10.1.2. El operador lineal L

Definición 10.1.4:

Sea $\mathfrak{I}$ una familia de funciones reales de variable real infinitamente derivables en un intervalo (a, b) de la recta real y $P_0(x)$, $P_1(x)$, ..., $P_n(x)$ funciones definidas en dicho intervalo. Se denomina ***operador lineal:***

$$L = P_0\cdot D^n + P_1\cdot D^{n-1} + \ldots + P_n$$

a un operador definido en $\mathfrak{I}$, tal que $\forall f \in \mathfrak{I}$, $L(f) = P_0\cdot f^{n)} + P_1\cdot f^{n-1)} + \ldots + P_n\cdot f$.

Propiedades del operador L

El operador L es lineal, es decir:

$$\begin{cases} \forall f, g \in \mathfrak{I} \text{ se verifica que } L(f+g) = L(f) + L(g) \\ \forall f \in \mathfrak{I},\ \forall k \in \mathfrak{R} \text{ se verifica que } L(k\cdot f) = k\cdot L(f). \end{cases}$$

La linealidad de L se extiende por inducción a una combinación lineal de n

funciones de modo que $L\left(\sum_{i=1}^{n} k_i f_i\right) = \sum_{i=1}^{n} k_i L(f_i)$

Utilizando el operador L = $P_0 \cdot D^n + P_1 \cdot D^{n-1} + ... + P_n$ la ecuación diferencial lineal de orden n, $P_0(x) \cdot y^{n)} + P_1(x) \cdot y^{n-1)} + ... + P_{n-1}(x) \cdot y' + P_n(x) \cdot y = G(x)$, se puede expresar de la forma L(y) = G(x).

Si G es la función nula la ecuación diferencial lineal de orden n anterior se denomina ***homogénea***; en caso contrario se denomina ***no homogénea*** o ***completa***.

La ecuación completa L(y) = G(x) tiene asociada la ecuación homogénea definida mediante el mismo operador, así L(y) = 0 es la ***ecuación homogénea asociada*** a la ecuación completa.

El orden de la ecuación anterior L(y) = G(x), que es también el del operador, está determinado por el valor de n. Los puntos en los que la función P_0(x) se anula se denominan ***puntos singulares*** de la ecuación. Estos puntos introducen dificultades en su resolución y requieren un tratamiento especial por lo que a partir de ahora se supone que $P_0(x) \neq 0$ en el intervalo (a, b). En este caso se puede dividir toda la ecuación por $P_0(x)$ y expresarla de la forma:

$$y^{n)} + P_1(x) \cdot y^{n-1)} + ... + P_{n-1}(x) \cdot y' + P_n(x) \cdot y = G(x).$$

El operador lineal asociado L está definido por:

$$L = D^n + P_1 \cdot D^{n-1} + ... + P_n.$$

Cuando los operadores tienen coeficientes constantes las propiedades del operador D permiten realizar operaciones entre ellos utilizando las mismas reglas que en el caso de operaciones con polinomios. A continuación se estudian las características especiales de estos operadores.

10.1.3. Operadores con coeficientes constantes

Sean A y B dos operadores con coeficientes constantes definidos por:

A = $a_0 \cdot \mathrm{D}^n + a_1 \cdot \mathrm{D}^{n-1} + ... + a_n$ con $a_0, a_1, ..., a_n$ constantes y

B = $b_0 \cdot \mathrm{D}^n + b_1 \cdot \mathrm{D}^{n-1} + ... + b_n$ con $b_0, b_1, ..., b_n$ constantes

Si $a_0 \neq 0$ y $b_0 \neq 0$ se dice que los operadores A y B son de orden n.

La suma A + B, el producto A·B y el producto por escalares k·B son también operadores con coeficientes constantes; además se verifican todas las propiedades que tienen las operaciones con polinomios. Para probar esta afirmación se demuestra que existe una correspondencia biunívoca entre los operadores con coeficientes constantes de orden n y los polinomios de grado n, que conservan estas operaciones.

Al operador con coeficientes constantes A se le asocia un polinomio p_A definido por $p_A(x) = a_0 \cdot x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + ... + a_n$ que se denomina su ***polinomio característico***.

Teorema 10.1.1:

Sean A y B operadores con coeficientes constantes de orden n y p_A y p_B sus polinomios característicos, entonces A = B $\Leftrightarrow$ $p_A = p_B$.

Demostración:

Si $p_A = p_B$ los dos polinomios tienen el mismo grado y los mismos coeficientes por lo que los operadores A y B también tienen el mismo orden y los mismos coeficientes y por lo tanto A(f) = B(f), $\forall f \in \mathfrak{I}$.

Por otra parte si A = B entonces A(f) = B(f), $\forall f \in \mathfrak{I}$. Tomando $f(x) = e^{\alpha x}$, con $\alpha \in \mathfrak{R}$, se tiene $A(e^{\alpha x}) = p_A(\alpha)\cdot e^{\alpha x}$ y $B(e^{\alpha x}) = p_B(\alpha)\cdot e^{\alpha x}$ por lo que $p_A(\alpha) = p_B(\alpha)$, $\forall\alpha \in \mathfrak{R}$ y por lo tanto $p_A(x) = p_B(x)$. □

De forma similar se pueden demostrar las siguientes propiedades que muestran que la correspondencia entre operadores y polinomios conserva las operaciones:

Propiedades:

1. $p_{A+B} = p_A + p_B$.

2. $p_{A.B} = p_A \cdot p_B$.

3. $p_{\alpha A} = \alpha\cdot p_A$, $\alpha \in \mathfrak{R}$.

Como consecuencia de todo lo dicho hasta ahora se tiene que el problema de resolver una ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes $A(y) = 0$ se puede reducir a un problema algebraico, que consiste simplemente en factorizar el polinomio característico, $p_A(x)$.

10.1.4. Teorema de existencia y unicidad

Teorema 10.1.2: ***Teorema de existencia y unicidad***

Sea un problema de valor inicial o problema de Cauchy: $L(y) = y^{n)} + P_1(x)\cdot y^{n-1)} + ... + P_{n-1}(x)\cdot y' + P_n(x)\cdot y = G(x)$, con las condiciones iniciales, $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi'(x_0) = y_1$, ..., $\varphi^{n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ con $x_0 \in (a, b)$, y sean P_1, P_2, ..., P_n, G, funciones **continuas** en el intervalo abierto (a, b). Entonces existe una única función $\varphi(x)$ que es solución de la ecuación diferencial $L(y) = G(x)$ y verifica las condiciones iniciales: $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi'(x_0) = y_1$, ..., $\varphi^{n-1)}(x_0) = y_{n-1}$.

Este teorema se obtiene como corolario del teorema de existencia más general, y se demuestra como consecuencia del *teorema 9.2.1* y *9.2.2* del *capítulo 9.*

La condición de continuidad de las derivadas parciales se verifica por el hecho de ser P_1, P_2, ..., P_n funciones continuas.

Si no es un problema de Cauchy, sino que es un problema de contorno con las condiciones definidas en *a* y *b*, la situación es muy diferente ya que aunque P_1, P_2, ..., P_n y *G*, sean funciones continuas en el intervalo abierto (*a*, *b*) un problema de contorno puede tener solución o no tenerla, y en el caso en que exista solución ésta puede ser única o ser múltiple.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 10.1.1: Expresar la ecuación diferencial $y'' + 3x \cdot y' - 2y = 0$ utilizando el operador D.

Utilizando el operador D la ecuación diferencial se expresa de la forma:

$$(D^2 + 3x \cdot D - 2)(y) = 0.$$

Ejemplo 10.1.2: Demostrar que la ecuación diferencial $y'' + 2x \cdot y' + y = 2e^x \cdot (1 + x) + 2x \cdot \cos x$, tiene una solución única que verifica las condiciones iniciales $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$.

La ecuación diferencial es lineal, además $P_1(x) = 2x$, $P_2(x) = 1$ y $G(x) = 2e^x(1 + x) + 2x \cdot \cos x$, son funciones continuas en $(-\infty, \infty)$ por lo tanto aplicando el *teorema 10.1.2* de existencia y unicidad, existe una única solución que verifica que $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$. Se puede comprobar, derivando y sustituyendo en la ecuación, que esta solución es $y(x) = e^x + \operatorname{sen} x$

Ejemplo 10.1.3: Comprobar que $y_1(x) = x \cdot \operatorname{sen} x$ e $y_2(x) = 0$, son soluciones de la ecuación diferencial $x^2 \cdot y'' - 2x \cdot y' + (x^2 + 2) \cdot y = 0$, con las condiciones iniciales $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.

$y'_1(x) = sen\ x + x\cdot cos\ x \Rightarrow y''_1(x) = 2cos\ x - x\cdot sen\ x$.

Al sustituir en la ecuación:

$x^2\cdot(2cos\ x - x\cdot sen\ x) - 2x\cdot(sen\ x + x\cdot cos\ x) + (x^2 + 2)\cdot x\cdot sen\ x = (2x^2 - 2x^2)\cdot cos\ x + (-x^3 - 2x + (x^2 + 2)\cdot x)\cdot sen\ x = 0$. Además se verifica que $y_1(0) = 0$ e $y'_1(0) = 0$.

También $y_2(x) = 0 \Rightarrow y_2'(x) = 0 \Rightarrow y_2''(x) = 0 \Rightarrow x^2\cdot y_2'' - 2x\cdot y_2' + (x^2 + 2)\cdot y_2 = 0$, con $y_2(0) = 0$ e $y_2'(0) = 0$. La solución de este problema de valor inicial no es única.

En la ecuación diferencial expresada de la forma: $y'' - \frac{2}{x}\cdot y' + \frac{x^2+2}{x^2}\ y = 0$, se tiene que las funciones $P_1(x) = -\frac{2}{x}$ y $P_2(x) = \frac{x^2+2}{x^2}$ no son continuas en $x = 0$, por lo tanto el *teorema 10.1.2* sólo garantiza la existencia de una única solución en intervalos que no contengan el punto 0.

Ejercicios

10.1. Expresar mediante el operador D las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $x^2\cdot y'' - x\cdot y' + 2y = x\cdot ln\ x$

b) b) $x^2\cdot y'' - 2x\cdot y' + (x^2 + 2)\cdot y = 0$.

10.2. Demostrar que si A y B son dos operadores con coeficientes constantes de orden *n* y p_A y p_B sus polinomios característicos, entonces se verifican las siguientes propiedades.

a) $p_{A+B} = p_A + p_B$. b) $p_{A.B} = p_A \cdot p_B$. c) $p_{\alpha A} = \alpha \cdot p_A$, $\alpha \in \mathfrak{R}$.

10.3. Sean A y B dos operadores con coeficientes constantes cuyos polinomios característicos no tienen raíces comunes y C = A·B. Demostrar que toda solución f de la ecuación diferencial C(f) = 0 se puede expresar por $f = f_1 + f_2$ siendo f_1 y f_2 funciones que verifican las ecuaciones A(f_1) = 0 y B(f_2) = 0.

10.4. Comprobar que las funciones $y(x) = C \cdot x^2 + x + 3$, $C \in \mathfrak{R}$ son soluciones de la ecuación diferencial $x^2 \cdot y'' - 2x \cdot y' + 2y = 6$, con las condiciones iniciales $y(0) = 3$ e $y'(0) = 1$. Indicar porqué la solución no es única.

10.2. ESTRUCTURA DE LAS SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

10.2.1. Dependencia e independencia lineal. Wronskiano

Definición 10.2.1:

Dado un conjunto de funciones $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ definidas en un intervalo (a, b) se dice que son ***linealmente dependientes*** en el intervalo (a, b), si existen n constantes $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ **no todas nulas**, tales que: $\alpha_1 . y_1 + \alpha_2 . y_2 + ... + \alpha_n . y_n = 0$, $\forall x \in (a, b)$.

Si por el contrario se verifica que esta identidad solamente se cumple cuando $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, entonces se dice que las funciones $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ son ***linealmente independientes*** en el intervalo (a, b).

Definición 10.2.2:

Dado un conjunto de funciones $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ derivables hasta el orden $n - 1$, se denomina ***wronskiano*** de estas funciones y se denota por $W[y_1, y_2, ..., y_n]$ a la función definida por el siguiente determinante:

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \ldots & y'_n(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y^{n-1)}{}_1(x) & y^{n-1)}{}_2(x) & \ldots & y^{n-1)}{}_n(x) \end{vmatrix}.$$

Teorema 10.2.1:

Si las funciones $y_1, y_2, ..., y_n$ son linealmente dependientes en el intervalo (a, b), entonces su wronskiano en ese intervalo es la función nula.

Demostración:

Este teorema se prueba a partir de los conocimientos de álgebra lineal ya que si las funciones son linealmente dependientes una de ellas y_i se puede expresar como combinación lineal de las otras y por la linealidad de las derivadas, la columna *i*-ésima del determinante se puede expresar como una combinación lineal de las otras columnas, lo que supone que el determinante es cero. □

Esta condición no es suficiente ya que pueden existir funciones linealmente independientes cuyo wronskiano sea la función nula, como se observa en el *ejemplo 10.2.4*. Sin embargo si las funciones linealmente independientes son soluciones de una misma ecuación diferencial lineal $L(y) =$

0, entonces se puede asegurar que su wronskiano no se anula en ningún punto del intervalo (a, b). Este resultado, que se demuestra en los siguientes teoremas, es una de las conclusiones del *corolario 10.2.6*.

10.2.2. Estructura de las soluciones de la ecuación homogénea

En los siguientes teoremas se supone que $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_n(x)$ son funciones continuas en un intervalo abierto (a, b) y $L(y) = y^{n)} + P_1(x)\cdot y^{n-1)} + ... + P_{n-1}(x)\cdot y' + P_n(x)\cdot y$.

Teorema 10.2.2:

Si y_1, y_2, ..., y_n son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial $L(y) = 0$ en el intervalo (a, b); entonces, dadas n constantes c_1, c_2, ..., c_n, la función $\sum_{k=1}^{n} c_k y_k$ es también solución de $L(y) = 0$ en el intervalo (a, b).

Demostración:

Las funciones y_k, $1 \le k \le n$, son soluciones de la ecuación diferencial y por tanto verifican $L(y_k) = 0$. Como el operador L es lineal se tiene que:

$$L\left(\sum_{k=1}^{n} c_k y_k\right) = \sum_{k=1}^{n} c_k L(y_k) = 0\,. \square$$

Teorema 10.2.3:

Si las funciones y_1, y_2, ..., y_n son soluciones de la ecuación diferencial $L(y) = 0$ y son linealmente independientes en el intervalo (a, b), entonces su wronskiano en ese intervalo no es la función nula.

Demostración:

Se demuestra el teorema por reducción al absurdo, por lo que se supone que $W[y_1, y_2, ..., y_n](x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$.

Para un punto determinado $x_0 \in (a, b)$ se considera el siguiente sistema homogéneo de ecuaciones lineales en las variables $c_1, c_2, ..., c_n$:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x_0) = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} c_k y'_k(x_0) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{k=1}^{n} c_k y_k^{n-1)}(x_0) = 0. \end{cases}$$

Como el determinante de los coeficientes de las incógnitas, que es el wronskiano, es igual a cero, el sistema tiene infinitas soluciones, en particular existen $c_1, c_2, ..., c_n$, no todos nulos, que son solución del sistema. Con estos valores se determina una función $\alpha(x)$, definida por:

$$\alpha(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x), \ \forall x \in (a, b).$$

Esta función es solución de la ecuación diferencial lineal $L(y) = 0$ por ser una combinación lineal de soluciones de esta ecuación y además $\alpha(x_0) = 0$, $\alpha'(x_0) = 0$, ..., $\alpha^{n-1)}(x_0) = 0$, por lo que en el punto x_0 la función α y sus derivadas hasta la de orden $n - 1$ coinciden con la función nula, que también es solución de $L(y) = 0$, y por el teorema de unicidad de soluciones $\alpha(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$, luego $\sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$, lo que contradice que las funciones

$y_1, y_2, ..., y_n$ sean linealmente independientes en (a, b). □

En las hipótesis de este teorema no sólo existe un punto $x \in (a, b)$, tal que $W[y_1, y_2, ..., y_n](x) \neq 0$ sino que $\forall x \in (a, b)$, $W[y_1, y_2, ..., y_n](x) \neq 0$. Este resultado se demostrará en el siguiente teorema, cuya prueba necesita el siguiente lema:

Lema 10.2.4:

Sean $y_1, y_2, ..., y_n$ funciones derivables hasta el orden n, entonces la derivada de su wronskiano es:

$$W'[y_1, y_2, ..., y_n](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & .... & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & .... & y'_n(x) \\ .... & .... & .... & .... \\ y_1^{n-2)}(x) & y_2^{n-2)}(x) & .... & y_n^{n-2)}(x) \\ y_1^{n)}(x) & y_2^{n)}(x) & .... & y_n^{n)}(x) \end{vmatrix}.$$

Lo que equivale a decir que las primeras $n - 1$ filas coinciden con las de $W[y_1, y_2, ..., y_n]$ y en la última fila se han sustituido las derivadas de orden $n - 1$ por las de orden n.

Demostración:

Sea $\Delta(x)$ la función definida por el determinante de la igualdad anterior. La demostración de que $W'[y_1, y_2, ..., y_n](x) = \Delta(x)$ se hace por inducción sobre n.

Para $n = 2$ es evidente, ya que $W[y_1, y_2] = y_1 \cdot y'_2 - y'_1 \cdot y_2$ y por lo tanto

$$W'[y_1, y_2] = y'_1 \cdot y'_2 + y_1 \cdot y''_2 - y''_1 \cdot y_2 - y'_1 \cdot y'_2 = y_1 \cdot y''_2 - y''_1 \cdot y_2 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y''_1 & y''_2 \end{vmatrix}.$$

Supuesto cierto para $n - 1$ se demostrará para n.

Sea Δ_{ij} el adjunto del elemento de la fila i y la columna j en el wronskiano.

Desarrollando por los elementos de la fila n se tiene que:

$$W[y_1, y_2, ..., y_n] = y_1^{n-1)} \cdot \Delta_{n,1} + y_2^{n-1)} \cdot \Delta_{n,2} + ... + y_{n-1}^{n-1)} \cdot \Delta_{n,n-1} + y_n^{n-1)} \cdot \Delta_{n,n}.$$

Derivando: $W'[y_1, y_2, ..., y_n] = y_1^{n)} \cdot \Delta_{n,1} + y_2^{n)} \cdot \Delta_{n,2} + ... + y_{n-1}^{n)} \cdot \Delta_{n,n-1} + y_n^{n)} \cdot \Delta_{n,n} + y_1^{n-1)} \cdot \Delta'_{n,1} + y_2^{n-1)} \cdot \Delta'_{n,2} + ... + y_{n-1}^{n-1)} \cdot \Delta'_{n,n-1} + y_n^{n-1)} \cdot \Delta'_{n,n}$.

Aplicando la hipótesis de inducción:

$$\Delta'_{n,1} = \begin{vmatrix} y_2 & y_3 & .... & y_n \\ y'_2 & y'_3 & .... & y'_n \\ .... & .... & & .... \\ y_2^{n-3)} & y_3^{n-3)} & .... & y_n^{n-3)} \\ y_2^{n-1)} & y_3^{n-1)} & .... & y_n^{n-1)} \end{vmatrix},$$

y en general $\Delta'_{n,j}$ es un determinante similar en el que figura la columna correspondiente a y_1 y falta la de y_j, luego $y_1^{n-1)} \cdot \Delta'_{n,1} + y_2^{n-1)} \cdot \Delta'_{n,2} + ... + y_{n-1}^{n-1)} \cdot \Delta'_{n,n-1} + y_n^{n-1)} \cdot \Delta'_{n,n} = 0$ por ser el desarrollo de un determinante en el que la fila n y la $n - 1$ son iguales, por lo tanto:

$$W'[y_1, y_2, ..., y_n] = y_1^{n)} \cdot \Delta_{n,1} + y_2^{n)} \cdot \Delta_{n,2} + ... + y_{n-1}^{n)} \cdot \Delta_{n,n-1} + y_n^{n)} \cdot \Delta_{n,n}.$$

Se observa que los adjuntos de los elementos de la fila n del wronskiano coinciden con los adjuntos de los elementos de la fila n en el determinante Δ luego $W'[y_1, y_2, ..., y_n] = \Delta$. □

Teorema 10.2.5:

Si las funciones $y_1, y_2, ..., y_n$ son soluciones de la ecuación diferencial $L(y) = 0$ en un intervalo (a, b), entonces su wronskiano en ese intervalo o es la función nula o no se anula en ningún punto de dicho intervalo.

Demostración:

Si $y_1, y_2, ..., y_n$ son soluciones de L(y) = 0 se verifica que:

$y_i^{n)} + P_1(x)\cdot y_i^{n-1)} + ... + P_{n-1}(x)\cdot y_i' + P_n(x)\cdot y_i = 0, \forall i \in \{1, 2, ... , n\}$.

Multiplicando cada una de estas expresiones por $\Delta_{n,i}$, adjunto del elemento de la fila n y la columna i del wronskiano, y sumándolas, se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^{n)}\cdot\Delta_{n,i} + \sum_{i=1}^{n} P_1(x)\cdot y_i^{n-1)}\cdot\Delta_{n,i} + ... + \sum_{i=1}^{n} P_{n-1}(x)\cdot y_i'\cdot\Delta_{n,i} + \sum_{i=1}^{n} P_n(x)\cdot y_i\cdot\Delta_{n,i} = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^{n)}\cdot\Delta_{n,i} + P_1(x)\cdot\sum_{i=1}^{n} y_i^{n-1)}\cdot\Delta_{n,i} + \textbf{...} + P_{n-1}(x)\cdot\sum_{i=1}^{n} y_i'\cdot\Delta_{n,i} + P_n(x)\cdot\sum_{i=1}^{n} y_i\cdot\Delta_{n,i} = 0$$

Por el lema anterior se conoce que:

$\sum_{i=1}^{n} y_i^{n)}\cdot\Delta_{n,i} = W'[y_1, y_2, ..., y_n]$ y $\sum_{i=1}^{n} y_i^{n-1)}\cdot\Delta_{n,i} = W[y_1, y_2, ..., y_n]$,

además si $0 \le k \le n - 2$, $\sum_{i=1}^{n} y_i^{k)}\cdot\Delta_{n,i} = 0$ ya que se puede expresar como un determinante en el que la fila k y la fila n son iguales. Sustituyendo estos resultados se tiene que:

$W'[y_1, y_2, ..., y_n](x) + P_1(x)\cdot W[y_1, y_2, ..., y_n](x) = 0$, o bien: $W'(x) + P_1(x)\cdot W(x) = 0$, una ecuación diferencial lineal de primer orden que tiene por solución:

$$W(x) = Ce^{-\int p_1(t)dt}.$$

Como la exponencial no se anula, se tiene que W(x) = 0 sólo cuando C es igual a 0, luego W(x) o es la función nula o no se anula en ningún punto del intervalo (a, b). □

Como conclusión de los teoremas anteriores se tiene el siguiente corolario:

Corolario 10.2.6:

Si las funciones y_1, y_2, ..., y_n son soluciones de la ecuación diferencial L(y) = 0 en el intervalo (a, b), las tres condiciones siguientes son equivalentes:

a) Las funciones y_1, ..., y_n son linealmente independientes en (a, b).

b) Existe un $x \in (a, b)$ tal que $W[y_1, y_2, ..., y_n](x)$ es distinto de cero.

c) Para todo $x \in (a, b)$ se verifica que $W[y_1, y_2, ..., y_n](x)$ es distinto de cero.

Es evidente que a) $\Rightarrow$ b) por el *teorema 10.2.3*, y b) $\Rightarrow$ a) por el *teorema 10.2.1*, además b) $\Rightarrow$ c) por el *teorema 10.2.5* y la implicación c) $\Rightarrow$ b) es trivial.

La hipótesis de que las funciones y_i sean soluciones de L(y) = 0 no es soslayable. Por ejemplo $y_1(x) = x^2$ e $y_2(x) = x \cdot |x|$ son funciones linealmente independientes en el intervalo $(-a, a)$ y sin embargo existen puntos en los que $W[y_1, y_2] = 0$ y otros donde $W[y_1, y_2] \neq 0$

Definición 10.2.3:

Se denomina ***conjunto fundamental de soluciones*** de la ecuación diferencial homogénea de orden n, L(y) = 0, en un intervalo (a, b), a cualquier conjunto de n soluciones linealmente independientes en (a, b).

Teorema 10.2.7:

Siempre existe un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial homogénea de orden n, L(y) = 0, en el intervalo (a, b).

Demostración:

Sea $x_0 \in (a, b)$. Por el teorema de existencia de soluciones se sabe que para todo k desde 0 hasta $n - 1$, existen funciones $y_k(x)$ que son solución de la ecuación diferencial y son tales que cada una de ellas verifica la condición inicial siguiente: $y_k^{k)}(x_0) = 1$ y $y_k^{j)}(x_0) = 0$ si $j \neq k$.

Las funciones $y_0, y_1, ..., y_{n-1}$ son linealmente independientes. En efecto sean $c_0, c_1, ..., c_{n-1}$ n constantes tales que $c_0 \cdot y_0 + c_1 \cdot y_1 + ... + c_{n-1} \cdot y_{n-1} = 0$, $\forall x \in (a, b)$. Al derivar esta expresión $n - 1$ veces y sustituir en cada una de estas n expresiones x por x_0 se verifica que:

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k y_k(x_0) = 0 \Rightarrow c_0 = 0.$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k y'_k(x_0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

....

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k y^{n-1)}{}_k(x_0) = 0 \Rightarrow c_{n-1} = 0.$$

En consecuencia, las n funciones son linealmente independientes y por lo tanto forman un conjunto fundamental de soluciones. □

Teorema 10.2.8:

Si $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n L(y) = 0, en el intervalo (a, b), entonces toda solución φ de esta ecuación se puede expresar de la forma $\varphi = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k$, donde $c_1, c_2, ..., c_n$ son constantes.

Demostración:

Sea $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ un conjunto fundamental de soluciones, φ una solución de la ecuación $L(y) = 0$ y x_0 un punto del intervalo (a, b), entonces por el *corolario 10.2.6*, $W[y_1, y_2, ..., y_n](x_0) \neq 0$.

Se determina $\varphi(x_0)$, $\varphi'(x_0)$, ..., $\varphi^{n-1)}(x_0)$, y se considera el siguiente sistema de n ecuaciones en las incógnitas $c_1, c_2, ..., c_n$:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x_0) = \varphi(x_0) \\ \sum_{k=1}^{n} c_k y'_k(x_0) = \varphi'(x_0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{k=1}^{n} c_k y_k^{n-1)}(x_0) = \varphi^{n-1)}(x_0). \end{cases}$$

Como el determinante de la matriz de los coeficientes $W[y_1, y_2, ..., y_n](x_0)$ es distinto de cero, el sistema tiene solución única, es decir existen $c_1, c_2, ..., c_n$ constantes que verifican las n ecuaciones y por el *teorema 10.1.2* de unicidad de la solución: $\varphi = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k$. □

Teorema 10.2.9:

Sea Σ el conjunto de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n, $L(y) = 0$; entonces Σ tiene estructura de ***espacio vectorial de dimensión n***.

Demostración:

El *teorema 10.2.2* garantiza la linealidad de las soluciones de la ecuación homogénea L(y) = 0, y además se verifican los axiomas de espacio vectorial. En este espacio funcional un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial, que existe como resultado del *teorema 10.2.7*, es una base de este espacio vectorial ya que por el *teorema 10.2.8* cualquier solución se puede expresar como combinación lineal de los elementos del conjunto fundamental de soluciones que por definición son funciones linealmente independientes. Además cada solución no puede depender de más de n constantes, ya que en este caso sería solución de una ecuación diferencial de grado mayor que n. □

Corolario 10.2.10:

Sea $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n, L(y) = 0, en el intervalo (a, b). La ***solución general*** de esta ecuación, $\varphi(x)$, se puede expresar de la forma:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x) .$$

10.2.3. Estructura de las soluciones de la ecuación completa

En este apartado se demuestra que la solución general de una ecuación diferencial lineal completa se puede obtener a partir de una solución particular de ésta y la solución general de la ecuación homogénea, resultado que ya se estudió para las ecuaciones lineales de primer orden y que tiene gran importancia como método para resolver ecuaciones no homogéneas. Para ello se estudia que el conjunto de soluciones de una ecuación diferencial lineal de orden superior completa tiene estructura de espacio afín, siendo su espacio vectorial asociado el conjunto de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea asociada.

Teorema 10.2.11:

Sean $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_n(x)$, $G(x)$, funciones continuas en un intervalo abierto (a, b) y sea $L(y) = y^{n)} + P_1(x)\cdot y^{n-1)} + ... + P_{n-1}(x)\cdot y' + P_n(x)\cdot y$. Si y_1, y_2, ..., y_n son n soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial $L(y) = 0$ en el intervalo (a, b) y φ_P es una solución cualquiera de la ecuación no homogénea $L(y) = G(x)$, entonces para toda solución φ de esta ecuación, existen n constantes c_1, c_2, ..., c_n, tales que φ puede expresarse por:

$$\varphi = \varphi_P + \sum_{k=1}^{n} c_k y_k$$

Demostración:

Sea φ una solución arbitraria de la ecuación $L(y) = G(x)$. Como φ_P también es solución se tiene que ambas funciones verifican la ecuación, por lo que $L(\varphi_P) = G$ y $L(\varphi) = G$. Por la linealidad de L se verifica que $L(\varphi - \varphi_P) = G(x) - G(x) = 0$, y por lo tanto $\varphi - \varphi_P$ es una solución de la ecuación homogénea asociada. Por el *teorema 10.2.8* existen n constantes c_1, c_2, ..., c_n, tales que $\varphi - \varphi_P = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k \Rightarrow \varphi = \varphi_P + \sum_{k=1}^{n} c_k y_k$, de donde se deduce que la solución φ de la ecuación no homogénea se puede expresar como la suma de una solución particular de ésta más la solución general de la homogénea. □

Teorema 10.2.12:

Sean $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_n(x)$, $G(x)$, funciones continuas en un intervalo abierto (a, b) y sea $L(y) = y^{n)} + P_1(x)\cdot y^{n-1)} + ... + P_{n-1}(x)\cdot y' + P_n(x)\cdot y$. El conjunto de soluciones de la ecuación diferencial lineal completa $L(y) = G(x)$ tiene estructura de ***espacio afín*** de dimensión n construido sobre el espacio vectorial de soluciones de la ecuación homogénea $L(y) = 0$.

Sea Σ el conjunto de soluciones de la ecuación homogénea que por el *teorema 10.2.9* tiene estructura de espacio vectorial de dimensión n y Γ el conjunto de soluciones de la ecuación completa.

La aplicación h: $\Gamma \times \Gamma \to \Sigma$, definida por $h(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi_2 - \varphi_1$ estructura a Γ como espacio afín ya que:

Si $\varphi_1, \varphi_2 \in \Gamma \Rightarrow L(\varphi_2 - \varphi_1) = L(\varphi_2) - L(\varphi_1) = G - G = 0 \Rightarrow \varphi_2 - \varphi_1 \in \Sigma$. Además se verifican los axiomas de espacio afín:

1º $\forall \varphi_1 \in \Gamma$ y $\forall\ \psi \in \Sigma$, $\exists \varphi_2 \in \Gamma$, tal que $h(\varphi_1, \varphi_2) = \varphi_2 - \varphi_1 = \psi$.

Basta tomar $\varphi_2 = \varphi_1 + \psi$. Es claro que $\varphi_2 \in \Gamma$ ya que $L(\varphi_2) = L(\varphi_1 + \psi) = L(\varphi_1) - L(\psi) = G$.

2º Si $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \Gamma$ entonces $h(\varphi_1, \varphi_2) + h(\varphi_2, \varphi_3) = h(\varphi_1, \varphi_3)$ lo que se verifica ya que $\varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_3 - \varphi_2 = \varphi_3 - \varphi_1$.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 10.2.1: Estudiar la dependencia o independencia lineal del conjunto de funciones $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$.

Estas funciones son linealmente independientes en el intervalo $(-\infty, \infty)$, ya que si la igualdad $\alpha_1 + \alpha_2\cdot x + ... + \alpha_{n+1}\cdot x^n = 0$, se verifica para todos los valores de x, entonces $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_{n+1} = 0$.

Ejemplo 10.2.2: Demostrar que el conjunto de funciones $\{e^{k_1x}, e^{k_2x}, e^{k_3x}\}$ donde k_1, k_2, k_3, son números reales todos ellos distintos entre sí, es linealmente independiente en $(-\infty, \infty)$.

$$W[e^{k_1x}, e^{k_2x}, e^{k_3x}] = \begin{vmatrix} e^{k_1x} & e^{k_2x} & e^{k_3x} \\ k_1e^{k_1x} & k_2e^{k_1x} & k_3e^{k_1x} \\ k_1^2e^{k_1x} & k_2^2e^{k_1x} & k_3^2e^{k_1x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{k_1x}.e^{k_2x}.e^{k_3x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ k_1^2 & k_2^2 & k_3^2 \end{vmatrix} = e^{k_1x}.e^{k_2x}.e^{k_3x}\,(k_2 - k_1)\cdot(k_3 - k_1)\cdot(k_3 - k_2).$$

Como k_1, k_2, k_3, son números todos ellos distintos, entonces $W[e^{k_1x}, e^{k_2x}, e^{k_3x}] \neq 0$ para todo $x \in (-\infty, \infty)$; por lo tanto las funciones son linealmente independientes.

Ejemplo 10.2.3: Demostrar que el conjunto de funciones $\{e^{\alpha x}\,sen\,\beta x,\ e^{\alpha x}\cos\beta x\}$ es linealmente independiente en $(-\infty, \infty)$.

Se supone que existen dos números reales α_1, α_2 tales que $\alpha_1 e^{\alpha x}\,sen\,\beta x + \alpha_2 e^{\alpha x}\cos\beta x = 0$; dividiendo la igualdad por $e^{\alpha x}$, se obtiene $\alpha_1\,sen\,\beta x + \alpha_2\cos\beta x = 0$. Si se toma el valor $x = 0$ se tiene que $\alpha_2 = 0$ y por lo tanto $\alpha_1\,sen\,\beta x = 0$. Como la función $sen\,\beta x$ no es la función cero, resulta que $\alpha_1 = 0$ y por lo tanto las funciones consideradas son linealmente independientes.

Ejemplo 10.2.4: Estudiar la dependencia o independencia lineal de las funciones y_1 e y_2 definidas por:

$$y_1(x) = \begin{cases} x^2 & x \in (-1, 0) \\ 0 & x \in [0, 1) \end{cases} \text{ e } y_2(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-1, 0) \\ x^2 & x \in [0, 1) \end{cases}$$

Las funciones y_1 e y_2 son linealmente independientes en el intervalo (–1, 1) y sin embargo su wronskiano es la función cero, por lo tanto $\{y_1, y_2\}$ no pueden ser soluciones de una misma ecuación diferencial lineal de orden dos.

Ejemplo 10.2.5: ¿Pueden ser $f(x) = x$ y $g(x) = e^x$ soluciones de la ecuación $y'' + p(x)\cdot y' + q(x) = 0$, $p(x)$ y $q(x)$ funciones continuas, en el intervalo (0, 2)? ¿Y en el intervalo (–6, –1)?

Las funciones f y g son linealmente independientes. Por otra parte su wroskiano $W[f, g](x) = e^x(x - 1)$ se anula en $x = 1$, por lo que no pueden ser soluciones de una ecuación diferencial lineal en el intervalo (0, 2) que contiene a $x = 1$, y sí podrían serlo en (–6, –1) que no lo contiene.

Ejercicios

10.5. Demostrar que $\{e^{ax}, x\cdot e^{ax}, ..., x^{n-1}\cdot e^{ax}\}$ es un conjunto de funciones linealmente independientes en $\mathfrak{R}$.

10.6. Verificar si el conjunto de funciones $\{lnx, x\cdot lnx, x^2\cdot lnx\}$ es linealmente independiente en $\mathfrak{R}^+$.

10.7. Comprobar si las siguientes funciones φ(x) son solución general de las ecuaciones diferenciales siguientes:

a) $y'' + y = 0$; $\varphi(x) = C_1\cdot cos\ x + C_2\cdot sen\ x$.

b) $y'' - y = 0$; $\varphi(x) = C_1\cdot e^x + C_2\cdot e^{-x}$.

c) $y'' + y = 1$; $\varphi(x) = C_1\cdot cos\ x + C_2\cdot sen\ x + 1$.

d) $y'' - y = e^{2x}$; $\varphi(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x} + \dfrac{e^{2x}}{3}$.

10.3. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES HOMOGÉNEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

10.3.1. Ecuación característica. Autovalores

Una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes se puede expresar de la forma L(y) = 0 siendo L(y) = $y^{n)} + p_1 \cdot y^{n-1)} + ... + p_{n-1} \cdot y' + p_n \cdot y$, con $p_1, p_2, ..., p_n$ constantes

Para resolver la ecuación diferencial lineal homogénea L(y) = 0, se buscan soluciones de la forma $y = e^{\lambda x}$, de donde $y' = \lambda e^{\lambda x}$, y en general $y^{n)} = \lambda^n \cdot e^{\lambda x}$. Al sustituir estas funciones en la ecuación se obtiene que:

$$(\lambda^n + p_1 \cdot \lambda^{n-1} + ... + p_{n-1} \cdot \lambda + p_n) \cdot e^{\lambda x} = 0$$

y como $e^{\lambda x} \neq 0$ se debe verificar que:

$$\lambda^n + p_1 \cdot \lambda^{n-1} + ... + p_{n-1} \cdot \lambda + p_n = 0.$$

Definición10.3.1:

Se denomina ***ecuación característica*** de L(y) = 0 a la ecuación:

$$\boldsymbol{\lambda^n + p_1 \cdot \lambda^{n-1} + ... + p_{n-1} \cdot \lambda + p_n = 0}$$

y ***polinomio característico*** al polinomio que la define.

Por lo tanto $y = e^{\lambda x}$ es solución de la ecuación L(y) = 0 si y sólo si λ es raíz de su ecuación característica.

Definición 10.3.2:

Se denominan ***autovalores*** o ***valores propios*** de la ecuación diferencial L(y)= 0 a las raíces de su ecuación característica.

Los autovalores se denominan ***simples*** o ***múltiples*** con el mismo criterio que las correspondientes raíces de la ecuación característica, siendo el orden de multiplicidad de un autovalor múltiple el orden de la raíz correspondiente.

El teorema fundamental del álgebra asegura que esta ecuación tiene n autovalores que pueden ser reales o complejos y simples o múltiples y es precisamente esta clasificación de los autovalores la que determina los distintos tipos de solución de la ecuación diferencial. La diferenciación entre autovalores reales y complejos sólo es necesario realizarla cuando se buscan soluciones reales de la ecuación diferencial.

10.3.2. Discusión de las soluciones

Caso 1: Los autovalores son reales y simples.

Se supone que la ecuación característica tiene n raíces reales y simples, que son los autovalores de la ecuación $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Entonces el operador L puede expresarse como un producto de n operadores de la siguiente forma:

$$L = (D - \lambda_1)\cdot(D - \lambda_2)\cdots(D - \lambda_n).$$

Un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación L(y) = 0 viene dado por $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$, ..., $y_n(x) = e^{\lambda_n x}$, y por tanto la solución general es una combinación lineal de estas funciones:

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{\lambda_k x} \ .$$

Caso 2: Los autovalores son reales y alguno de ellos es múltiple

Si se supone que sólo existe un autovalor múltiple λ, con orden de multiplicidad *s*, el operador L puede expresarse como un producto de operadores de la siguiente forma $L = (D - \lambda)^s \cdot L_s(D)$.

Las soluciones de la ecuación $L_s(D) = 0$ están determinadas como en el caso anterior. Para buscar soluciones de la ecuación $(D - \lambda)^s(y) = 0$, se prueba con funciones de la forma $y(x) = g(x) \cdot e^{\lambda x}$, siendo $g(x)$ una función por determinar.

Para demostrar lo que sigue se necesita un lema previo:

Lema 10.3.1:

Sea $y(x)$ una función compleja con derivadas continuas hasta el orden *m,* entonces *se* verifica que $(D - \lambda)^m(e^{\lambda x} \cdot y(x)) = e^{\lambda x} \cdot D^m(y(x))$, siendo λ constante.

Demostración:

Se probará por inducción sobre *m*.

Para $m = 0$ es evidente. Supuesto cierto para $m - 1$, se tiene que:

$(D - \lambda)^m(e^{\lambda x} \cdot y(x)) = (D - \lambda) \cdot (D - \lambda)^{m-1}(e^{\lambda x} \cdot y(x)) = (D - \lambda) \cdot (e^{\lambda x} \cdot D^{m-1}(y(x)) = e^{\lambda x} \cdot D^m(y(x))$. □

Se debe verificar que $(D - \lambda)^s(g(x) \cdot e^{\lambda x}) = 0$ por lo que $e^{\lambda x} \cdot D^s(g(x)) = 0$, y como $e^{\lambda x} \neq 0$ resulta que $D^s(g(x)) = 0$, por lo tanto una solución para $g(x)$ es un polinomio de grado $s - 1$.

Las s soluciones linealmente independientes buscadas de la ecuación $(D-\lambda)^s(y) = 0$ pueden ser:

$y_1(x) = e^{\lambda x}$, $y_2(x) = x \cdot e^{\lambda x}$, $y_3(x) = x^2 \cdot e^{\lambda x}$, ..., $y_s(x) = x^{s-1} \cdot e^{\lambda x}$,

y la solución general es de la forma:

$$\varphi_s(x) = (C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot x^2 + ... + C_s \cdot x^{s-1})e^{\lambda x}.$$

Por otra parte si $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n-s}$ son los autovalores simples, un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación $L(y) = 0$ estará formado por

$y_1(x) = e^{\lambda x}$, $y_2(x) = x \cdot e^{\lambda x}$, $y_3(x) = x^2 \cdot e^{\lambda x}$, ..., $y_s(x) = x^{s-1} \cdot e^{\lambda x}$, $y_{s+1}(x) = e^{\lambda_1 x}$, $y_{s+2}(x) = e^{\lambda_2 x}$, ..., $y_n(x) = e^{\lambda_{n-s} x}$, ya que son n soluciones linealmente independientes de una ecuación diferencial de orden n.

Por lo tanto la solución general es una combinación lineal de estas funciones:

$$\psi(x) = \left(\sum_{k=1}^{S} C_k x^{k-1}\right) e^{\lambda x} + \sum_{k=1}^{n-s} C_{s+k} e^{\lambda_k x}.$$

Cuando las funciones que son solución de la ecuación diferencial pueden ser funciones con valores complejos la discusión general estaría terminada, los siguientes casos sólo son necesarios cuando se buscan soluciones reales.

Teniendo en cuenta que una ecuación polinómica que tiene una raíz compleja $\alpha + \beta \cdot i$ también tiene su conjugada $\alpha - \beta \cdot i$ y con objeto de simplificar la notación, los siguientes casos que se discuten se van a reducir a considerar dos autovalores complejos que pueden ser simples o múltiples.

Caso 3: Dos autovalores complejos simples

Sean $\alpha + \beta \cdot i$ y $\alpha - \beta \cdot i$ los autovalores complejos. Un conjunto fundamental de soluciones en el plano complejo es $z_1(x) = e^{(\alpha+\beta i)x}$ y $z_2(x) = e^{(\alpha-\beta i)x}$, pero si z_1 y z_2 son soluciones linealmente independientes también lo son sus combinaciones lineales $y_1 = \frac{z_1 + z_2}{2}$ e $y_2 = \frac{z_1 - z_2}{2i}$, y por lo tanto $y_1(x) = e^{\alpha x} \cdot cos\,\beta x$ e $y_2(x) = e^{\alpha x} \cdot sen\beta x$, que son funciones reales, forman un conjunto fundamental de soluciones reales y la solución general de la ecuación diferencial es:

$$\psi(x) = C_1 e^{\alpha x} \cdot cos\,\beta x + C_2 e^{\alpha x} \cdot sen\beta x .$$

Caso 4: Dos autovalores complejos múltiples de orden *s*

Sean $\alpha + \beta \cdot i$ y $\alpha - \beta \cdot i$ los autovalores complejos de orden de multiplicidad *s*. Utilizando los resultados de los dos casos anteriores se tiene que un conjunto fundamental de soluciones está formado por:

$y_1(x) = e^{\alpha x} \cdot cos\ \beta x$, $y_2(x) = x \cdot e^{\alpha x} \cdot cos\ \beta x$, ..., $y_s(x) = x^{s-1} e^{\alpha x} cos\ \beta x$,

$y_{s+1}(x) = e^{\alpha x}.sen\ \beta x$, $y_{s+2}(x) = x \cdot e^{\alpha x} \cdot sen\ \beta x$, ..., $y_{2s}(x) = x^{s-1} \cdot e^{\alpha x} \cdot sen\ \beta x$

y la solución general de la ecuación diferencial es:

$$\psi(x) = \left(\sum_{k=1}^{s} C_k x^{k-1}\right) e^{\alpha x} cos\,\beta x + \left(\sum_{k=1}^{s} C_{s+k} x^{k-1}\right) e^{\alpha x} sen\beta x .$$

Ejemplos resueltos

Ejemplo 10.3.1. Calcular la solución general de la ecuación diferencial:

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Primero se calculan sus autovalores, es decir, las raíces de su ecuación característica $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, que son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$.

Un conjunto fundamental de soluciones está formado por $\{e^x, e^{2x}\}$ y por lo tanto la solución general de la ecuación es:

$$\psi(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{2x}.$$

Ejemplo 10.3.2. Resolver la ecuación diferencial $y'' + 2y' + y = 0$ y encontrar la solución particular que verifique que $y(0) = y'(0) = 1$.

Su ecuación característica $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, sólo tiene un autovalor $\lambda = -1$ de orden dos.

Un conjunto fundamental de soluciones está formado por $\{e^{-x}, x \cdot e^{-x}\}$ y por lo tanto la solución general de la ecuación es $\psi(x) = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-x}$.

La solución particular que verifica las condiciones iniciales es:

$$\psi(x) = e^{-x} + 2x \cdot e^{-x},$$

ya que $\psi(0) = C_1$ y $\psi'(0) = -C_1 + C_2$, luego $C_1 = 1$ y $C_2 = 2$.

Ejemplo 10.3.3: Integrar la ecuación diferencial $y''' + 6y' + 20y = 0$.

Se escribe su ecuación característica, $\lambda^3 + 6\lambda + 20 = 0$, y sus autovalores $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1 + 3i$ y $\lambda_3 = 1 - 3i$. Un conjunto fundamental de soluciones está formado por $\{e^{-2x}, e^x \cdot \cos 3x, e^x \cdot \operatorname{sen} 3x\}$ y por lo tanto la solución general de la ecuación viene expresada por:

$$\psi(x) = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot e^x \cdot \cos 3x + C_2 \cdot e^x \cdot \operatorname{sen} 3x.$$

Ejemplo 10.3.4: Resolver $y^{vi} + y^{iv} - y'' - y = 0$.

Esta ecuación tiene como ecuación característica es $\lambda^6 + \lambda^4 - \lambda^2 - 1 = 0$, que tiene dos autovalores reales simples $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ y dos complejos $\lambda_3 = i$, $\lambda_4 = -i$ de orden dos.

Un conjunto fundamental de soluciones esta formado por $\{e^x, e^{-x}, \cos x, \operatorname{sen} x, x\cdot\cos x, x\cdot\operatorname{sen} x\}$ y por lo tanto la solución general de la ecuación viene dada por:

$$\psi(x) = C_1\cdot e^x + C_2\cdot e^{-x} + C_3\cdot\cos x + C_4\cdot\operatorname{sen} x + C_5\cdot x\cdot\cos x + C_6\cdot x\cdot\operatorname{sen} x.$$

Ejemplo 10.3.5: Buscar una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes que tenga como soluciones:

$$y_1(x) = e^{3x},\ y_2(x) = e^{-2x}.$$

El polinomio característico debe tener las raíces 3 y –2 y ser de segundo grado. Por tanto $p(\lambda) = (\lambda - 3)\cdot(\lambda + 2) = \lambda^2 - \lambda - 6$ y la ecuación buscada es:

$$y'' - y' - 6y = 0.$$

Ejemplo 10.3.6: Escribir la solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes cuyo polinomio característico es $p(\lambda) = (\lambda - 1)\cdot(\lambda + 3)\cdot(\lambda + 5)\cdot(\lambda - 2)\cdot(\lambda - 4)$.

La solución general es:

$$\psi(x) = C_1\cdot e^x + C_2\cdot e^{-3x} + C_3\cdot e^{-5x} + C_4\cdot e^{2x} + C_5\cdot e^{4x}.$$

Ejercicios

10.8. Calcular la solución general de las siguientes ecuaciones lineales:

a) $y'' + 2y' + 5y = 0$.

b) $y^{iv} - y'' = 0$.

c) $y''' - 2y'' - 3y' = 0$.

10.9. Integrar las ecuaciones:

a) $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$.

b) $y^{iv} - y = 0$.

c) $y^{iv} + y = 0$.

d) $(D^2 - 2D + 5)^2(y) = 0$.

10.10. Probar que si $x \cdot e^{\alpha x}$ es una solución de la ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes $L(y) = 0$, entonces su ecuación característica tiene a α como raíz doble.

10.4. MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

10.4.1. Reducción de orden de una ecuación diferencial lineal homogénea. Método de D'Alembert

El método de D'Alembert consiste en reducir el orden de una ecuación lineal homogénea, sin que deje de ser lineal, cuando previamente se conoce una solución particular que no sea trivial.

Sean $P_1(x)$, $P_2(x)$, …, $P_n(x)$ funciones continuas en un intervalo abierto (a, b) y $L(y) = y^{n)} + P_1(x) \cdot y^{n-1)} + \ldots + P_{n-1}(x) \cdot y' + P_n(x) \cdot y$.

Se considera la ecuación homogénea $L(y) = 0$. Sea $y_1(x)$ una solución particular, no trivial, de la ecuación anterior. Si se supone que $y(x) = z(x) \cdot y_1(x)$, donde $z(x)$ es una nueva función incógnita, se tiene una ecuación de la forma $a_n(x) \cdot z^{n)} + a_{n-1}(x) \cdot z^{n-1)} + \ldots + a_1(x) \cdot z' = 0$; llamando $z'(x) = u(x)$ se obtiene una ecuación diferencial en $u(x)$ en la que el orden queda reducido en una unidad.

Por tanto un método general de búsqueda de soluciones puede ser tantear con soluciones sencillas: polinómicas, exponenciales o trigonométricas y si se consigue hallar una, entonces es posible reducir el orden. De esta forma resulta fácil resolver ecuaciones de segundo orden que quedan reducidas a ecuaciones lineales de primer orden; además en este caso las funciones $y_1(x)$ e $y_2(x) = z(x)\cdot y_1(x)$ son linealmente independientes y por tanto forman un conjunto fundamental de soluciones.

10.4.2. Método de variación de las constantes

El método de ***variación de las constantes*** o método de ***variación de parámetros*** se emplea para resolver una ecuación lineal no homogénea de orden *n*. Consiste en obtener primero la solución general de la ecuación homogénea y buscar a continuación una solución de la ecuación completa que tenga la forma de la solución general de la ecuación homogénea pero considerando las constantes como funciones a determinar.

Sea $L(y) = G(x)$, con $L(y) = y^{n)} + P_1(x)\cdot y^{n-1)} + \ldots + P_{n-1}(x)\cdot y' + P_n(x)\cdot y$, la ecuación no homogénea que se quiere resolver y sea $\psi_H(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x)$ la solución general de la ecuación homogénea asociada en el intervalo (a, b). Se supone que una solución particular de la ecuación completa es de la forma $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} v_k(x) y_k(x)$, siendo $v_k(x)$ funciones que hay que determinar. Para ello es necesario imponer *n* condiciones.

Al derivar la expresión anterior se obtiene:

$$\varphi'(x) = \sum_{k=1}^{n} v'_k(x) y_k(x) + \sum_{k=1}^{n} v_k(x) y'_k(x),$$

si se impone la condición $\sum_{k=1}^{n} v'_k(x) y_k(x) = 0$ resulta:

$$\varphi'(x) = \sum_{k=1}^{n} v_k(x) y'_k(x).$$

Derivando de nuevo esta expresión:

$$\varphi''(x) = \sum_{k=1}^{n} v'_k(x) y'_k(x) + \sum_{k=1}^{n} v_k(x) y''_k(x)$$

y si se impone de nuevo la condición $\sum_{k=1}^{n} v'_k(x) y'_k(x) = 0$ se obtiene:

$$\varphi''(x) = \sum_{k=1}^{n} v_k(x) y''_k(x).$$

Se repite este proceso hasta la derivada de orden *n* con lo que se tiene que:

$$\varphi^{n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} v'_k(x) y_k^{n-1)}(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k(x) y_k^{n)}(x),$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$L(\varphi) = \varphi^{n} + P_1 \cdot \varphi^{n-1} + \ldots + P_{n-1} \cdot \varphi' + P_n \cdot \varphi = G(x) \Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^{n} v'_k(x) y_k^{n-1)}(x) + \sum_{k=1}^{n} v_k y_k^{n)} + P_1 \cdot \sum_{k=1}^{n} v_k y_k^{n-1)} + \ldots + P_{n-1} \cdot \sum_{k=1}^{n} v_k y'_k + P_n \cdot \sum_{k=1}^{n} v_k y_k =$$

$$\sum_{k=1}^{n} v'_k(x) y_k^{n-1)}(x) + \sum_{k=1}^{n} v_k (y_k^{n)} + P_1 \cdot y_k^{n-1)} + \ldots + P_{n-1} \cdot y_k' + P_n \cdot y_k) = G(x).$$

y por tanto:

$$\sum_{k=1}^{n} v'_k(x) y_k^{n-1)}(x) = G(x)$$

Si se pueden encontrar n funciones $v_1(x)$, $v_2(x)$, ..., $v_n(x)$ que verifiquen las n condiciones impuestas, entonces φ es una solución particular de la ecuación completa.

Las funciones $v'_1(x)$, $v'_2(x)$, ..., $v'_n(x)$ se obtienen, por tanto, como solución del sistema:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} v'_k(x) y_k(x) = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} v'_k(x) y'_k(x) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \sum_{k=1}^{n} v'_k(x) y_k^{n-1)}(x) = G(x). \end{cases}$$

En este sistema el determinante de los coeficientes de las incógnitas es el wronskiano W[y_1, y_2, ..., y_n](x), que por el *corolario 10.2.6* no se anula en ningún punto del intervalo (a, b). Por lo tanto tiene solución única y aplicando la regla de Cramer se obtiene que $v'_k = \frac{W_k}{W}$, $1 \le k \le n$, donde W_k es el determinante que se obtiene del wronskiano sustituyendo la columna k por (0, 0, ..., 0, G).

Al integrar se tiene que $v_k(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{W_k(t)}{W(t)} dt$, siendo x_0 un punto del intervalo (a, b). Sustituyendo se obtiene una solución particular de la ecuación lineal no homogénea $\varphi_p(x) = \sum_{k=1}^{n}\left(\int_{x_0}^{x}\frac{W_k(t)}{W(t)}dt\right)y_k(x)$. Por el *teorema 10.2.11* la solución general de la ecuación completa φ_g se puede expresar por $\varphi_g = \psi_H + \varphi_p$ es decir, la solución general de la ecuación homogénea asociada más una solución particular de la completa.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 10.4.1: Resolver la ecuación diferencial $x \cdot y'' + 2y' + x \cdot y = 0$, $x > 0$, sabiendo que $y_1 = \frac{senx}{x}$ es una solución particular.

Para calcular una solución linealmente independiente de y_1 se busca una segunda solución de la forma $y_2(x) = \frac{senx}{x} \cdot z(x)$. Entonces $y_2' = y_1' \cdot z + y_1 \cdot z'$ e $y_2'' = y_1'' \cdot z + 2y_1' \cdot z' + y_1 \cdot z''$.

Se sustituye en la ecuación:

$x(y_1'' \cdot z + 2y_1' \cdot z' + y_1 \cdot z'') + 2(y_1' \cdot z + y_1 \cdot z') + x \cdot y_1 \cdot z = 0$

y se ordenan términos:

$$z'' \cdot x \cdot y_1 + z' \cdot (2x \cdot y_1' + 2y_1) + z \cdot (x \cdot y_1'' + 2y_1' + x \cdot y_1) = 0.$$

Al ser la función y_1 una solución particular de $x \cdot y_1'' + 2y_1' + x \cdot y_1 = 0$, se verifica que el término que multiplica a z es igual a cero y se tiene: $z'' \cdot x \cdot y_1 + z' \cdot (2x \cdot y_1' + 2y_1) = 0$.

Como $y_1 = \frac{senx}{x} \Rightarrow x \cdot y_1 = sen\, x \Rightarrow$

$$2x\cdot y_1' + 2y_1 = 2x\left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\right) + 2\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 2\cos x.$$

La ecuación queda de la forma $\operatorname{sen} x \cdot z'' + 2\cos x \cdot z' = 0$ que se puede expresar por $\frac{z''}{z'} + \frac{2\cos x}{\operatorname{sen} x} = 0$, e integrando $\ln|z'| + 2\ln|\operatorname{sen} x| = K$, luego $z'\cdot \operatorname{sen}^2 x = C_1$ y por lo tanto $z = -C_1\cdot \operatorname{cotg} x + C_2$.

Se tiene entonces que $y_2 = \frac{\cos x}{x}$ y la solución general de la ecuación diferencial viene expresada por:

$$y = C_1\frac{\cos x}{x} + C_2\frac{\operatorname{sen} x}{x},\ x > 0.$$

Ejemplo 10.4.2: Resolver la ecuación diferencial $y'' + y = \operatorname{cosec} x$ sabiendo que la solución general de la ecuación homogénea es:

$$\psi_H(x) = A\cdot \cos x + B\cdot \operatorname{sen} x.$$

Se comprueba primero la solución general de la ecuación homogénea $\psi(x) = A\cdot \cos x + B\cdot \operatorname{sen} x$ y se busca una solución particular de la ecuación completa de la forma $\varphi_p(x) = A(x)\cdot \cos x + B(x)\cdot \operatorname{sen} x$. Para determinar las funciones $A(x)$ y $B(x)$ se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} A'(x)\cdot \cos x + B'(x)\cdot \operatorname{sen} x = 0 \\ -A'(x)\cdot \operatorname{sen} x + B'(x)\cdot \cos x = \operatorname{cosec} x \end{cases}$$

Se obtiene que $A'(x) = -1$ y $B'(x) = \operatorname{cotg} x$; integrando, $A(x) = -x + C_1$ y $B(x) = \ln|\operatorname{sen} x| + C_2$. Una solución particular es:

$$\varphi_p(x) = -x\cdot \cos x + \operatorname{sen} x\cdot \ln|\operatorname{sen} x|.$$

La solución general de la ecuación no homogénea es:

$$\varphi(x) = (-x + C_1)\cdot \cos x + (\ln |\operatorname{sen} x| + C_2)\cdot \operatorname{sen} x.$$

Ejemplo 10.4.3: Calcular la solución general de la ecuación diferencial:

$x^2\cdot y'' - 6x^2\cdot y' + 9x^2\cdot y = e^{3x}$, $x > 0$.

Se calcula primero la solución general de la ecuación homogénea $\psi_H(x) = Ae^{3x} + Bx\cdot e^{3x}$, y se busca una solución particular de la ecuación completa de la forma $\varphi_p(x) = A(x)\cdot e^{3x} + B(x)\cdot x\cdot e^{3x}$. Para determinar las funciones $A(x)$ y $B(x)$ se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} A'(x)\cdot e^{3x} + B'(x)\cdot x\cdot e^{3x} = 0 \\ A'(x)\cdot 3e^{3x} + B'(x)\cdot [e^{3x} + x\cdot 3e^{3x}] = e^{3x}\cdot x^{-2}. \end{cases}$$

Se observa que el coeficiente de y'' debe ser 1, por lo que $G(x) = e^{3x}\cdot x^{-2}$

El sistema tiene como solución $A'(x) = -x^{-1}$ y $B'(x) = x^{-2}$, e integrando, $A(x) = -\ln|x| + C_1$ y $B(x) = -x^{-1} + C_2$, por tanto la solución general de la ecuación no homogénea es: $\varphi(x) = (-\ln|x| + C_1)\cdot e^{3x} + (-x^{-1} + C_2)\cdot x\cdot e^{3x}$, $x > 0$.

Ejercicios

10.11. Resolver la ecuación $x\cdot y'' - (x + 1)\cdot y' + y = 0$, $x > 0$, buscando previamente una solución particular de tipo exponencial.

10.12. Resolver la ecuación $x^2\cdot y'' + 2x\cdot y' - 6y = 0$, $x > 0$, buscando previamente una solución particular de tipo $y = x^r$.

10.13. Calcular, utilizando el método de variación de las constantes, la solución general de las siguientes ecuaciones:

a) $y'' + y = \sec x$.

b) $y''' + y' = \operatorname{cosec} x$.

c) $y'' + 4y = tg\ 2x$.

d) $y'' + 2y' + y = e^{-x} \cdot ln\ x$.

10.14. Encontrar la solución general para cada una de las siguientes ecuaciones:

a. $(D^2 - 4D + 3)(y) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$

b. $(D^2 - 1)(y) = \dfrac{1}{(1+e^{-x})^2}$.

10.4.3. Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes constantes

Los métodos que se estudian a continuación están indicados, especialmente, para resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, pues con ellos generalmente resulta más fácil obtener una solución particular de la ecuación no homogénea que con el método general de variación de las constantes.

Método del anulador

Se considera la ecuación diferencial $L(y) = G(x)$, donde el operador L tiene coeficientes constantes. El método consiste en encontrar un operador A con coeficientes constantes que anule la función G, es decir, $A(G) = 0$. De este modo, aplicando el operador A a la ecuación dada, se obtiene $A \cdot L(y) = A(G) = 0$ de forma que las soluciones de $L(y) = G(x)$ también son soluciones de la ecuación homogénea $A \cdot L(y) = 0$. Se resuelve esta ecuación y entre sus soluciones se elige una que satisfaga $L(y) = G(x)$. Conocida una solución particular de la ecuación completa, φ_p, por el *teorema 10.2.11*, la solución general, φ_g, de esta ecuación se expresa por $\varphi_g = \varphi_p + \psi_H$, siendo ψ_H la solución general de la ecuación homogénea asociada.

Se puede aplicar el método del anulador cuando se encuentre un operador con coeficientes constantes que anule el término $G(x)$, lo que sólo es posible cuando éste es de la forma: $x^m \cdot e^{\alpha x}$, $x^m \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$; $x^m \cdot e^{\alpha x} \cdot \operatorname{sen} \beta x$.

A continuación se incluye una lista de posibles funciones y de su correspondiente anulador:

Función $G(x)$	Operador anulador
$G(x) = x^{m-1}$	D^m
$G(x) = e^{\alpha x}$	$D - \alpha$
$G(x) = x^{m-1} \cdot e^{\alpha x}$	$(D - \alpha)^m$
$G_1(x) = \cos \beta x$; $G_2(x) = \operatorname{sen} \beta x$	$D^2 + \beta^2$
$G_1(x) = x^{m-1} \cdot \cos \beta x$; $G_2(x) = x^{m-1} \cdot \operatorname{sen} \beta x$	$(D^2 + \beta^2)^m$
$G_1(x) = e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$; $G_2(x) = e^{\alpha x} \cdot \operatorname{sen} \beta x$	$(D - \alpha)^2 + \beta^2$
$G_1(x) = x^{m-1} \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x$; $G_2(x) = x^{m-1} \cdot e^{\alpha x} \cdot \operatorname{sen} \beta x$	$((D - \alpha)^2 + \beta^2)^m$

Método de los coeficientes indeterminados

Se considera la ecuación diferencial $y^{n)} + p_1 \cdot y^{n-1)} + ... + p_{n-1} \cdot y' + p_n \cdot y =$

$G(x)$ donde p_1, p_2, ..., p_n son constantes y $G(x)$ una función continua en un intervalo de la recta real. Como en el método anterior, por aplicación del *teorema 4.2.11*, obtener la solución general de esta ecuación se reduce a encontrar una solución particular de la ecuación y la solución general de la ecuación homogénea asociada y sólo se puede aplicar este método cuando la función $G(x)$ sea de la forma:

$$G(x) = e^{\alpha x}\cdot(Q_m(x)\cdot cos\ \beta x + R_r(x)\cdot sen\ \beta x),$$

siendo $Q_m(x)$ y $R_r(x)$ polinomios de grado m y r respectivamente, o bien cuando la función G sea una combinación lineal de este tipo de funciones.

Si $G(x) = e^{\alpha x}\cdot(Q_m(x)\cdot cos\ \beta x + R_r(x)\cdot sen\ \beta x)$, una solución particular φ_p de la ecuación diferencial completa es:

$$\varphi_p = x^s\cdot e^{\alpha x}\cdot(S_k(x)\cdot cos\ \beta x + T_k(x)\cdot sen\ \beta x),$$

siendo $k = \max(m, r)$; $S_k(x)$ y $T_k(x)$ polinomios de grado k de coeficientes indeterminados que hay que calcular y s el orden de multiplicidad de la raíz de la ecuación característica $\lambda = \alpha \pm i\beta$ de la ecuación homogénea. En particular cuando las raíces no son de la forma $\alpha \pm i\beta$, entonces s toma el valor 0.

Se observa que, en la práctica, este método coincide con el método del anulador.

Para facilitar el cálculo de la solución particular según las distintas formas de G se resume su expresión en la siguiente tabla.

Función $G(x)$	**Raíces de la ecuación característica**	**Solución particular** $k = \max(m, r)$

$Q_m(x)$	$\lambda = 0$ no es raíz de la ecuación característica	$S_m(x)$
	$\lambda = 0$ es raíz de orden s	$x^s \cdot S_m(x)$
$Q_m(x) \cdot e^{\alpha x}$ α real	$\lambda = \alpha$ no es raíz	$S_m(x) \cdot e^{\alpha x}$
	$\lambda = \alpha$ es raíz de orden s	$x^s \cdot S_m(x) \cdot e^{\alpha x}$
$Q_m(x) \cdot cos\beta x$ + $R_r(x) \cdot sen\beta x$	$\lambda = \pm\beta i$ no es raíz	$S_k(x) \cdot cos\beta x + T_k(x) \cdot sen\beta x$
	$\lambda = \pm\beta i$ es raíz de orden s	$x^s \cdot (S_k(x) \cdot cos\beta x + T_k(x) \cdot sen\beta x)$
$e^{\alpha x} \cdot (Q_m(x) \cdot cos\beta x$ + $R_r(x) \cdot sen\beta x)$	$\lambda = \alpha \pm \beta i$ no es raíz	$(S_k(x) \cdot cos\beta x + T_k(x) \cdot sen\beta x) \cdot e^{\alpha x}$
	$\lambda = \alpha \pm \beta i$ es raíz de orden s	$x^s \cdot (S_k(x) \cdot cos\beta x + T_k(x) \cdot sen\beta x) \cdot e^{\alpha x}$

En ocasiones cuando en la ecuación diferencial L(y) = $G(x)$, la función $G(x)$ contiene las funciones trigonométricas *sen* βx, *cos* βx se puede expresar fácilmente como una función exponencial compleja. Considerar y resolver la ecuación en el plano complejo muchas veces simplifica los cálculos como se observa en el *ejemplo 10.4.9*.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 10.4.4: Calcular una solución particular de la ecuación diferencial lineal $(D^4 - 16)(y) = x^2 + x + 1$, buscando un polinomio anulador.

El operador D^3 anula la ecuación de forma que $D^3(D^4 - 16)(y) = 0$. Las soluciones de la ecuación característica son $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 2$, $\lambda_5 = -2$, λ_6

$= 2i$, $\lambda_7 = -2i$ y la solución general es de la forma:

$$\varphi(x) = C_1 + C_2\cdot x + C_3\cdot x^2 + C_4\cdot e^{2x} + C_5\cdot e^{-2x} + C_7\cdot \cos 2x + C_8\cdot \mathrm{sen}\ 2x,$$

como los cuatro últimos términos son anulados por $D^4 - 16$ por ser soluciones de la ecuación homogénea, nuestro objetivo es encontrar C_1, C_2, C_3, tal que $(D^4 - 16)\cdot(C_1 + C_2\cdot x + C_3\cdot x^2) = x^2 + x + 1$, por lo que $-16C_1 - 16C_2x - 16C_3x^2 = x^2 + x + 1$, así $C_3 = \frac{-1}{16}$, $C_2 = \frac{-1}{16}$, $C_1 = \frac{-1}{16}$ y $\varphi_p(x) = \frac{-1}{16}x^2 - \frac{1}{16}x - \frac{1}{16}$.

Ejemplo 10.4.5: Calcular la solución de la ecuación diferencial lineal:

$$(D^4 - 16)(y) = x^2 + x + 1$$

mediante el método de coeficientes indeterminados.

Las raíces de la ecuación característica son: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 2i$, $\lambda_4 = -2i$ y la solución general de la ecuación homogénea asociada es de la forma $\varphi_H(x) = C_1\cdot e^{2x} + C_2\cdot e^{-2x} + C_3\cdot \cos 2x + C_4\cdot \mathrm{sen}\ 2x$. Se busca una solución particular "parecida" a $G(x) = x^2 + x + 1$, $\varphi_P(x) = Ax^2 + Bx + C$, e imponiendo que sea solución de la ecuación completa se obtiene que $\varphi_p(x) = \frac{-1}{16}x^2 - \frac{1}{16}x - \frac{1}{16}$, por lo que solución general pedida es:

$$\varphi(x) = C_1\cdot e^{2x} + C_2\cdot e^{-2x} + C_3\cdot \cos 2x + C_4\cdot \mathrm{sen}\ 2x + \frac{-1}{16}x^2 - \frac{1}{16}x - \frac{1}{16}.$$

Ejemplo 10.4.6: Calcular la solución general de la ecuación diferencial lineal $(D^2 - 3D + 2)(y) = e^x$, buscando un polinomio anulador.

El operador $(D - 1)$ anula a e^x de modo que $(D - 1)\cdot(D^2 - 3D + 2)(y) = 0$, los autovalores son $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, y la solución general de esta ecuación es de la forma $\varphi(x) = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^x + C_3 \cdot x \cdot e^x$. Como los dos primeros términos son anulados por $(D^2 - 3D + 2)$, es suficiente determinar C_3 talque $(D^2 - 3D + 2)(C_3 \cdot x \cdot e^x) = e^x$. Derivando se obtiene $C_3 = -1$ y la solución general de la ecuación es: $\varphi_g(x) = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^x - x \cdot e^x$.

Si se utilizara el método de los coeficientes indeterminados, al ser $\lambda = 1$ raíz de la ecuación característica no se podría probar una solución particular $\varphi(x) = Ae^x$, sino que se probaría con $\varphi(x) = Ax \cdot e^x$, obteniéndose que $A = -1$.

Ejemplo 10.4.7: Calcular la solución general de la ecuación diferencial líneal $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$, y encontrar la solución particular que verifica las condiciones iniciales $y(0) = 0$; $y'(0) = y''(0) = 1$.

Se calcula primero una solución de la ecuación diferencial lineal homogénea asociada $\psi_H(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot \cos x + C_3 \cdot \operatorname{sen} x$; como $\lambda = 0$ no es un autovalor, la solución particular φ_p es un polinomio de grado dos:

$\varphi_p(x) = Ax^2 + Bx + C$, cuyos coeficientes A, B, C hay que determinar. Se sustituye este polinomio y sus derivadas en la ecuación diferencial:

$-(2A) + (2Ax + B) - (Ax^2 + Bx + C) = x^2 + x.$

Se identifican coeficientes:

$$\begin{cases} -A = 1 \\ 2A - B = 1 \\ -2A + B - C = 0 \end{cases}$$

Se resuelve el sistema y se tiene que $A = -1$; $B = -3$; $C = -1$ por lo que:

$\varphi_p(x) = -x^2 - 3x - 1$

y por tanto la solución general es:

$$\varphi_g(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot \cos x + C_3 \cdot \operatorname{sen} x - x^2 - 3x - 1.$$

Para obtener la solución particular que verifica que $y(0) = 0$; $y'(0) = y''(0) = 1$, se calcula $\varphi_g(0) = C_1 + C_2 - 1$, $\varphi'_g(0) = C_1 + C_3 - 3$, $\varphi''_g(0) = C_1 - C_2 - 2$ y resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - 1 = 0 \\ C_1 + C_3 - 3 = 1 \\ C_1 - C_2 - 2 = 1 \end{cases}$$

se obtiene $C_1 = 2$, $C_2 = -1$ y $C_3 = 2$ y por tanto la solución particular que verifica las condiciones iniciales es:

$$\varphi(x) = 2e^x - \cos x + 2\operatorname{sen} x - x^2 - 3x - 1.$$

*Ejemplo 10.4.8: R*esolver la ecuación $y''' - y'' = 12x^2 + 6x$.

Se calcula la solución general de la ecuación homogénea asociada: $\psi_H(x) = C_1 + C_2x + C_3e^x$, como $\lambda = 0$ es autovalor doble, la solución particular φ_p es un polinomio de grado cuatro de la forma: $\varphi_p(x) = x^2 \cdot (Ax^2 + Bx + C) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$, cuyos coeficientes A, B, C hay que determinar. Sustituyendo este polinomio y sus derivadas en la ecuación diferencial:

$$24A \cdot x + 6B - (12A \cdot x^2 + 6B \cdot x + 2C) = 12x^2 + 6x.$$

Identificando coeficientes se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -12A = 12 \\ 24A - 6B = 6 \\ 6B - 2C = 0 \end{cases}$$

de donde resulta: $A = -1$; $B = -5$ y $C = -15$. Por lo tanto la solución particular es:

$$\varphi_p(x) = -x^4 - 5x^3 - 15x^2,$$

y la solución general:

$$\varphi_g(x) = C_1 + C_2\,x + C_3\,e^x - x^4 - 5x^3 - 15x^2.$$

Ejemplo 10.4.9: Resolver la ecuación diferencial $y'' + y = x \cdot sen\ x$.

Los autovalores son $\lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = -i$, y la solución general de la ecuación homogénea asociada tiene la forma $\psi_H(x) = C_1 cos\ x + C_2 sen\ x$; como $\pm i$ son autovalores simples, una solución particular de la ecuación completa φ_p es de la forma $\varphi_p(x) = x\cdot[(Ax + B)\cdot cos\ x + (Cx + D)\cdot sen\ x]$, en la que hay cuatro coeficientes por determinar.

Para simplificar se considera la ecuación de variable compleja con coeficientes reales $z'' + z = x\cdot e^{ix}$. Al ser $x\cdot sen\ x$ la parte imaginaria de $x\cdot e^{ix}$, entonces la parte imaginaria de una solución de la ecuación de variable compleja es una solución para la ecuación de variable real.

Sea $z_p = (Ax + B)\cdot x\cdot e^{ix} = (Ax^2 + Bx)\cdot e^{ix}$ una solución particular de la ecuación de variable compleja; sustituyendo para calcular A y B se tiene que:

$(2A + 4Axi + 2Bi)\cdot e^{ix} = x\cdot e^{ix}$ y por tanto $A = \frac{-i}{4}$ y $B = \frac{1}{4}$, por lo que:

$$z_p = \frac{-i.x^2+x}{4}(cosx+isenx) = \frac{xcosx+x^2senx}{4} + i\frac{xsenx-x^2cosx}{4}$$

de donde resulta que una solución particular φ_p de la ecuación inicial es:

$$\varphi_p(x) = \frac{xsenx-x^2cosx}{4}$$

y la solución general:

$$\varphi_g(x) = C_1 cos\ x + C_2 sen\ x + \frac{x sen x - x^2 cos x}{4}$$

Ejercicios

10.15. Encontrar la solución general para cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $(D - 1)(D - 2)^2(y) = e^{2x}$.

b) $(D^2 - 1)(y) = 4x \cdot e^x$.

c) $(D^3 - 4\ D)(y) = 4$.

10.16. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y'' - 6y' + 9y = e^{2x}$.

b) $y'' - y = sen^2 x$. (*Ayuda*: Expresar $sen^2 x$ en función del ángulo $2x$).

c) $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$.

d) $y'' - 6y' + 9y = 25e^x \cdot sen\ x$.

10.17. Resolver las siguientes ecuaciones, planteando la correspondiente ecuación de variable compleja

a) $y'' + y = x \cdot cos\ x$

b) $y'' + 4y = sen\ 2x$

10.4.4. Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes no constantes

No existen métodos generales para resolver una ecuación diferencial lineal con coeficientes variables, pero hay diversos procedimientos, utilizando distintos cambios de variable, que permiten rebajar el orden de la ecuación. Algunos de estos procedimientos coinciden con los que se estudiaban en el *capítulo 9* para reducir el orden de una ecuación diferencial de orden *n*. Otra forma de reducir el orden de una ecuación de este tipo es utilizar el principio de D'Alembert que se estudió en el *apartado 10.4.1*, pero esto supone que se conoce una solución particular. Por otra parte existen algunas ecuaciones especiales, como la ecuación de Cauchy-Euler, a las que se puede aplicar un método general de resolución.

Para utilizar el método de variación de las constantes, aplicable a una ecuación lineal con coeficientes variables, es necesario conocer un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada, lo que no siempre es fácil cuando se trata de resolver una ecuación diferencial lineal con coeficientes variables.

Ecuación de Cauchy-Euler

Definición 10.4.1:

Se denomina **ecuación de *Cauchy-Euler***, o ecuación equidimensional, a una ecuación diferencial lineal de la forma:

$$p_0 \cdot x^n \cdot y^{n)} + p_1 \cdot x^{n-1} \cdot y^{n-1)} + \ldots + p_{n-1} \cdot x \cdot y' + p_n \cdot y = g(x),$$

con $p_0, p_1, ..., p_n \in \mathfrak{R}$ y $x \neq 0$.

Constituye una clase de ecuaciones con coeficientes variables cuya solución siempre puede escribirse en términos de funciones elementales.

Se caracteriza porque el grado del exponente de x coincide con el orden de la derivada. Se resuelve en primer lugar la ecuación homogénea asociada y luego se obtiene una solución particular de la completa.

Ecuación homogénea:

La ecuación: $p_0 \cdot x^n \cdot y^{n)} + p_1 \cdot x^{n-1} \cdot y^{n-1)} + ... + p_{n-1} \cdot x \cdot y' + p_n \cdot y = 0$, $x \neq 0$, con p_0, p_1, p_2, ..., p_n constantes, se denomina ecuación homogénea de Cauchy-Euler.

Se observa que el coeficiente de $y^{n)}$ es $p_n \cdot x^n$, que se anula en $x = 0$. Al dividir por él la ecuación diferencial para despejar $y^{n)}$ las funciones coeficientes resultantes no son continuas en $x = 0$, por lo que se calcula una solución en el intervalo $(0, +\infty)$, o en el intervalo $(-\infty, 0)$.

En la resolución se pueden utilizar dos métodos que resultan coincidentes: hacer el cambio de variable $x = e^t$ o buscar una solución de la forma $y = x^r$, para algún valor de r.

Método 1:

Realizando el cambio de variable $x = e^t$ estas ecuaciones se reducen a ecuaciones lineales homogéneas de coeficientes constantes. La ecuación, con este cambio de variable, queda de la forma:

$$q_0 \frac{d^n y}{dt^n} + q_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^n} + ... + q_{n-1} \frac{dy}{dt} + q_n y = 0 \text{ con } q_1, q_2, ..., q_n \text{ constantes.}$$

Método 2:

Este método consiste en buscar una solución de la ecuación del tipo $y = x^r$, siendo r un número por determinar.

En este caso $y' = r\cdot x^{r-1}$; $y'' = r\cdot(r - 1)\cdot x^{r-2}$; ..., $y^{n)} = r\cdot(r - 1) \ldots (r - n + 1)\cdot x^{r-n}$.

Al sustituir esta función y sus derivadas en la ecuación se tiene $x^r(q(r)) = 0$ siendo $q(r)$ un polinomio en r. Ya que $x^r \neq 0$ se tiene que $q(r)$ debe ser 0. Las soluciones de esta ecuación permiten obtener un conjunto fundamental de soluciones.

Ecuaciones completas

Sean p_0, p_1, p_2, ..., p_n constantes. Las ecuaciones de Cauchy-Euler completas del tipo:

$p_0\cdot x^n\cdot y^{n)} + p_1\cdot x^{n-1}\cdot y^{n-1)} + \ldots + p_{n-1}\cdot x\cdot y' + p_n\cdot y = x^{\alpha}\cdot Q_m(lnx)$, $x \neq 0$, siendo $Q_m(x)$ un polinomio de grado m, se pueden resolver por el método de los coeficientes indeterminados de forma similar a como se resolvían las ecuaciones no homogéneas de coeficientes constantes de la forma $e^{\alpha x}Q_m(x)$. En este caso, una solución particular es del tipo $\varphi_p(x) = x^{\alpha}\cdot R_m(ln|x|)$, siendo $R_m(x)$ un polinomio de grado m.

Ecuación de Cauchy-Euler con cambio de variable

Un cambio de variable similar al que ha resuelto la ecuación de Cauchy-Euler se puede utilizar para resolver la siguiente ecuación homogénea:

$$p_0\cdot(ax + b)^n\cdot y^{n)} + p_1\cdot(ax + b)^{n-1}\cdot y^{n-1)} + \ldots + p_{n-1}\cdot(ax + b)\cdot y' + p_n\cdot y = 0,\ ax + b \neq 0.$$

Buscando soluciones de la forma $\varphi(x) = (ax + b)^r$, o haciendo el cambio $ax + b = e^t$, una ecuación de este tipo se transforma en una ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes.

Es evidente que la ecuación de Cauchy-Euler es un caso particular de esta ecuación cuando $a = 1$ y $b = 0$

Cambios de variable

Ecuaciones en las que falta la función incógnita

Si la ecuación es de la forma $y^{n)}(x) + P_1(x)\cdot y^{n-1)}(x) + ... + P_{n-1}(x)\cdot y'(x) = G(x)$, el cambio de variable $y'(x) = u(x)$, reduce el orden de la ecuación en una unidad.

Efectivamente si $\frac{dy}{dx} = u$, entonces $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{du}{dx}$ y $\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}$ y la ecuación que resulta $u^{n-1)}(x) + P_1(x)\cdot u^{n-2)}(x) + ... + P_{n-1}(x)\cdot u(x) = G(x)$ es de orden $n - 1$.

Análogamente si en la ecuación diferencial falta la función y y sus derivadas hasta el orden k, es decir, se puede expresar de la forma:

$y^{n)}(x) + P_1(x)\cdot y^{n-1)}(x) + ... + P_{n-k}(x)\cdot y^{k)}(x) = G(x)$,

realizando el cambio de variable $\frac{d^ky}{dx^k} = u$ se reduce el orden de la ecuación en k unidades.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 10.4.10: Resolver la ecuación de Cauchy-Euler:

$$x^2 \cdot y'' + x \cdot y' - y = 0, \ x \neq 0.$$

Haciendo el cambio $x = e^t$ se tiene que:

$$y' = \frac{dy}{dt} e^{-t}; \qquad y'' = \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) e^{-2t}.$$

Sustituyendo, la ecuación queda de la forma: $\frac{d^2 y}{dt^2} - y = 0$.

La solución general de esta ecuación es: $\phi(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$. Deshaciendo el cambio se obtiene la solución general de la ecuación inicial:

$$\psi(x) = C_1 x + C_2 x^{-1}.$$

Para resolver por el otro método la ecuación anterior $x^2 \cdot y'' + x \cdot y' - y = 0$, se sustituye en la ecuación diferencial la solución $y = x^r$. Se tiene que $x^2 \cdot r \cdot (r - 1) x^{r-2} + x \cdot r \cdot x^{r-1} - x^r = 0$ y por lo tanto $x^r \cdot (r^2 - 1) = 0$, como $x^r \neq 0$ se tiene que $r^2 - 1 = 0$, y la solución es $r = 1$ y $r = -1$. Las funciones $y_1 = x$; $y_2 = x^{-1}$ forman un conjunto fundamental de soluciones, de las que se obtiene la solución general:

$$\psi(x) = C_1 x + C_2 x^{-1}.$$

Ejemplo 10.4.11: Integrar la ecuación $x^2 \cdot y'' - x \cdot y' - 3y = -16x^{-1} \cdot \ln x$, $x > 0$.

Se resuelve primero la ecuación diferencial homogénea asociada buscando una solución del tipo $y = x^r$. Sustituyendo $y' = r \cdot x^{r-1}$; $y'' = r \cdot (r - 1) \cdot x^{r-2}$ se tiene que $x^r \cdot (r^2 - 2r - 3) = 0$, de raíces $r = 3$ y $r = -1$. Por tanto la solución general de la ecuación diferencial homogénea es $\psi(x) = C_1x^3 + C_2x^{-1}$.

A continuación se busca una solución particular de la ecuación completa. Como $\lambda = -1$ es un autovalor simple, se tiene que:

$\varphi_p(x) = x^{-1}\cdot lnx\cdot(A\cdot ln\, x + B) = x^{-1}\cdot(A\cdot ln^2x + B\cdot ln\, x)$,

$\varphi'_p(x) = x^{-2}\cdot(-A\cdot ln^2x + (2A - B)\cdot ln\, x + B)$,

$\varphi''_p(x) = x^{-3}\cdot(2A\cdot ln^2\, x + (2B - 6A)\cdot ln\, x - 3B + 2A)$,

y al sustituirlos en la ecuación:

$x^{-1}\cdot(-8A\cdot ln\, x - 4B + 2A) = -16x^{-1}\cdot ln\, x$

resulta que $A = 2$ y $B = 1$ y la solución particular buscada es:

$\varphi_p(x) = x^{-1}\cdot(2ln^2\, x + ln\, x)$.

Por lo tanto la solución general es:

$\varphi_g(x) = x^{-1}\cdot(C_1\cdot x^4 + C_2 + 2ln^2x + ln\, x)$.

Ejemplo 10.4.12: Resolver la ecuación diferencial $x\cdot y'' - 2y' = x$.

Al realizar el cambio de variable $u = y'$ se tiene que $u' = y''$, que se sustituye en la ecuación y se obtiene $x\cdot u' - 2u = x$, ecuación lineal de primer orden. La solución general es $u(x) = -x + C_1\cdot x^2$. Se deshace el cambio: $y'(x) = -x + C_1\cdot x^2$. Se integra de nuevo para obtener la solución general:

$$\varphi_g(x) = -\frac{x^2}{2} + C_1\frac{x^3}{3} + C_2.$$

Ejemplo 10.4.13: Resolver la ecuación diferencial $x\cdot y''' - 2y'' = 0$.

Realizando el cambio de variable $y'' = u$, la ecuación que resulta es lineal de primer orden $x\cdot u' - 2u = 0$, que tiene como solución general $u(x) = k_1x^2$.

Deshaciendo el cambio $y'(x) = k_1\frac{x^3}{3}+k_2$ e $y(x) = k_1\frac{x^4}{12}+k_2x+k_3$, es decir:

$$\varphi_g(x) = C_1\cdot x^4 + C_2\cdot x + C_3.$$

Ejercicios

10.18. Resolver las siguientes ecuaciones.

a) $x^2\cdot y'' - x\cdot y' + 2y = x\cdot \ln x$

b) $x^2\cdot y'' - x\cdot y' + y = 2x$

c) $x^2\cdot y'' - 2x\cdot y' + 2y = x^2 - 2x + 2$.

10.19. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:

a) $(1 + x^2)\cdot y'' + 2x\cdot y' = 2x^{-3}$

b) $x\cdot y'' - y' = -2x^{-1} - \ln x$

c) $(1 + 2x)\cdot y''' + 4x\cdot y'' + (2x - 1)\cdot y' = e^{-x}$.

d) $x^2\cdot y'' - x\cdot y' - 3y = 5x^4$.

10.20. Calcular la solución general de las siguientes ecuaciones conocida una solución particular.

a) $x^2\cdot(\ln x - 1)\cdot y'' - x\cdot y' + y = 0$, siendo $y_1(x) = x$, una solución particular.

b) $(2x + 1)\cdot y'' + (4x - 2)\cdot y' - 8y = 0$ siendo $y_1(x) = e^{mx}$, una solución particular.

10.5. DESARROLLOS EN SERIES DE POTENCIAS

En el apartado anterior se han estudiado algunos métodos para resolver una ecuación lineal de orden *n* con coeficientes variables que se pueden aplicar cuando las ecuaciones diferenciales son de una forma específica. Pero existen muchas ecuaciones diferenciales que aparecen en las aplicaciones que no se ajustan a los modelos anteriores y es preciso para resolverlos aplicar un método general que consiste en buscar soluciones linealmente independientes expresadas mediante una serie de potencias. El procedimiento que se utiliza para resolverlas es similar al de los coeficientes indeterminados aplicado a una serie infinita. El estudio que se realiza a continuación, centrado en las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, trata, esencialmente, de su desarrollo y de las condiciones necesarias para poder aplicarlo.

10.5.1. Soluciones en torno a puntos ordinarios

Definición 10.5.1:

Se dice que x_0 es un ***punto ordinario*** de la ecuación diferencial lineal:

$$y'' + P(x)\cdot y' + Q(x)\cdot y = 0$$

si $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones analíticas en un entorno del punto x_0, es decir, cada una de ellas se puede expresar como un desarrollo en serie de potencias que converge en un entorno de dicho punto.

Si un punto no es ordinario se denomina ***punto singular***.

En un punto ordinario las soluciones de la ecuación diferencial son también analíticas.

Ecuación de Legendre

Definición 10.5.2:

Se denomina ***ecuación de Legendre*** la que se puede expresar de la forma:

$$(1 - x^2)\cdot y'' - 2x\cdot y' + p\cdot(p + 1)\cdot y = 0, \qquad (10.5.1)$$

siendo p constante.

Las funciones $P(x) = \dfrac{-2x}{1-x^2}$ y $Q(x) = \dfrac{p(p+1)}{1-x^2}$ son analíticas en el origen, que por tanto es un punto ordinario. Se trata de encontrar una serie de potencias de la forma: $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ convergente en un intervalo abierto de la recta real $(-r, r)$, con $0 < r < 1$.

Derivando esta serie de potencias se obtiene:

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \text{ y}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2},$$

por lo tanto:

$$2x\cdot y' = \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2n a_n x^n,$$

$$(1 - x^2)\cdot y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)a_n x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n\right]x^n .$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial se tiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n\right]x^n - \sum_{n=0}^{\infty}2na_n x^n + p\cdot(p+1)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot x^n = 0$$

que se satisface si y sólo si los coeficientes verifican la siguiente ecuación:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + p\cdot(p+1)\cdot a_n = 0,$$

que se puede expresar:

$(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n-p)\cdot(n+1+p)\cdot a_n = 0$, o bien,

$$a_{n+2} = -\frac{(p-n)\cdot(p+n+1)}{(n+1)(n+2)}a_n .$$

Esta expresión permite calcular los términos pares de la serie en función de a_0, en particular se tiene que: $a_2 = -\dfrac{p(p+1)}{1\cdot 2}a_0$,

$$a_4 = -\frac{(p-2)\cdot(p+3)}{3\cdot 4}a_2 = (-1)^2\cdot\frac{p(p+1)(p-2)\cdot(p+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a_0 ,$$

y en general

$$a_{2n} = (-1)^n\cdot\frac{p(p-2)\cdots(p-2n+2)\cdot(p+1)(p+3)\cdots(p+2n-1)}{(2n)!}a_0 .$$

Análogamente se pueden calcular los términos impares en función de a_1 con lo que se obtiene:

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{(p-1)(p-3)\cdots(p-2n+1)\cdot(p+2)(p+4)\cdots(p+2n)}{(2n+1)!} a_1.$$

Se consideran las siguientes funciones:

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{n} (-1)^n \frac{(p-1)(p-3)\cdots(p-2n+1)\cdot(p+2)(p+4)\cdots(p+2n)}{(2n+1)!} x^{2n},$$

$$y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{n} \frac{(p-1)(p-3)\cdots(p-2n+1)\cdot(p+2)(p+4)\cdots(p+2n)}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Se puede demostrar por el criterio del cociente que estas series son convergentes para $|x| < 1$. Además $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son soluciones de la ecuación diferencial (10.5.1) y son linealmente independientes ya que satisfacen las condiciones iniciales:

$y_1(0) = 1$, $y'_1(0) = 0$, $y_2(0) = 0$, $y'_2(0) = 1$.

Por lo tanto la solución general de la ecuación diferencial de Legendre (10.5.1) en el intervalo $(-1, 1)$ está expresada por:

$$\varphi(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x).$$

Si p es 0 o un entero par positivo, $p = 2k$, la serie $y_1(x)$ se convierte en un polinomio de grado $2k$ que sólo contiene potencias pares de x, mientras que en $y_2(x)$ no hay coeficientes nulos. Cuando p es un entero impar positivo es la serie $y_2(x)$ la que se reduce a un polinomio frente a la serie $y_1(x)$ que sigue teniendo infinitos términos no nulos.

Los polinomios obtenidos de esta forma se denominan ***polinomios de Legendre*** y tienen importantes aplicaciones prácticas.

Teorema 10.5.1:

Si $P(x)$, $Q(x)$ son dos funciones desarrollables en serie de potencias en un entorno de un punto x_0, $E(x_0)$, entonces la solución general de la ecuación diferencial: $y'' + P(x)\cdot y' + Q(x)\cdot y = 0$ es $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = k_0\cdot y_1 + k_1\cdot y_2$, donde y_1, y_2 son soluciones de la ecuación diferencial desarrollables en serie de potencias en $E(x_0)$. Además si k_0 y k_1 son números reales existe una única solución de la ecuación en serie de potencias que verifica que $a_0 = k_0$, $a_1 = k_1$ y el resto de los coeficientes se determinan en función de a_0 y a_1.

El radio de convergencia de los desarrollos en serie de y_1 e y_2 es mayor o igual que el mínimo de los radios de convergencia de las funciones $P(x)$ y $Q(x)$.

La demostración de este teorema sigue los mismos pasos que se han utilizado para encontrar la solución de la ecuación de Legendre. Se sustituyen los desarrollos en serie de $P(x)$ y $Q(x)$ en la ecuación diferencial obteniendo los coeficientes a_n de la solución para que se verifique la ecuación. Se obtiene una fórmula recurrente que determina los coeficientes pares a partir de a_0 y los impares, de a_1. Se parte de que $a_0 = k_0$ y $a_1 = k_1$ y se consiguen todos los demás. De esta forma la serie de potencias así definida verifica la ecuación diferencial. Para probar que esta serie es convergente en $E(x_0)$ se mayora mediante otra serie de potencias convergente en dicho entorno.

10.5.2. Soluciones en torno a puntos singulares

El teorema anterior garantiza la existencia de una solución expresada en serie de potencias de una ecuación diferencial de segundo orden en un entorno de un punto ordinario. Se trata ahora de analizar las soluciones en serie de potencias que se pueden obtener de dicha ecuación en puntos singulares.

Definición 10.5.3:

Se dice que x_0 es un ***punto singular regular*** de una ecuación diferencial lineal de segundo orden si dicha ecuación se puede expresar de la forma:

$$(x - x_0)^2 \cdot y'' + (x - x_0) \cdot P(x) \cdot y' + Q(x) \cdot y = 0,$$

siendo $P(x)$·y $Q(x)$ funciones analíticas en un entorno del punto x_0.

Si un punto singular no verifica esta condición se dice que es un ***punto singular irregular***.

Resulta evidente que en la ecuación $(x - x_0)^2 \cdot y'' + (x - x_0) \cdot P(x) y' + Q(x) \cdot y = 0$ no es aplicable el *teorema 10.5.1* ya que las funciones $\frac{P(x)}{(x - x_0)}$ y $\frac{Q(x)}{(x - x_0)^2}$ no son analíticas en x_0; sin embargo existen métodos para resolver estas ecuaciones. A continuación se utilizará la teoría de Frobenius para resolver la ecuación de Bessel en $x_0 = 0$, cuando éste es un punto singular regular de esta ecuación.

Teoría de Frobenius

Definición 10.5.4:

Se denomina ***serie de Frobenius*** o ***serie de potencias generalizada*** en un punto x_0 a una serie de la forma:

$$|x - x_0|^t \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n \text{ , } t \in \Re \text{ y } a_0 \neq 0. \qquad (10.5.2)$$

siendo la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$ convergente en un entorno de x_0.

Definición 10.5.5:

La ***ecuación de índices*** en un punto singular regular x_0 de la ecuación diferencial $(x - x_0)^2 \cdot y'' + (x - x_0) \cdot P(x) \cdot y' + Q(x) \cdot y = 0$ es la ecuación, en la variable *t,* que se obtiene al sustituir en la ecuación diferencial la función incógnita por una serie de Frobenius genérica de la forma (10.5.2) e igualar a 0 el término independiente de la expresión que se obtiene dividida por x^t.

Las raíces de la ecuación de índices son los únicos valores de *t* que permiten encontrar soluciones, expresadas mediante series de Frobenius, en un punto singular regular de una ecuación diferencial.

Ecuación de Bessel

Definición 10.5.6:

Se denomina ***ecuación de Bessel*** la que se puede expresar de la forma:

$$x^2 \cdot y'' - x \cdot y' + (x^2 - p^2) \cdot y = 0,$$

siendo $p \geq 0$ constante.

Se busca una ecuación de la forma:

$$y(x) = |x|^t \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n, \qquad (10.5.3)$$

siendo $a_0 \neq 0$, en un entorno pinchado de 0, $B'_r(0)$, con lo que $x \neq 0$.

Se supone, primero que $x > 0$, así $|x|^t = x^t$. Derivando (10.5.3) se obtiene:

$$y' = t \cdot x^{t-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n + x^t \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n a_n \cdot x^{n-1} = x^{t-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+t) \cdot x^n,$$

$$y'' = (t-1) \cdot x^{t-2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+t) \cdot x^n + x^{t-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n(n+t) a_n \cdot x^{n-1} = x^{t-2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (t-1+n)(n+t) a_n \cdot x^n,$$

y sustituyendo en la ecuación diferencial se obtiene:

$$x^t\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(t-1+n)(n+t)a_n\cdot x^n \;+ x^t\cdot\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+t)\cdot x^n \;+ x^{t+2}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot x^n \;- x^t\sum_{n=0}^{\infty}p^2a_n\cdot x^n \;= 0$$

$$\Rightarrow x^t\cdot\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left[(n+t)^2-p^2\right]\cdot x^n \;+ x^{t+2}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot x^n = 0$$

dividiendo por x^t:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left[(n+t)^2-p^2\right]\cdot x^n \;+ x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot x^n \;= 0.$$

Los coeficientes a_n se determinan imponiendo que se anulen en esta ecuación los coeficientes de cada una de las potencias de x.

Al igualar a cero el término independiente se tiene que $(t^2 - p^2)\cdot a_0 = 0$, y como $a_0 \neq 0$ es necesario que $t^2 - p^2 = 0$. Esta es la *ecuación de índices* y sus raíces p y $-p$ son los únicos valores de t que permiten obtener una ecuación de la forma (10.5.3).

Para $t = p$ las ecuaciones que se obtienen para determinar los valores a_n son:

$$[(1 + p)^2 - p^2]\cdot a_1 = 0 \text{ y } [(n + p)^2 - p^2]\cdot a_n + a_{n-2} = 0,\ \forall n \geq 2.$$

Ya que $p \geq 0$, de la primera ecuación se deduce que $a_1 = 0$, de la segunda se obtiene la siguiente fórmula de recurrencia que expresa a_n en función de a_{n-2}:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+p)^2-p^2} = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2p)}.$$

De este modo se obtiene que $a_3 = a_5 = a_7 = ... = 0$, y por tanto $a_{2n+1} = 0$ $\forall n \geq 0$, es decir los coeficientes de potencias de exponente impar son nulos.

Para los de potencias pares se tiene:

$$\begin{cases} a_2 = -\dfrac{a_0}{2(2+2p)} = -\dfrac{a_0}{2^2(1+p)}, \\ \\ a_4 = -\dfrac{a_2}{4(4+2p)} = \dfrac{(-1)^2 a_0}{2^4 2!(1+p)(2+p)}, \\ \\ a_6 = -\dfrac{a_4}{6(6+2p)} = \dfrac{(-1)^3 a_0}{2^6 3!(1+p)(2+p)(3+p)}, \end{cases}$$

y en general

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} n!(1+p)(2+p)(3+p)...(n+p)}.$$

Por lo tanto para el valor $t = p$ se obtiene la siguiente solución:

$$y(x) = a_0 x^p \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n!(1+p)(2+p)(3+p)...(n+p)}\right).$$

Aplicando el criterio del cociente se comprueba que esta serie es convergente.

Si se considera ahora que $x < 0$, mediante un razonamiento análogo, se obtiene una solución similar que sólo difiere de la anterior en que x^p queda sustituido por $(-x)^p$. Por lo tanto una solución de la ecuación de Bessel para x $\neq$ 0 está expresada por la función:

$$y_1(x) = a_0 \cdot |x|^p \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n!(1+p)(2+p)(3+p)...(n+p)}\right), \ \forall x \neq 0$$

Si se estudia la raíz de la ecuación de índices $t = -p$ se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} [(1-p)^2 - p^2]\cdot a_1 = 0, \\ [(n-p)^2 - p^2]\cdot a_n + a_{n-2} = 0,\ \forall n \geq 2 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-2p)\cdot a_1 = 0, \\ n(n-2p)\cdot a_n + a_{n-2} = 0. \end{cases}$$

De estas ecuaciones, si $2p$ no es entero, se tiene:

$$\begin{cases} a_1 = 0, \\ a_n = -\dfrac{a_{n-2}}{n(n-2p)},\ \forall n \geq 2 \end{cases}$$

Ya que la fórmula de recurrencia es la misma sustituyendo p por $-p$, mediante un desarrollo similar al anterior se obtiene la solución:

$$y_2(x) = a_0\cdot|x|^{p}\cdot\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}\, n!\,(1-p)(2-p)(3-p)...(n-p)}\right),\ \forall x \neq 0$$

Esta solución se ha obtenido suponiendo que $2p$ no es un entero positivo pero la serie que la define tiene igual sentido si $2p$ es entero positivo, siempre que p no lo sea.

Para todo $p \geq 0$ se ha obtenido la solución $y_1(x)$ y si p no es un número entero positivo se ha calculado otra solución $y_2(x)$. Se puede demostrar que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son linealmente independientes y por lo tanto cuando p no es un número entero positivo la solución general de la ecuación de Bessel es de la forma:

$$\varphi(x) = C_1\cdot y_1(x) + C_2\cdot y_2(x).$$

Teorema 10.5.2:

Si $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación diferencial $x^2 \cdot y'' + x \cdot P(x) \cdot y' + Q(x) \cdot y = 0$ y las funciones $P(x)$, $Q(x)$ tienen un desarrollo en serie de potencias en un intervalo $(-r, r)$, con $r > 0$, y si la ecuación de índices tiene dos raíces reales t_1 y t_2 ($t_2 < t_1$), entonces la ecuación diferencial tiene al menos una solución de la forma $y_1(x) = |x|^{t_1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$, siendo $a_n \neq 0$, para todo $x \neq 0$, en el intervalo $(-r, r)$. Además si $t_1 - t_2$ no es cero ni un número entero positivo, entonces la ecuación tiene otra solución linealmente independiente de la anterior de la forma $y_2(x) = |x|^{t_2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n$, siendo $b_n \neq 0$, para todo $x \neq 0$, en el intervalo $(-r, r)$.

La demostración de este teorema sigue los mismos pasos que se han utilizado para encontrar la solución de la ecuación de Bessel.

La ecuación de índices que resulta es: $t^2 + t \cdot (p_0 - 1) + q_0 = 0$, siendo p_0 y q_0 los coeficientes de x^0 en los desarrollos en series de potencias de $x \cdot P(x)$ y $x^2 \cdot Q(x)$ respectivamente.

Si las raíces de esta ecuación son números complejos conjugados entonces los coeficientes de la serie de Frobenius son también complejos.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 10.5.1: Encontrar la solución general, $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$, de la ecuación diferencial $y'' + x \cdot y' + y = 0$ de la forma $y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$, siendo $y_1(x)$ e $y_2(x)$, series de potencias.

Derivando $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$, se obtiene

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} na_n \cdot x^{n-1},$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n \cdot x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n \cdot x^{n-2} .$$

y sustituyendo en la ecuación:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n \cdot x^{n-2} + x\cdot \sum_{n=0}^{\infty} na_n \cdot x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n \cdot x^{n-2} = -\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_n \cdot x^n \Rightarrow$$

$$\sum_{n=-2}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} \cdot x^n = -\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_n \cdot x^n .$$

Igualando coeficientes $(n + 2)\cdot(n + 1)\cdot a_{n+2} = -(n + 1)\cdot a_n$ de donde se obtiene la fórmula de recurrencia $a_{n+2} = \frac{-a_n}{n+2}$ válida para $n \geq 0$. Por lo tanto:

$$a_2 = \frac{-a_0}{2},\ a_4 = \frac{-a_2}{4} = \frac{(-1)^2 a_0}{2\cdot 4},\ a_6 = \frac{-a_4}{6} = \frac{(-1)^3 a_0}{2\cdot 4\cdot 6},\ \ldots,\ a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2^n n!}$$

$$a_3 = \frac{-a_1}{3},\ a_5 = \frac{-a_3}{5} = \frac{(-1)^2 a_1}{3\cdot 5},\ a_7 = \frac{-a_5}{7} = \frac{(-1)^3 a_1}{3\cdot 5\cdot 7},\ \ldots,\ a_{2n+1} = \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!!}$$

La solución general de la ecuación diferencial es:

$$y(x) = a_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!} + a_1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!!}.$$

Ejemplo 10.5.2: Hallar una solución expresada en series de potencias de la ecuación diferencial $(1 - x^2) \cdot y'' + 2y = 0$.

Derivando $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$, como en el ejemplo anterior se obtiene:

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n \cdot x^{n-2}.$$

y sustituyendo en la ecuación:

$$(1 - x^2) \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n \cdot x^{n-2} = -2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n \cdot x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n \cdot x^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \Rightarrow$$

$$\sum_{n=-2}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n(n-1) - 2)a_n \cdot x^n.$$

Igualando coeficientes:

$$(n + 2) \cdot (n + 1) \cdot a_{n+2} = (n^2 - n - 2) \cdot a_n$$

de donde se obtiene la fórmula de recurrencia:

$$a_{n+2} = \frac{a_n(n-2)}{n+2} \text{ válida para } n \geq 0.$$

Por lo tanto:

$a_2 = -a_0$, $a_4 = 0$, $a_6 = 0$, ..., $a_{2n} = 0$, $\forall n \geq 2$

$a_3 = \dfrac{-a_1}{3}$, $a_5 = \dfrac{a_3}{5} = \dfrac{-a_1}{3\cdot 5}$, $a_7 = \dfrac{3a_5}{7} = \dfrac{-a_1}{5\cdot 7}$, ..., $a_{2n+1} = \dfrac{-a_1}{(2n-1)(2n+1)}$.

Por consiguiente una solución de la ecuación diferencial es:

$$y(x) = a_0 + a_2x^2 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-a_1)x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)} = a_0(1 - x^2) - a_1 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Ejemplo 10.5.3: Comprobar que el origen es un punto singular regular de la ecuación de Cauchy-Euler de segundo orden: $x^2\cdot y'' + bx\cdot y + cy = 0$ (b, c constantes no nulas) y que su ecuación de índices coincide con la ecuación característica de la ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes que se obtiene al realizar el cambio de variable $x = e^t$.

Las funciones $P(x) = b$ y $Q(x) = c$ son constantes y por lo tanto $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación de Cauchy-Euler.

Haciendo el cambio $x = e^t$ se tiene que:

$$y' = \frac{dy}{dt}e^{-t}; \quad y'' = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-2t}.$$

Sustituyendo: $\dfrac{d^2y}{dt^2} + (b-1)\dfrac{dy}{dt} + cy = 0$, ecuación diferencial con coeficientes constantes cuya ecuación característica es: $\lambda^2 + (b - 1)\lambda + c = 0$

Para calcular la ecuación de índices se supone $x > 0$ (si $x < 0$ se obtiene la misma ecuación) y se considera la serie de Frobenius $y(x) = x^t \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$, siendo $a_n \neq 0$. Derivando esta serie:

$$y' = x^{t-1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+t)\cdot x^n \ , \ y'' = x^{t-2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(t-1+n)(n+t)a_n\cdot x^n \ ,$$

y sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$x^t\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(t-1+n)(n+t)a_n\cdot x^n \ + bx^t\cdot\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+t)\cdot x^n \ + cx^t\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot x^n \ = 0 \Rightarrow$$

$$x^t\cdot\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left[(n+t)^2-(n+t)+b(n+t)+c\right]\cdot x^n \ = 0 \Rightarrow$$

$$x^t\cdot\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left[(n+t)^2+(b-1)(n+t)+c\right]\cdot x^n = 0.$$

Dividiendo por x^t, se tiene que el coeficiente de x^0 es: $a_0(t^2 + (b - 1)t + c)$ y por lo tanto la ecuación de índices: $t^2 + (b - 1)t + c = 0$ tiene las mismas raíces que la ecuación característica obtenida anteriormente.

Ejercicios

10.21. Encontrar la solución general $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$, de la ***ecuación de Hermite***, $y'' - 2x\cdot y' + 2p\cdot y = 0$, (con p constante) de la forma $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, siendo $y_1(x)$ e $y_2(x)$, series de potencias.

10.22. Hallar dos soluciones en serie de potencias linealmente independientes, válidas en un intervalo $(-r, r)$, con $r < 1$, de la ***ecuación de Chebyshev***, $(1 - x^2)\cdot y'' - x\cdot y' + p^2\cdot y = 0$, siendo p una constante.

10.23. Demostrar que si p es un número entero no negativo, entonces la solución de la *ecuación de Chebyshev* es un polinomio de grado p.

10.24. Encontrar la ecuación de índices y sus raíces para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales en el punto $x = 0$.

a) $x^2 \cdot y'' + (\cos 2x - 1) \cdot y' + 2x \cdot y = 0$.

b) $4x^2 \cdot y'' + (2x^4 - 5x) \cdot y' + (3x^2 + 2x) \cdot y = 0$.

10.25. Comprobar que el origen es un punto singular regular de la ecuación: $2x^2 \cdot y'' + x \cdot (2x + 1) \cdot y' - y = 0$ y resolverla en un entorno de $x = 0$.

10.6. APLICACIONES

10.6.1. Movimiento oscilatorio armónico

Vibraciones armónicas simples no amortiguadas

Se considera un bloque de masa m sujeto al extremo de un resorte y se denota por $y(t)$ el desplazamiento del bloque en función del tiempo. Se considera el desplazamiento hacia abajo como positivo y hacia arriba negativo. En el punto de equilibrio el peso del bloque se compensa con la fuerza de elasticidad del resorte. Se supone que esta fuerza elástica es proporcional al desplazamiento, es decir, igual a $-k \cdot y(t)$, siendo $k > 0$ una constante, que cuantifica la rigidez del resorte. El movimiento de este sistema, siempre que no se rebasen los límites de elasticidad del resorte, viene dado por la ecuación:

$$-k \cdot y(t) = m \cdot y''(t).$$

Si se supone que no hay más fuerzas actuando en el sistema, la ecuación anterior describe un ***movimiento libre no amortiguado*** que se denomina ***movimiento armónico simple***; esta ecuación se puede expresar de la forma

$y'' + w_0^2 \cdot y = 0$ con $w_0^2 = k/m$, que es una ecuación lineal homogénea de segundo orden cuya ecuación característica es $\lambda^2 + w_0^2 = 0$, sus autovalores $\pm w_0 \cdot \mathrm{i}$, y por lo tanto la solución general tiene la forma: $y(t) = C_1 \cdot cos(w_0 \cdot t) + C_2 \cdot sen(w_0 \cdot t) = A \cdot sen(w_0 \cdot t + \alpha)$ donde t es el tiempo.

Se puede calcular e interpretar físicamente el periodo, la frecuencia, la amplitud y el ángulo de fase. Y dadas unas condiciones iniciales se determina la ecuación del movimiento.

Vibraciones amortiguadas

El modelo libre no amortiguado no es realista pues no se conoce ningún resorte que no pare nunca. Existe siempre la resistencia del medio. Se puede suponer que existe resistencia debido a que el medio es viscoso, o bien que existe un dispositivo amortiguador. Esta fuerza se considera proporcional a la velocidad del movimiento y', y si b es la constante de amortiguación se tiene que la ecuación del movimiento amortiguado viene dada por:

$$y'' + (b/m) \cdot y' + (k/m) \cdot y = 0.$$

Se denota de nuevo $w_0^2 = k/m$, y $2u = b/m$ con lo que la ecuación queda de la forma:

$$y'' + 2u \cdot y' + w_0^2 \cdot y = 0$$

que es también una ecuación homogénea de coeficientes constantes, cuya ecuación característica es:

$$\lambda^2 + u \cdot \lambda + w_0^2 = 0.$$

Las raíces de esta ecuación son: $-u \pm \sqrt{u^2 - w_0^2}$. Sean δ y μ. Se pueden distinguir tres casos:

a) Si $u^2 - w_0^2 > 0$ la ecuación tiene dos raíces reales y simples, teniendo ambas signo negativo:

La solución general de la ecuación viene expresada por: $y(t) = C_1 \cdot e^{\delta t} + C_2 \cdot e^{\mu t}$. De esta fórmula se deduce, al ser δ *y* μ negativas, que cualesquiera que sean las condiciones iniciales, el desplazamiento $y(t)$ tiende a cero cuando t tiende a ∞, y por lo tanto no hay oscilaciones. El movimiento es suave y no oscilatorio y se dice que el sistema está ***sobreamortiguado***.

b) Si $u^2 - w_0^2 < 0$ la ecuación tiene dos raíces complejas: $\delta = \alpha + \beta \cdot i$ y $\mu = \alpha - \beta \cdot i$, con $\alpha = -u < 0$. La solución general de la ecuación viene expresada por:

$$y(t) = C_1 \cdot e^{\alpha t} \cdot \cos \beta t + C_2 \cdot e^{\alpha t} \cdot \operatorname{sen} \beta t = A \cdot e^{\alpha t} \cdot \operatorname{sen} (\beta t + \phi).$$

De esta fórmula se deduce que las amplitudes $A \cdot e^{\alpha t}$ de las oscilaciones tienden a cero cuando aumenta el tiempo, y el sistema está ***subamortiguado***.

c) En el caso en que $u^2 - w_0^2 = 0$ la ecuación tiene una única raíz real $\delta = \mu = -u < 0$ y la solución general de la ecuación $y(t) = (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot e^{\delta t}$. En este caso, como en el sistema sobreamortiguado, al ser δ negativo, el desplazamiento también tiende a cero cuando t tiende a ∞, pero con menor velocidad debido al factor $C_1 + C_2 \cdot t$. Se dice que el sistema está ***críticamente amortiguado*** en el sentido de que cualquier variación lo haría pasar a uno de los dos estados anteriores.

Vibraciones forzadas

En este caso actúan fuerzas exteriores al sistema. Así, por ejemplo, se puede suponer que el punto inferior del resorte efectúa movimientos verticales según una función de *t*. Esto puede ocurrir cuando, por ejemplo, el resorte y el bloque se desplazan por un camino de relieve irregular. En este caso, más general, la ecuación diferencial que describe el movimiento es una ecuación lineal no homogénea de coeficientes constantes:

$$\frac{d^2y(t)}{dx^2} + b \cdot \frac{dy(t)}{dx} + c \cdot y(t) = g(t),$$

donde *g*(*t*) es una fuerza externa que actúa sobre la masa del resorte. Para calcular sus soluciones, en primer lugar, hay que resolver la ecuación homogénea y luego hallar una solución particular de la completa.

Cuando la función *g* que representa la fuerza exterior es periódica se puede originar una situación especial que se analiza a continuación, si se supone que la fuerza externa *g* es una función seno o coseno con la misma frecuencia que las soluciones de la ecuación homogénea asociada.

Se deben considerar de nuevo los casos ya estudiados para la ecuación homogénea. Si en la ecuación general $y''(t) + b \cdot y'(t) + c \cdot y(t) = g(t)$, se tiene que *b* es igual a 0, el movimiento corresponde a las oscilaciones libres forzadas pudiendo aparecer problemas de ***resonancia***, o de modulación de amplitud. Mientras que si *b* es distinto de cero, las vibraciones son forzadas amortiguadas, el movimiento siempre está acotado y no hay resonancia.

Vibraciones libres forzadas. Resonancia

Se trata de estudiar $y''(t) + c\cdot y(t) = F_0\cdot cos\ wt$, donde la ecuación homogénea corresponde a la de las oscilaciones libres y la fuerza externa es una función coseno.

Llamando $w_0 = \sqrt{c}$ resulta que la solución general de la ecuación homogénea es: $y = C_1\cdot cos(w_0\cdot t) + C_2\cdot sen(w_0\cdot t)$

Si w es distinto de w_0, es decir la frecuencia de la fuerza externa no es igual a la de las propias oscilaciones, entonces se puede probar por el método de los coeficientes indeterminados, al buscar una solución de la forma $y_P(t) = A\cdot cos\ wt + B\cdot sen\ wt$, que esta solución particular es:

$$y_P(t) = \frac{F_0}{(w_0^2 - w^2)} cos\, wt\ .$$

Si se considera $y(0) = y'(0) = 0$ y se calcula la solución del problema de valor inicial se obtiene:

$$y(t) = \frac{F_0}{(w_0^2 - w^2)}(cos\, wt - cos\, w_0 t) = \frac{2F_0}{(w_0^2 - w^2)} sen \frac{(w_0 - w)t}{2} sen \frac{(w_0 + w)t}{2}\ .$$

Si w es próximo a w_0 la solución particular que se obtiene es una oscilación rápida con frecuencia $(w_0 + w)/2$ pero con una amplitud senoidal que varía lentamente. Este tipo de movimiento, que posee una variación periódica de amplitud, se denomina una ***pulsación***. Este fenómeno se presenta en acústica, cuando los diapasones de una frecuencia casi igual se hacen sonar simultáneamente; entonces la variación periódica de la amplitud puede percibirse por el oído. En electrónica la variación de amplitud con el tiempo se llama modulación de amplitud.

Si $w = w_0$ la solución particular que se obtiene es:

$$y_P(t) = \frac{F_0}{2w} t\,senwt\ .$$

y debido a la existencia del término en *t* cuando el tiempo *t* aumenta el movimiento no está acotado. El fenómeno se conoce como ***resonancia***. En la práctica el sistema se rompería.

Una anécdota interesante es la discusión sobre si este fenómeno de resonancia fue el que provocó el derrumbe del puente colgante de *Tacoma Narrows*. Es costumbre también que cuando un ejército atraviese un puente no marque el paso para no provocar resonancia.

En el *ejemplo 10.6.4* se presentan fenómenos de resonancia, y resulta interesante estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones

10.6.2. Circuitos eléctricos

En el *capítulo 7* se ha obtenido la siguiente ecuación diferencial lineal para un circuito eléctrico:

$$L\cdot\frac{dI}{dt}(t) + R\cdot I(t) + \frac{1}{C}\cdot Q(t) = E(t),$$

siendo *L* la inductancia, *R* la resistencia, *C* la capacitancia, *Q* la carga eléctrica, *I* la intensidad de la corriente y *E* la fuerza electromotriz.

Sustituyendo en esta ecuación $I(t) = \frac{dQ}{dt}(t)$ se obtenía la ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}(t) + R\frac{dQ}{dt}(t) + \frac{1}{C}Q(t) = E(t).$$

También en ese capítulo se observaba la semejanza de esta ecuación con la obtenida para las vibraciones amortiguadas forzadas:

$$m\cdot y''(t) + b\cdot y'(t) + k\cdot y(t) = g(t),$$

estableciendo las correspondencias entre las constantes y las funciones de ambas ecuaciones.

Resulta evidente que la similitud entre las ecuaciones de los sistemas mecánicos y los eléctricos conlleva que las expresiones de las soluciones sean idénticas desde el punto de vista matemático.

Por ejemplo la ecuación homogénea que se obtiene cuando la fuerza electromotriz es nula, $E(t) = 0$, al dividirla por L queda de la forma:

$$\frac{d^2Q}{dt^2}(t) + \frac{R}{L}\cdot\frac{dQ}{dt}(t) + \frac{1}{L\cdot C}Q(t) = 0.$$

En el estudio matemático de esta ecuación hay que analizar los distintos valores de $\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{L\cdot C}$, que es el discriminante de la ecuación característica:

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{L\cdot C} = 0.$$

Sean δ *y* μ, las raíces de esta ecuación. Se pueden distinguir tres casos:

a) Si $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ la ecuación tiene dos raíces reales y simples:

La solución general de la ecuación viene expresada por: $Q(t) =$

$C_1 \cdot e^{\delta t} + C_2 \cdot e^{\mu t}$. En el caso particular en el que L es despreciable el circuito es ***no inductivo***.

b) Si $R < 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ la ecuación tiene dos raíces complejas, $\delta = \alpha + \beta \cdot i$ y $\mu = \alpha - \beta \cdot i$. La solución general de la ecuación viene expresada por:

$$Q(t) = C_1 \cdot e^{\alpha t} \cdot \cos \beta t + C_2 \cdot e^{\alpha t} \cdot \operatorname{sen} \beta t = A \cdot e^{\alpha t} \cdot \operatorname{sen} (\beta t + \phi).$$

En el caso particular en el que R es despreciable se trata de un circuito ***inductivo de débil resistencia***.

c) Si $R = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ la ecuación tiene una única raíz real δ y la solución general de la ecuación $Q(t) = (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot e^{\delta t}$. En este caso, como en el sistema mecánico, la solución tiene un comportamiento crítico en el sentido de que cualquier variación lo haría pasar a uno de los dos estados anteriores.

Además al estudiar la ecuación completa existe una resistencia crítica por debajo de la cual el comportamiento libre del circuito es vibratorio, y cuando la fuerza electromotriz es una función periódica pueden aparecer fenómenos de resonancia de forma análoga a los que se han estudiado en el sistema mecánico cuando la fuerza externa era una función periódica.

10.6.3. Las leyes de Kepler

En este apartado se deducen las leyes de Kepler de los movimientos de los planetas a partir de la ley de la gravitación de Newton. Se trata pues de describir el movimiento de una partícula de masa *m*, que puede representa un planeta, bajo la atracción de otra fija de masa *M*, que representaría el Sol.

Para facilitar los cálculos se considera un sistema de coordenadas polares, colocando a la partícula fija en el origen.

Sea *P* el punto del plano donde está colocada la masa *m*, de coordenadas polares (r, α). El vector *OP* se puede representa como $OP = r\cdot\mathbf{u_p}$, siendo $\mathbf{u_p}$ el vector unitario de coordenadas ($\cos\alpha$, $\operatorname{sen}\alpha$). Al girarlo $\pi/2$, se obtiene el vector $\mathbf{n_p}$ de coordenadas ($-\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$). Ambos vectores están relacionados ya que $\frac{du_p}{d\alpha} = n_P$ y $\frac{dn_p}{d\alpha} = -u_P$. Se calcula la velocidad y la aceleración en función de estos vectores:

$$v = \frac{dOP}{dt} = r\frac{du_p}{dt} + \frac{dr}{dt}u_p = r\frac{du_p}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{dr}{dt}u_p = r\frac{d\alpha}{dt}n_P + \frac{dr}{dt}u_p \text{ y}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\frac{d\alpha}{dt}n_P + \frac{dr}{dt}u_p\right) = \left(r\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\alpha}{dt}\right)n_P + \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2\right)u_p.$$

Si la fuerza que actúa sobre *m* se descompone en una componente en la dirección de $\mathbf{u}_P$ y otra en la de $\mathbf{n}_p$ se tiene que $F = F_r\cdot\mathbf{u}_P + F_n\cdot\mathbf{n}_p$ y aplicando la segunda ley del movimiento de Newton $F = m\cdot a$ se tiene que:

$$F_r = m\cdot\left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2\right) \text{ y } F_n = m\cdot\left(r\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\alpha}{dt}\right).$$

Segunda ley de Kepler

Se supone que la fuerza de atracción del Sol sobre los planetas es central, lo que indica que sólo tiene una componente en la dirección del vector

OP y por lo tanto la componente de la fuerza en la dirección perpendicular a *OP* es 0, es decir $F_n = 0$. Por lo tanto $\left(r\dfrac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\alpha}{dt} \right) = 0$ y al multiplicar por r se tiene $\left(r^2\dfrac{d^2\alpha}{dt^2} + 2r\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\alpha}{dt} \right) = 0 \Rightarrow \dfrac{d}{dt}\left(r^2\dfrac{d\alpha}{dt} \right) = 0 \Rightarrow r^2\dfrac{d\alpha}{dt} = k$. Se puede suponer $k > 0$ lo que indica que la masa m se desplaza en sentido positivo.

Si $A = A(t)$ es la función que determina el área a partir de una posición fija $dA = \dfrac{1}{2}r^2 \cdot d\alpha$ y a partir de la ecuación anterior se tiene que $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{1}{2}r^2\dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{1}{2}k$.

Calculando la integral entre t_1 y t_2 se obtiene que $A(t_2) - A(t_1) = \dfrac{1}{2}k(t_2 - t_1)$, que es la segunda ley de Kepler, es decir: *el área que recorre el vector OP es proporcional al tiempo en que la recorre*.

Primera ley de Kepler

Se supone ahora que la fuerza central, que se ha llamado F_r, según la ley de gravitación es directamente proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, por lo que $F_r = -G\dfrac{Mm}{r^2}$ y se sustituye el valor de F_r obtenido anteriormente: $m\left(\dfrac{d^2r}{dt^2} - \left(\dfrac{d\alpha}{dt}\right)^2 \right) = -G\dfrac{Mm}{r^2}$. Se hace el cambio de variable $z = \dfrac{1}{r}$ y se calculan las derivadas respecto a α:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dt} = -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{d\alpha}\frac{k}{r^2} = -k\frac{dz}{d\alpha},$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(-k\frac{dz}{d\alpha}\right) = -k\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{dz}{d\alpha}\right)\frac{d\alpha}{dt} = -k\frac{d^2z}{d\alpha^2}\frac{k}{r^2} = -k^2z^2\frac{d^2z}{d\alpha^2},$$

Se sustituyen estos valores en la ecuación anterior:

$$-k^2z^2\frac{d^2z}{d\alpha^2} - \frac{1}{z}k^2z^4 = -\,\mathrm{GM}\cdot z^2 \Rightarrow \frac{d^2z}{d\alpha^2} + z = \frac{GM}{k^2},$$

que es una ecuación lineal con coeficientes constantes que tiene por solución general:

$$z = C_1\cdot cos\ \alpha + C_2\cdot sen\ \alpha + \frac{GM}{k^2},$$

y llamando $H = \frac{GM}{k^2}$ se tiene que:

$$r = \frac{1}{C_1 cos\,\alpha + C_2 sen\alpha + H}.$$

Para simplificar esta expresión se cambian los ejes de coordenadas de modo que r sea mínimo cuando $\alpha = 0$, lo que equivale a decir que z es máximo:

$\frac{dz}{d\alpha} = 0$ y $\frac{d^2z}{d\alpha^2} < 0$, de donde $C_2 = 0$ y $C_1 > 0$ y

$$r = \frac{1}{C_1 cos\,\alpha + H} = \frac{\frac{1}{H}}{\frac{C_1}{H}cos\,\alpha + 1};$$

llamando $e = \frac{C_1}{H}$ y $p = \frac{1}{C_1}$ se tiene:

$$r = \frac{pe}{e\,cos\,\alpha + 1},$$

que es la ecuación en coordenadas polares de una cónica, donde $e = \frac{C_1k^2}{MG}$ es la excentricidad. Como los planetas permanecen en el sistema solar su órbita ha de ser cerrada y por tanto una elipse.

Tercera ley de Kepler

Se supone que m se desplaza con una órbita elíptica centrada en el origen que tiene por coordenadas cartesianas $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, su excentricidad es $e = \frac{c}{a}$, siendo $c^2 = a^2 - b^2$, de forma que $e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$ y por tanto:

$$b^2 = a^2\cdot(1 - e^2).$$

La distancia media, a, de m al foco F es la media entre el mayor valor de r y el menor. Teniendo en cuanta que $r = \frac{pe}{e\cos\alpha+1}$ se tiene:

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{pe}{1+e}+\frac{pe}{1-e}\right)=\frac{pe}{1-e^2},$$

sustituyendo $p\cdot e = \frac{k^2}{MG}$ y $1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2}$ se tiene:

$$a = \frac{k^2}{MG(1-e^2)} = \frac{k^2a^2}{MGb^2} \text{ y } b^2 = \frac{k^2a}{MG}.$$

Si T es el tiempo que necesita la masa m para dar una vuelta completa a su órbita, como el área de la elipse es $\pi\cdot a\cdot b$, aplicando la fórmula obtenida para el área al demostrar la segunda ley se tiene que $\pi\cdot a\cdot b = \frac{1}{2}k\cdot T$ y $T^2 = \frac{4\pi^2a^2b^2}{k^2}$ sustituyendo la última expresión para b^2 se obtiene $T^2 = \frac{4.\pi^2a^3}{MG}$.

De donde se obtiene la tercera ley de Kepler según la cual *los cuadrados de los periodos de revolución de los planetas con proporcionales a los cubos* *de sus distancias*.

Es evidente que la constante de proporcionalidad $\frac{4 \cdot \pi^2}{MG}$ no depende de la masa *m* del planeta y por lo tanto es válida para todos.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 10.6.1: Interpretar como el movimiento de un resorte la ecuación $\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 4y = 0$, con las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Se puede ver que la solución viene dada por: $y(t) = (5/3)e^{-t} - (2/3)e^{-4t}$

El problema puede ser interpretado como una representación del ***movimiento sobreamortiguado*** de una masa sujeta a un resorte. La masa parte desde una posición que se encuentra una unidad por debajo de la posición de equilibrio, con una velocidad dirigida hacia abajo de 1 cm/s. Puede comprobarse que la masa alcanza un desplazamiento máximo a 1 069 cm por debajo de la posición de equilibrio y no cruza el eje *t*, lo que quiere decir que la masa no pasa por la posición de equilibrio.

Ejemplo 10.6.2: Interpretar como el movimiento de un resorte la ecuación $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 10y = 0$, con las condiciones iniciales $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$.

La solución es $y(t) = e^{-t} \cdot (-2\cos 3t - (2/3)\operatorname{sen} 3t)$.

El problema corresponde a un peso que se empuja hacia arriba y se suelta, a partir del reposo, desde un punto que está a 2 cm sobre la posición de equilibrio. El medio ofrece una resistencia numéricamente igual a la velocidad instantánea. Se dice que el ***movimiento*** está ***subamortiguado***.

Ejemplo 10.6.3: Interpretar como el movimiento de un resorte la ecuación $\frac{d^2y}{dt^2}+8\frac{dy}{dt}+16y=0$, con las condiciones iniciales y(0) = 1, *y'*(0) = –3.

El problema corresponde a un peso que se suelta desde la posición de equilibrio anterior con una velocidad dirigida hacia arriba de 3 cm/seg.

En este caso se trata de un sistema ***críticamente amortiguado***. El desplazamiento máximo es –0,276 cm sobre la posición de equilibrio, es decir, el peso llega a una altura máxima de 0,276 cm sobre la posición de equilibrio. La solución es: $y(t) = -3t\cdot e^{-4t}$.

Ejemplo 10.6.4: Interpretar como el movimiento de un resorte la ecuación: $y'' + a^2\cdot y = sen\ t,\ y(0) = y_0;\ y'(0) = y_1$.

La solución para *a* distinto de uno y de menos uno es:

$$y(t) = \frac{1}{a^2-1}sent - \frac{1}{a(a^2-1)}senat + y_0\cos at + \frac{1}{a}y_1senat\ .$$

Esta solución es oscilatoria, aunque no es periódica. En general existen dos frecuencias independientes, por lo que es cuasiperiódica. Al tomar *a* el valor uno esta solución converge a una solución no acotada:

$$y(t) = -\frac{1}{2}t\cos t + \frac{1}{2}sent + y_0\cos t + y_1sent\ .$$

con lo que se dice que hay ***resonancia***. Si *a* se acerca a uno se observa que también la amplitud crece, y aunque no hay resonancia propiamente dicha, puede superar los límites del sistema.

Ejercicios

10.26. Una masa de 2 kg estira un muelle de 40 cm. En $t = 0$ se suelta en un punto que está 60 cm por debajo de la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia debajo de 8 *m*/*sg*. Determinar la función $y(t)$ que describe el movimiento armónico simple, estando $y(t)$ medido desde la posición de equilibrio. Tomar $g = 10$ m/sg^2.

10.27. Se considera una masa situada en un muelle con amortiguación. Sea $y = y(t)$ la función que describe el movimiento que verifica la ecuación diferencial $y'' + 2\lambda\cdot y' + \omega\cdot y = 0$, donde $\lambda = \frac{\pi}{8}$ y $\omega = \frac{\pi}{6}$

a) Determinar si el movimiento armónico resultante es sobre, sub o críticamente amortiguado.

b) Hallar la solución para los valores iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

10.28. Estudiar una solución particular de la ecuación $y'' + w_0^2\cdot y = F_0\cdot sen\ wt$, que verifique las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 0$

10.29. Calcular la solución general de la ecuación de las oscilaciones amortiguadas forzadas $y'' + 2u\cdot y' + w_0^2\cdot y = sen\ w\cdot t$, cuando $u^2 - w_0^2 < 0$.

10.7. EJERCICIOS

10.30. Integrar las siguientes ecuaciones:

a) $y''' - 3y' + 2y = 0$.

b) $y^{iv} + 3y''' + 3y'' + y' = 0$.

c) $y^{v} = 0$.

d) $y''' - 4y'' + 4y' = 0$.

e) $y''' - y' = 0$.

10.31. Hallar la solución general de la siguiente ecuación diferencial lineal para todo valor de m, $y^{vi} + m^2 \cdot y^{iv} - m^4 \cdot y'' - m^6 \cdot y = 0$.

10.32. Calcular una solución particular de la ecuación $y''' - y = 0$, que verifique las condiciones iniciales $y(1) = y'(1) = y''(1) = 0$.

10.33. Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y'' + 4y = 5$.

b) $y'' + 4y = x^2$.

c) $y'' + 4y = \cos x$.

d) $y'' + 4y = x \cdot \cos x$.

10.34. Verificar si las siguientes funciones son soluciones de alguna de las ecuaciones diferenciales anteriores.

a) $y = \frac{5}{4} + C_1 \cdot \cos 2x + C_2 \cdot \operatorname{sen} 2x$.

b) $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{8} + C_1 \cdot \cos 2x + C_2 \cdot \operatorname{sen} 2x$.

c) $y = \frac{1}{3} \cos x + C_1 \cdot \cos 2x + C_2 \cdot \operatorname{sen} 2x$.

d) $y = \frac{1}{3} x \cdot \cos x + \frac{2}{9} \operatorname{sen} x + C_1 \cdot \cos 2x + C_2 \cdot \operatorname{sen} 2x$.

10.35. Calcular por el método de los coeficientes indeterminados una solución particular de la ecuación: $y'' - 6y' + 9y = -12x^2 \cdot e^{3x} + 9$.

10.36. Calcular por el método del anulador la solución general de la ecuación: $y'' - 2y' + y = 2x$.

(*Solución:* $y = C_1 \cdot x + C_2 \cdot x \cdot e^x + 2x + 4$)

10.37. Resolver la ecuación diferencial: $x \cdot y'' - (x + 1) \cdot y' + y = \frac{x^2}{x+1}$.

(*Solución:* $y = C_1 \cdot e^x - 1 + (C_2 - ln|1 + x|) \cdot (1 + x)$, $x > 0$)

10.38. Utilizar el método de variación de las constantes para resolver las siguientes ecuaciones:

a) $y'' - 4y' + 8y = tg\ x$.

b) $y'' - 4y' + 8y = 8 + 3e^{2x}$.

c) $x \cdot y'' - (x + 1) \cdot y' + y = x^2$.

d) $y'' + \frac{2}{x} y' + y = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = 0$. (*Sol:* $y = \frac{\cos x + 1}{x}$)

10.39. Calcular una solución particular de la ecuación diferencial:

$x \cdot y'' - (1 + x) \cdot y' + y = x^2 \cdot e^{2x}$ con $y(1) = y'(1) = 0$.

(*Solución:* $y = \frac{e^2}{2} \cdot (x + 1) - e^{x+1} + \frac{e^{2x}}{2} \cdot (x - 1)$)

10.40. Integrar la ecuación de Bessel: $x^2 \cdot y'' + x \cdot y' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$, en el intervalo $(0, \infty)$ sabiendo que admite la solución $y_1(x) = \frac{senx}{\sqrt{x}}$.

(*Solución:* $y = C_1 \cdot \frac{senx}{\sqrt{x}} + C_2 \cdot \frac{cosx}{\sqrt{x}}$)

10.41. Calcular la solución general de la ecuación $x^2 \cdot y'' - 3x \cdot y' + 4y = 0$, en $(0, \infty)$ sabiendo que tiene una solución polinómica de grado 2.

(*Solución:* $y_1 = x^2$; $y = C_1 \cdot x^2 + C_2 \cdot x^2 \cdot \ln x$)

10.42. Resolver $x^2 \cdot y'' - 6y = 0$ en $(0, \infty)$ sabiendo que admite una solución polinómica de grado 3.

(*Solución:* $y_1 = x^3$; $y = C_1 \cdot x^3 + C_2 \cdot x^{-2}$)

10.43. Integrar la ecuación $(1 + 2x) \cdot y'' + 4x \cdot y' - 4y = 0$, sabiendo que admite una solución de la forma $y = e^{\sqrt{x}}$.

10.44. Resolver la ecuación diferencial $x^2 \cdot y'' - 7x \cdot y' + 16y = 0$, en $x > 0$, sabiendo que admite una solución de la forma $y = x^n$.

10.45. Resolver la ecuación diferencial: $y'' - x \cdot y' - 2y = 0$, expresando la solución mediante series de potencias.

10.46. Comprobar que x = 0 es un punto singular regular de la ecuación: $2x^2 \cdot y'' + (3x - 2x^2) \cdot y' - (x + 1) \cdot y = 0$ y resolver la ecuación.

(*Solución:* $y = C_1 \cdot x^{\frac{1}{2}} \left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{5 \cdot 7 \cdot 9 \ldots (2n+3)} \right] + C_2 \cdot \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$)