

CAPÍTULO 6

Geometría de las transformaciones complejas

En este capítulo se estudia la geometría de las funciones complejas, que es tan interesante por sí misma como por la magnífica visión geométrica que proporciona, y que además tiene muchas aplicaciones en la física y en la técnica.

Como se estudió en capítulos anteriores, es difícil representar gráficamente una aplicación compleja $f: A \subseteq \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, ya que no es posible su representación gráfica de la misma manera que se realizaba la de las funciones reales de una variable real, aunque sin embargo admite una interesante interpretación geométrica como transformación de un “plano complejo” con coordenadas x e y tales que $z = x + iy$ en otro “plano complejo” con coordenadas u y v tales que $w = f(z) = u + iv$; de este modo a cada punto $z \in \mathbf{C}$ se le asocia un punto $w = f(z) \in \mathbf{C}$.

Si se considera que z describe una curva o una figura cualquiera (una recta, una circunferencia, un disco...) se puede analizar la curva o la figura que describe $w = f(z)$. De esta forma un subconjunto A del plano complejo se transforma a través de una función f en el subconjunto $f(A)$. El conocimiento de f permitirá averiguar de qué forma se transforman las figuras del plano z en figuras del plano w .

6.1. TRANSFORMACIONES CONFORMES

Intuitivamente se dice que una función f es **conforme** en z_0 si conserva la magnitud y el sentido de los ángulos en z_0 , es decir, si se verifica que para dos curvas cualesquiera, γ y σ , que pasen por z_0 , se tiene que sus curvas imágenes $(f \circ \gamma)$ y $(f \circ \sigma)$ forman en $f(z_0)$ el mismo ángulo que γ y σ formaban en z_0 .

Cada número complejo z , distinto de cero, determina una dirección a partir del origen, definida por el punto del círculo unidad $A[z] = \frac{z}{|z|}$. Sea f una aplicación de una región Ω en el plano complejo, sea z_0 un punto de esa región Ω , y sea $B_r'(z_0)$ un entorno reducido en el cual $f(z) \neq f(z_0)$. Se dice que f **conserva ángulos** en z_0 si el límite:

$$\lim_{r \rightarrow 0} e^{-i\theta} \cdot A \cdot (f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0)), \quad r > 0$$

existe y es independiente de θ .

En lenguaje menos preciso, se pide que el ángulo que formen cualquier par de rayos L' y L'' con origen en z_0 , coincida con el ángulo que formen sus imágenes $f(L')$ y $f(L'')$ en $f(z_0)$, tanto en amplitud como en orientación.

La propiedad de conservar ángulos en una región es característica de las funciones holomorfas cuya derivada no tiene ningún cero en esa región. Esta es la razón por la que a esas funciones se les da el nombre de **“aplicaciones conformes”**.

Definición 6.1.1:

Sea f una aplicación de un abierto Ω en el plano complejo, $f: \Omega \subseteq \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ y sea z_0 un punto de esa región Ω , se dice que f es una **transformación conforme en z_0** si f es holomorfa en z_0 y $f'(z_0) \neq 0$.

Teorema 6.1.1:

Sea Ω una región del plano complejo y f una aplicación de Ω en \mathbf{C} . Si existe $f'(z_0)$ en algún $z_0 \in \Omega$ y $f'(z_0) \neq 0$, entonces f conserva los ángulos en z_0 . Recíprocamente si la diferencial de f existe y es diferente de 0 en z_0 , y si f conserva los ángulos en z_0 , entonces $f'(z_0)$ existe y es distinto de cero.

En efecto, sea γ una curva diferenciable, $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega \subseteq \mathbf{C}$, sea t_0 un punto del intervalo abierto (a, b) y sea $z_0 = \gamma(t_0)$. La dirección de γ en este punto viene dada por el vector tangente de \mathfrak{R}^2 , $\gamma'(t_0)$, siendo la pendiente de la curva el argumento de $\gamma'(t_0)$ en el caso en que $\gamma'(t_0)$ sea distinto de cero, $\alpha_0 = \arg(\gamma'(t_0))$, (si $\gamma'(t_0) = 0$ se tienen problemas para precisar la dirección de la curva).

Sea $f: \Omega \subseteq \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ una transformación en el plano complejo, y se quiere analizar como varía la pendiente de la curva γ al aplicar f . Se obtiene una nueva curva: $f \circ \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$, que pasa por $f(z_0)$ para $t = t_0$: $(f \circ \gamma)(t_0) = f(\gamma(t_0)) = f(z_0)$. La dirección de $f \circ \gamma$ en t_0 viene dada por el vector tangente $(f \circ \gamma)'(t_0)$ que si f es holomorfa en z_0 se obtiene como $(f \circ \gamma)'(t_0) = f'(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0)$ y si $\gamma'(t_0)$ es distinto de cero, entonces su argumento es el producto de dos argumentos, $\arg(f'(z_0))$ y $\arg(\gamma'(t_0))$, pues:

$$\arg((f \circ \gamma)'(t_0)) = \arg(f'(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0)) =$$

$$\arg(f'(\gamma(t_0))) + \arg(\gamma'(t_0)) = \arg(f'(z_0)) + \arg(\gamma'(t_0))$$

que se interpreta como que la pendiente de la curva γ en el punto z_0 , al

aplicarle la transformación f , aumenta en la cantidad $\arg(f'(z_0))$, sea cual sea la curva γ .

Por lo tanto, si γ_1 y γ_2 son dos curvas que se cortan en z_0 bajo un ángulo φ , sus transformadas $f \circ \gamma_1$ y $f \circ \gamma_2$ se cortan en $f(z_0)$ bajo el mismo ángulo, puesto que la transformación f hace girar a ambas curvas un mismo ángulo de medida $\arg(f'(z_0))$. \square

Corolario 6.1.2: Si f es holomorfa e inyectiva en un abierto Ω entonces $f'(z_0) \neq 0$ para todo $z_0 \in \Omega$.

Es sencillo comprobar que si una función es holomorfa e inyectiva en un abierto Ω , entonces su derivada no se anula en ningún punto de Ω , por lo que es holomorfa en todo punto z de Ω .

Si f es holomorfa en z_0 , lo es en un entorno de z_0 , y al ser la función f' continua en z_0 , existe un entorno de z_0 donde $f'(z_0)$ es distinto de cero, y por tanto, si f es conforme en z_0 , lo es en un entorno de z_0 , y como consecuencia, existe la función inversa local cuya derivada: $(f^{-1})'(w_0) = 1 / f'(z_0)$ existe y es distinta de cero, luego es también una transformación conforme en un entorno de $w_0 = f(z_0)$.

Definición 6.1.2:

Sea f una aplicación de un abierto Ω en el plano complejo, $f: \Omega \subseteq \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, se dice que f es una **transformación conforme en Ω** si f es holomorfa e inyectiva en Ω .

Observaciones

1. Algunos autores definen transformación conforme como aquella

que conserva los ángulos.

2. Otros autores definen transformación conforme en un abierto Ω como la aplicación que es conforme en todos los puntos del abierto. No exigen que la aplicación sea inyectiva. Esta definición tiene el inconveniente de no garantizar la existencia de la función inversa local. Por ejemplo, la función exponencial, cuya derivada no se anula en ningún punto, según esta definición, sería conforme en todo el plano complejo, mientras que sólo lo es en bandas horizontales de anchura menor o igual a 2π , si en la definición se impone que debe ser inyectiva.
3. En muchas ocasiones en Física existe el problema de encontrar una función holomorfa y biyectiva, y por tanto conforme, lo que conduce a definir una aplicación conforme como una aplicación holomorfa y biyectiva en una cierta región, con lo que, como consecuencia es conforme en todo punto de dicha región. Si una función es holomorfa y biyectiva entre dos dominios entonces su inversa también es holomorfa y biyectiva. A estas funciones se las suele denominar **biholomorfas**. El hecho de escoger esta definición garantiza por tanto la existencia de la función inversa, aunque según la definición 6.1.2, que es una definición más restrictiva, sólo se garantiza la existencia de inversa local.

Ortogonalidad

Naturalmente las transformaciones conformes respetan la ortogonalidad. En particular transforman haces de rectas horizontales y verticales en haces de

curvas ortogonales. Esto permite obtener con facilidad pares de familias de curvas ortogonales.

Equivalencia conforme

Uno de los aspectos más interesantes de esta teoría es el de la “equivalencia conforme”.

Definición 6.1.3: Dadas dos regiones Ω_1 y Ω_2 se dice que son **conformemente equivalentes**, $\Omega_1 \sim \Omega_2$, si existe una función f definida en Ω_1 , holomorfa e inyectiva, cuyo rango sea Ω_2 .

Dos regiones conformemente equivalentes son homeomorfas.

Proposición 6.1.3:

La relación “conformemente equivalentes” entre conjuntos es una relación de equivalencia.

Demostración:

En efecto, verifica las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva:

- a) $\Omega \sim \Omega$ al ser la función identidad, $f(z) = z$, una aplicación conforme.
- b) Si $\Omega_1 \sim \Omega_2$, entonces $\Omega_2 \sim \Omega_1$, pues si $f: \Omega_1 \subseteq \mathbf{C} \rightarrow \Omega_2$ es una aplicación conforme, su aplicación inversa es una aplicación conforme de Ω_2 sobre Ω_1 .
- c) Si $\Omega_1 \sim \Omega_2$ y $\Omega_2 \sim \Omega_3$, entonces $\Omega_1 \sim \Omega_3$, ya que la composición de dos aplicaciones conformes es una aplicación conforme, y si $f: \Omega_1 \subseteq \mathbf{C} \rightarrow \Omega_2 \subseteq \mathbf{C}$, y $g: \Omega_2 \subseteq \mathbf{C} \rightarrow \Omega_3 \subseteq \mathbf{C}$, son conformes en Ω_1 y Ω_2 respectivamente, entonces $f \circ g: \Omega_1 \subseteq \mathbf{C} \rightarrow \Omega_3 \subseteq \mathbf{C}$, es holomorfa e

inyectiva luego es conforme, y en consecuencia $\Omega_1 \sim \Omega_3$. \square

6.1.1. Teoremas de la aplicación abierta y de la aplicación de Riemann

Existe una relación muy importante entre regiones conformemente equivalentes: Sea $H(\Omega)$ el conjunto de todas las aplicaciones conformes definidas sobre la región Ω ; si f es una aplicación conforme $f: \Omega_1 \subseteq \mathbf{C} \rightarrow \Omega_2 \subseteq \mathbf{C}$, y $g: \Omega_2 \subseteq \mathbf{C}$ queda definida una aplicación:

$$H(\Omega_2) \rightarrow H(\Omega_1)$$

$$g \rightarrow g \circ f$$

que es inyectiva, suprayectiva y conserva las sumas y los productos, esto es, se trata de un isomorfismo de anillos de $H(\Omega_2)$ sobre $H(\Omega_1)$. Así, problemas sobre $H(\Omega_2)$ pueden ser convertidos en problemas sobre $H(\Omega_1)$, y las soluciones pueden ser transportadas de nuevo a $H(\Omega_2)$.

Dos propiedades importantes de las aplicaciones conformes son los siguientes teoremas:

Teorema de la aplicación abierta

Sea f una aplicación conforme y no constante en un conjunto abierto Ω , entonces $f(\Omega)$ es abierto.

El caso más importante está basado en el teorema de la “*Aplicación de Riemann*”, que afirma que toda región simplemente conexa en \mathbf{C} y distinta de \mathbf{C} es conformemente equivalente al disco unidad abierto.

La demostración del teorema de la *Aplicación de Riemann* es complicada,

pero al menos es interesante enunciarlo pues permite asegurar que dadas dos regiones simplemente conexas existe una aplicación conforme que transforma una de ellas en la otra.

Teorema de la *aplicación de Riemann*

Sea Ω un subconjunto de \mathbf{C} abierto y simplemente conexo distinto del plano complejo; entonces existe una aplicación conforme (holomorfa y biyectiva) f que transforma el conjunto Ω en el disco unidad con centro en el origen, es decir, tal que $f(\Omega) = B_1(0)$.

Además, dado cualquier punto $z_0 \in \Omega$ la función f anterior es única si se exigen las condiciones $f(z_0) = 0$ y $f'(z_0) > 0$.

A partir del teorema de la *aplicación de Riemann* se tiene que dos subregiones propias y simplemente conexas de \mathbf{C} son conformemente equivalentes, al ser equivalentes las dos al disco unidad. Esta es una propiedad muy especial de las regiones simplemente conexas de \mathbf{C} .

Se plantea la cuestión de si esto puede extenderse a situaciones sencillas parecidas, como el caso de dos coronas circulares, siendo la respuesta, generalmente, negativa.

Dadas dos coronas circulares: $\{z, r_1 < |z| < R_1\}$, $\{z, r_2 < |z| < R_2\}$, una condición necesaria y suficiente para que sean conformemente equivalentes es que $R_1/r_1 = R_2/r_2$.

Bajo ciertas condiciones toda aplicación conforme de una región simplemente conexa Ω sobre el disco unidad $D = B_1(0)$ puede extenderse a un homeomorfismo de $\bar{\Omega}$ sobre \bar{D} . En esta posible extensión juega un papel

fundamental la naturaleza de la frontera de Ω .

Si w es un punto de la frontera de Ω , se dice que w es un **punto frontera simple** de Ω si tiene la siguiente propiedad:

Para toda sucesión (z_n) en Ω tal que z_n tienda a w cuando n tiende a infinito, existe una aplicación continua $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ y una sucesión (t_n) , $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$ con t_n tendiendo a 1, tal que $f(t_n) = z_n$, $(n = 1, 2, \dots)$ y $f(t) \in \Omega$, $0 \leq t < 1$.

Dicho de otra manera, w es un punto frontera simple de Ω si existe una curva que pasa por todos los puntos z_n y termina en el punto w . Toda aplicación conforme de Ω sobre $D = B_1(0)$ va a admitir una extensión a los puntos de la frontera de Ω que sean puntos frontera simples. De forma precisa:

Teorema 6.1.4:

Sea Ω una región acotada y simplemente conexa en \mathbf{C} , y sea f una aplicación conforme de Ω sobre $D = B_1(0)$. Si w es un punto frontera simple de Ω entonces f tiene una extensión continua a la unión de Ω con el punto w . Además $|f(w)| = 1$, y si w_1 y w_2 son puntos frontera simples de Ω distintos y f se ha extendido a la unión de Ω y de dichos puntos, entonces necesariamente $f(w_1) \neq f(w_2)$.

Como consecuencia se tiene que si Ω es una región acotada y simplemente conexa en \mathbf{C} y si cada punto frontera de Ω es un punto frontera simple, toda aplicación conforme de Ω sobre D se extiende a un homeomorfismo de $\bar{\Omega}$ sobre \bar{D} .

Este resultado tiene una consecuencia topológica:

Si cada punto frontera de una región acotada y simplemente conexa Ω es un punto frontera simple, la frontera de Ω es una curva de *Jordan*, y $\overline{\Omega}$ es homeomorfo a \overline{D} .

Se verifica también que, si la frontera de Ω es una curva de *Jordan*, todo punto frontera de Ω es un punto frontera simple.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 6.1.1: Estudiar dónde es conforme la aplicación $f(z) = z^2$.

La aplicación $f(z) = z^2$ no es conforme en el punto $z = 0$, pues se anula su derivada en ese punto, $f'(z) = 2z \Rightarrow f'(0) = 0$. Es un punto crítico. Y en dicho punto no conserva los ángulos, sino que los dobla.

En coordenadas polares: $z = r \cdot e^{i\alpha} \Rightarrow w = z^2 = r^2 \cdot e^{i2\alpha}$. En el origen un ángulo α se transforma en un ángulo 2α .

Es conforme para cada punto z de $\mathbf{C}/\{0\}$, pues es holomorfa y no se anula su derivada. Sin embargo no es conforme en $\mathbf{C}/\{0\}$, pues no es inyectiva.

Del mismo modo $f(z) = z^3$ no es conforme en el punto $z = 0$, y en ese punto triplica los ángulos, pues $z = r \cdot e^{i\alpha} \Rightarrow w = z^3 = r^3 \cdot e^{i3\alpha}$.

Ejemplo 6.1.2: Estudiar dónde es conforme la aplicación $f(z) = e^z$.

$$f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \cdot \operatorname{sen} y) \Rightarrow u(x, y) = e^x \cdot \cos y; v(x, y) = e^x \cdot \operatorname{sen} y.$$

$f(z) = e^z \Rightarrow f'(z) = e^z$. No se anula su derivada en ningún punto y es una función entera, por lo que la función exponencial es conforme en cada uno de los puntos del plano complejo. Sin embargo no es conforme en \mathbf{C} , pues no es inyectiva al ser la función exponencial periódica de periodo $2\pi i$. Es conforme en cada banda vertical abierta de anchura menor a 2π .

Ejemplo 6.1.3: Estudiar dónde es conforme la aplicación $f(z) = \cos z$.

La función $f(z) = \cos z$ es entera, por lo que es conforme en todos los puntos en los que no se anula su derivada: $z \neq n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. No es una aplicación conforme en \mathbf{C} , aunque es conforme en las bandas verticales $n\pi < x < (n+1)\pi$.

Ejercicios

6.1. Estudiar dónde es conforme la aplicación $f(z) = \frac{1}{z}$.

6.2. Estudiar dónde es conforme la aplicación de Jukowskii:

$$f(z) = z + \frac{1}{z}.$$

6.3. Estudiar dónde son conformes las funciones hiperbólicas $f(z) = \sinh z$ y $f(z) = \cosh z$.

6.4. Estudiar dónde es conforme la aplicación $f(z) = \bar{z}$.

6.2. ALGUNAS TRANSFORMACIONES SENCILLAS

Es interesante estudiar, con diferentes ejemplos, las propiedades geométricas de las distintas transformaciones.

6.2.1. La aplicación *lineal*: $f(z) = az + b$

Traslación: Si $a = 1$, la aplicación $w = f(z) = z + b$ es la traslación de vector de traslación b . Su derivada no se anula: $f'(z) = 1$, y es inyectiva. Existe

su función inversa, $f^{-1}(z) = z - b$, por lo que la traslación es una aplicación conforme en \mathbf{C} .

Si $b = b_1 + b_2 \cdot i$ la imagen de un punto $z = x + yi$ del plano z es el punto $w = u + iv = (x + b_1) + i \cdot (y + b_2)$.

La traslación transforma una recta en otra recta, paralela a la de partida, y transforma una circunferencia en otra de igual radio y con su centro trasladado.

Homotecia: Si $a = k \in \mathfrak{R}$, $a > 0$ y $b = 0$, $f(z) = kz$ es una homotecia de razón k . Su derivada no se anula: $f'(z) = k \neq 0$ y es inyectiva. Existe su función inversa, $f^{-1}(z) = z/k$, por lo que la homotecia es una aplicación conforme en \mathbf{C} .

La homotecia transforma una recta que pase por el origen en ella misma, y una recta que no pasa por el origen en una recta paralela a la de partida, y transforma una circunferencia en otra, de radio multiplicado por el factor k .

Giro o rotación: Si $a = e^{i\alpha}$ y $b = 0$, $f(z) = e^{i\alpha} \cdot z$ es un giro o rotación. Su derivada no se anula: $f'(z) = e^{i\alpha} \neq 0$. Existe su función inversa, $f^{-1}(z) = e^{-i\alpha}$, por lo que la rotación es inyectiva. Luego es una aplicación conforme en \mathbf{C} .

La rotación transforma una recta en otra recta y una circunferencia en otra, de igual radio.

Semejanza directa: Si $b = 0$, y $a = |a| \cdot e^{i\alpha}$ se tiene que $w = f(z) = a \cdot z$ es la composición de un giro con una homotecia directa, que se denomina una semejanza directa. Escribiendo a y z en forma exponencial, $a = |a| \cdot e^{i\alpha}$, $z = |z| \cdot e^{i\theta}$, se tiene:

$$w = |a| \cdot |z| \cdot e^{i(\alpha+\theta)}$$

por lo que $f(z) = a \cdot z$ es una dilatación o contracción de razón $|a|$ y un giro de

ángulo $\alpha = \arg(a)$ en torno al origen. La imagen de una región dada es geoméricamente semejante a la inicial.

Al ser composición de dos aplicaciones conformes es una aplicación conforme en \mathbf{C} .

En general, una **aplicación lineal general** (no constante) $f(z) = a \cdot z + b$, con $a \neq 0$, es la composición de un giro, una homotecia y una traslación. Es una aplicación conforme en \mathbf{C} . Transforma rectas en rectas y circunferencias en circunferencias.

6.2.2. La función $f(z) = z^2$

En el *ejemplo* 6.1.1 se comprobó que la transformación $w = f(z) = z^2$, es conforme en cada punto $z \neq 0$, pero no lo es en la región $\mathbf{C}/\{0\}$ porque no es inyectiva.

Se descompone en su parte real y su parte imaginaria: $f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + 2x \cdot y \cdot i$, por lo que si se consideran rectas coordenadas del plano complejo imagen: $u = a$, $v = b$, entonces $a = u(x, y) = x^2 - y^2$ y $b = v(x, y) = 2xy$, se observa que provienen de hipérbolas en el plano complejo de partida. Las rectas coordenadas $a = u$, $b = v$ son ortogonales y por lo que también lo son sus preimágenes, las hipérbolas equiláteras $a = x^2 - y^2$ y $b = 2xy$.

Las rectas $x = a$, $y = b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, se transforman en parábolas, y las rectas $x = 0$, $y = 0$ se transforman en las semirectas \Re^- y \Re^+ respectivamente; la circunferencia $|z| = r$ se transforma en la circunferencia $|w| = r^2$, y las semirectas $\arg(z) = \theta$ en las semirectas $\arg(w) = 2 \cdot \theta$.

Transforma el primer cuadrante $x > 0$, $y > 0$, en el semiplano superior, y

transforma el semiplano superior en todo el plano.

6.2.3. La función $f(z) = z^n$

Se puede generalizar lo anterior estudiando la transformación $w = f(z) = z^n$, donde n es un número natural. La función $f(z) = z^n = r^n \cdot e^{n\theta i}$ se comporta de manera parecida. Por medio de esta transformación una circunferencia de centro el origen y radio r se transforma en una circunferencia de centro el origen y radio r^n : $\{z \in \mathbf{C}; |z| = r\} \rightarrow \{w \in \mathbf{C}; |w| = r^n\}$. Una recta que pase por el origen y forme un ángulo θ con la dirección positiva del eje real pasa a ser otra recta que pasa por el origen y forma un ángulo $n\theta$ con la dirección positiva del eje real: $\{z \in \mathbf{C}; \arg z = \theta\} \rightarrow \{w \in \mathbf{C}; \arg w = n\theta\}$. Por tanto la propiedad de conservar ángulos no se verifica en el origen, donde la derivada de la transformación es cero si n es mayor que uno. Una región angular de vértice en origen y amplitud $2\pi/n$ se transforma en todo \mathbf{C} .

6.2.4. La función exponencial $w = \exp(z) = e^z$

En el *ejemplo 6.1.2* se comprobó que la función exponencial es una transformación conforme en cada punto del plano complejo \mathbf{C} , pero no es conforme en \mathbf{C} pues no es inyectiva, aunque si lo es en cada banda horizontal abierta de anchura menor o igual a 2π .

Las rectas horizontales, $x = a$, se transforman en circunferencias de centro el origen y radio e^a , $|w| = e^a$. Los radios son mayores o menores que uno, $r = e^a$, según que la recta esté en el semiplano de los números complejos con parte real positiva o en el semiplano de los números complejos con parte real negativa.

Las rectas paralelas al eje real, $y = b$, se transforman en semirrectas de extremo en el origen, $\text{Arg } w = b$.

Cualquier banda paralela al eje real con altura 2π se transforma en todo el plano.

Se observa que se conserva la ortogonalidad.

6.2.5. La función $w = \cos(z)$

En el *ejemplo 6.1.3* se comprobó que la función $w = \cos(z)$ es conforme en todos los puntos $z \neq n\pi$ donde n es entero, y es conforme en la banda vertical $0 < x < \pi$.

Las rectas $x = a$ se transforman en hipérbolas y las rectas $y = b$ en elipses. Las rectas coordenadas se transforman en haces de hipérbolas y en haces de elipses cofocales.

De manera análoga pueden estudiarse el resto de funciones trigonométricas.

6.2.6. La función $w = \bar{z}$

Una función que no es conforme en ningún punto es $w = \bar{z}$ ya que no es holomorfa en ningún punto. Geométricamente representa una **simetría** respecto al eje real, y aunque la simetría conserva el valor absoluto de los ángulos, no conserva los ángulos, pues no conserva su orientación.

6.2.7. La función $w = 1/z$

La función $w = \frac{1}{z}$ es conforme en $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. Es posible extenderla a $\mathbf{C} \cup \{\infty\} =$

\bar{C} , mediante la correspondencia $f(0) = \infty$, $f(\infty) = 0$. Al ser $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \infty$ y

$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ la aplicación f es continua en el plano ampliado. Se puede probar

que es una aplicación conforme en \bar{C} .

Al escribir la transformación en polares: $w = \frac{1}{z} = 1/(re^{i\theta}) = (1/r) \cdot e^{-i\theta}$,

transforma la circunferencia de centro el origen y radio r , $|z| = r$, en la circunferencia de centro el origen y radio r^{-1} , $|w| = r^{-1}$, y las semirrectas $\arg(z) = \theta$ en las semirrectas $\arg(w) = -\theta$.

Rectas y circunferencias se transforman en rectas y circunferencias pues:

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} + i \frac{-y}{x^2+y^2} = u+iv, u = \frac{x}{x^2+y^2} \text{ y } v = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

al ser $z = 1/w$, se tiene también que:

$$x = \frac{u}{u^2+v^2} \text{ y } y = \frac{-v}{u^2+v^2}$$

En efecto, sustituyendo lo anterior y simplificando, se obtiene que la recta o circunferencia:

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0; a, b, c, d \in \mathfrak{R}$$

se transforma en:

$$d(u^2 + v^2) + bu - cv + a = 0$$

por lo que:

- a) Una circunferencia que pasa por el origen ($d = 0$) se transforma en una recta que no pasa por el origen

- b) Una circunferencia que no pasa por el origen se transforma en una circunferencia que no pasa por el origen
- c) Una recta ($a = 0$) que no pasa por el origen se transforma en una circunferencia que pasa por el origen
- d) Una recta ($a = 0$) que pasa por el origen ($d = 0$) se transforma en una recta que pasa por el origen

Como $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ la aplicación puede ser descrita por la composición de:

$$Z = \frac{1}{|z|^2} z, \quad w = \bar{z}$$

La primera es una inversión con respecto al círculo unidad $|z| = 1$. La imagen de un punto z no nulo es el punto Z tal que:

$$|Z| = \frac{1}{|z|} \quad y \quad \arg Z = \arg z$$

luego los puntos exteriores al círculo unidad se aplican sobre puntos interiores a él, excluido el cero, y recíprocamente; y cualquier punto de la circunferencia se transforma en sí mismo. La segunda transformación es la simetría respecto al eje real.

6.2.8. Otras transformaciones

La transformación $w = z + \frac{1}{z}$, es un sencillo ejemplo que nos permite comprobar que una circunferencia de centro el origen: $\{z \in \mathbf{C}; |z| = r, r \neq 1\}$, se

transforma en la elipse: $\frac{x^2}{\left(r + \frac{1}{r}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(r - \frac{1}{r}\right)^2} = 1$. Por tanto, dos circunferencias

con radios recíprocos se transforman en la misma elipse, mientras que las líneas rectas que pasan por el origen se transforman en hipérbolas.

Como resultado de componer la función exponencial y la transformación anterior se puede estudiar la transformación $w = \cosh(z)$. Puede utilizarse para obtener un campo electrostático debido a un cilindro elíptico, el campo electrostático debido a un plano cargado del que se ha suprimido una banda, el flujo de un líquido alrededor de un cilindro elíptico, el flujo de un líquido a través de un corte en un plano, etc.

Otro ejemplo es la **transformación de Schwarz-Christoffel**. Se supone que en el plano complejo se tiene un polígono cuyos lados cambian de dirección un ángulo $\alpha_i \cdot \pi$ cuando se pasa por el i -ésimo vértice, moviéndose sobre la frontera del polígono de manera que el interior quede a la izquierda. La mitad superior del plano se aplica sobre el interior de este polígono por medio

de la transformación: $w = A \cdot \int \frac{dz}{(z - z_1)^{\alpha_1} (z - z_2)^{\alpha_2} \dots (z - z_n)^{\alpha_n}} + B$, donde $z_1,$

..., z_n , son los puntos del eje real de partida que se aplican sobre los vértices del polígono, y donde A y B son constantes que quedan fijadas según la escala y situación del polígono. Esta transformación se utiliza, por ejemplo, para hallar la transformación analítica que resuelve el problema de determinar el campo electrostático alrededor de un conductor cilíndrico cargado con sección poligonal.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 6.2.1: Hallar la imagen del cuadrado de vértices $a = 1$, $b = 1 + i$, $c = i$ y $d = 0$, mediante la aplicación $f(z) = (1 + i) \cdot z + 3$.

La aplicación $f(z) = (1 + i) \cdot z + 3$ transforma el cuadrado de vértices $a = 1$, $b = 1 + i$, $c = i$ y $d = 0$ en el cuadrado de vértices $a' = 4 + i$, $b' = 3 + 2i$, $c' = 2 + i$ y $d' = 3$. Esta transformación puede descomponerse como composición de:

$$Z = (1 + i) \cdot z \text{ y } w = Z + 3$$

que son, respectivamente, una semejanza y una traslación.

Al ser $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, la semejanza, a su vez, es composición de la homotecia, de factor de homotecia $\sqrt{2}$, y de la rotación, de centro el origen y de ángulo $\frac{\pi}{4}$.

Ejemplo 6.2.2: Mediante la aplicación $f(z) = e^z$, comprobar que la región del plano complejo:

- a) $A = \{z = x + yi; x > 0, 0 < y < \pi\}$ se transforma en $\{w = u + iv; |w| > 1, v > 0\}$
- b) $B = \{z = x + yi; x < 0, 0 < y < \pi\}$ se transforma en $\{w = u + iv; |w| < 1, v > 0\}$
- c) $C = \{z = x + yi; 0 < y < \pi\}$ se transforma en $\{w = u + iv; v > 0\}$.

Se sabe que las rectas paralelas al eje de ordenadas, $x = a$, se transforman en circunferencias de centro el origen y radio e^a , y las rectas paralelas al eje de abscisas, $y = b$, se transforman en semirrectas de extremo el origen y argumento b .

Las fronteras de las regiones estudiadas son, por tanto, $x = 0$, $y = 0$ e $y = \pi$; $x = 0$ se transforma en la circunferencia de radio uno y centro el origen, $y = 0$ en el semieje real y positivo, $y = \pi$ en el semieje real y negativo. Si $x > 0$ se obtienen circunferencias de radio mayor que uno y si $0 < y < \pi$ se obtienen semirrectas de argumentos entre 0 y π . Así, la región A se transforma en el exterior del semicírculo de radio uno y ordenadas positivas. La región B se

transforma en el interior del semicírculo de radio uno y ordenadas positivas, y la región C en el semiplano de ordenadas positivas.

Ejemplo 6.2.3: Sean dos circunferencias tangentes C_1 y C_2 (siendo C_1 interior a C_2) y una cadena de circunferencias tangentes entre sí y a C_1 y C_2 . Demostrar que los puntos de tangencia están todos ellos sobre una misma circunferencia.

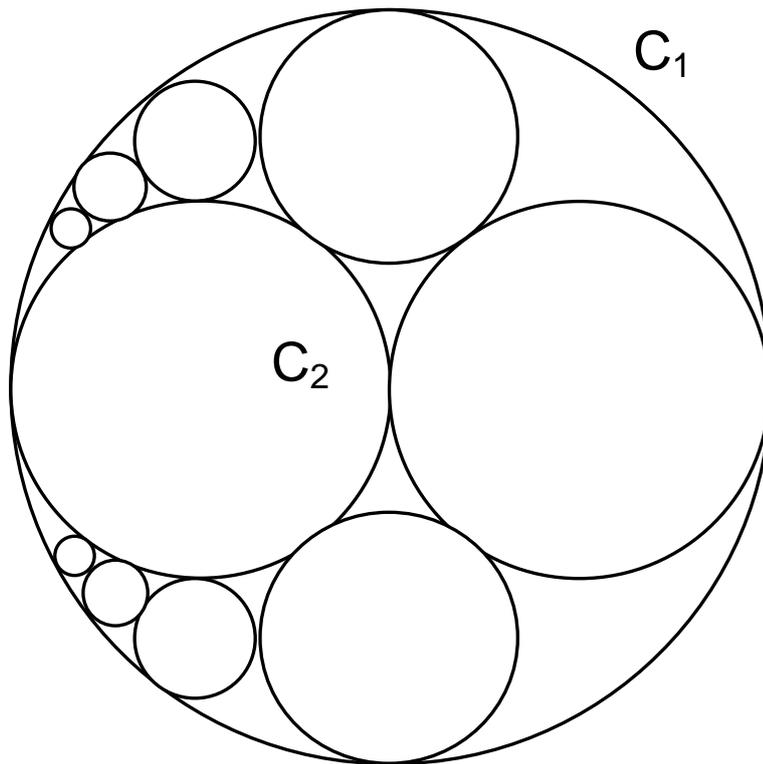


Figura 6.1: Ejemplo 6.2.3

Sea $P = C_1 \cap C_2$ el punto de tangencia y sea $T(z) = \frac{1}{z-P}$. Como $T(P) = \infty$, esta inversión transforma las circunferencias C_1 y C_2 en rectas paralelas, y la cadena de circunferencias tangentes en un haz de circunferencia tangentes a esas dos rectas paralelas, luego sus puntos de tangencia están en otra recta paralela a $T(C_1)$ y a $T(C_2)$, que la transformación inversa transforma en una circunferencia que pasa por los puntos de tangencia del haz original.

Ejercicios

6.5. Sean dos circunferencias secantes C_1 y C_2 y una cadena de circunferencias tangentes entre sí y a C_1 y C_2 . Demostrar que los puntos de tangencia están todos ellos sobre una misma circunferencias que pasa por los puntos de intersección entre C_1 y C_2 .

6.6. Comprobar que $f(z) = \frac{1}{z}$ transforma:

a) La recta $x = 1/2$ en la circunferencia $(u - 1)^2 + v^2 = 1$.

b) La recta $y = 1/2$ en la circunferencia $u^2 + (v + 1)^2 = 1$.

c) La recta $x = a$ en la circunferencia $-a(u^2 + v^2) + u = 0$.

d) La recta $y = b$ en la circunferencia $u^2 + (v + 1/(2b))^2 = 1/(2b)^2$.

6.7. Hallar la imagen del círculo abierto de centro el origen y radio uno mediante la transformación: $J(z) = z + \frac{1}{z}$ y comprobar que J lo transforma en el plano complejo ampliado excepto el segmento $[-2, 2]$: $\mathbf{C} \cup \infty / [-2, 2]$.

6.8. Comprobar que $f(z) = \log z$ transforma $\{z \in \mathbf{C}; e^a < |z| < e^b, \alpha < \arg z < \beta\}$ en $\{w \in \mathbf{C}; a < \operatorname{Re} w < b, \alpha < \operatorname{Im} w < \beta\}$ para $a, b \in \mathfrak{R}$ y $0 < \alpha < \beta < 2\pi$.

6.3. TRANSFORMACIÓN BILINEAL O DE MÖBIUS

Un tipo particular de transformación conforme es la transformación bilineal, homografía o aplicación de *Möbius*, que se estudia de forma especial,

analizando sus propiedades y su comportamiento frente a las razones dobles.

Debe su nombre a *A. F. Möbius*, (1790 - 1860), gran geómetra del siglo XIX, al que también se debe la conocida “banda de *Möbius*”.

Definición 6.3.1:

Una transformación de la forma: $w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, a, b, c , y $d \in \mathbf{C}$, se

denomina transformación lineal fraccionaria. Recibe el nombre de **transformación de Möbius**, **transformación bilineal** u **homografía** en el caso de que además verifique la relación $ad - bc \neq 0$.

La condición $ad - bc \neq 0$ garantiza que la transformación no sea constante.

La denominación de “bilineal” se debe a que puede escribirse también de la forma $czw + dw - az - b = 0$, que es una ecuación lineal en cada una de las variables z y w .

6.3.1. Propiedades básicas

Se observa que $w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ tiene un polo en el punto $z = -d/c$.

Proposición 6.3.1:

Si $ad - bc = 0$ entonces la transformación T es constante, y si $ad - bc$ es distinto de cero entonces T es conforme en $z \neq -d/c$.

En efecto, $T'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$, que existe si $z \neq -d/c$ y no se anula si $ad -$

$bc \neq 0$, por lo que si $ad - bc$ es distinto de cero entonces T es una

transformación conforme para todo punto z , $z \neq -d/c$. Si $ad - bc = 0$ entonces se anula la derivada en todos los puntos $z \in \mathbf{C}$ por lo que T es la transformación constante. \square

Proposición 6.3.2:

La transformación de Möbius $w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ es inyectiva en $\mathbf{C}/\{-d/c\}$ y

en consecuencia es conforme en $\mathbf{C}/\{-d/c\}$.

Demostración

$$T(z_1) = T(z_2) \Rightarrow \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = \frac{az_2 + b}{cz_2 + d} \Rightarrow (az_1 + b)(cz_2 + d) = (cz_1 + d)(az_2 + b)$$

$\Rightarrow (acz_1z_2 + adz_1 + bcz_2 + bd - (acz_1z_2 + adz_2 + bcz_1 + db)) = adz_1 + bcz_2 - adz_2 - bcz_1 = 0 \Rightarrow ad(z_1 - z_2) - bc(z_1 - z_2) = 0 \Rightarrow (z_1 - z_2)(ad - bc) = 0$ y como $ad - bc \neq 0$ entonces $z_1 - z_2 = 0 \Rightarrow z_1 = z_2$, por lo que T es inyectiva, y en consecuencia es conforme en $\mathbf{C}/\{-d/c\}$. \square

Aplica $\mathbf{C}/\{-d/c\}$ en $\mathbf{C}/\{a/c\}$. \square

Si se define $T(-d/c) = \infty$ y $T(\infty) = a/c$ (si $c = 0$ basta hacer que $T(\infty) = \infty$), entonces se puede asegurar que la transformación de Möbius T es conforme en el plano complejo ampliado $T: \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \infty \rightarrow \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \infty$.

Si λ es un número complejo no nulo, la transformación $w = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d}$ es la

misma que $w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, por lo que $ad - bc$ no está determinado por T ,

sino que puede tomar cualquier valor no nulo, $\lambda(ad - bc)$, y de las cuatro variables, a, b, c, d , sólo tres son independientes.

Por eso en ocasiones se impone la condición de **normalización**: $ad - bc = 1$, que no supone ninguna restricción y permite fijar unívocamente los coeficientes a, b, c, d .

El hecho algebraico de que una transformación bilineal contenga tres parámetros complejos arbitrarios se traduce en que es posible elegir libremente las imágenes de tres puntos cualesquiera del plano complejo ampliado, y con ello determinar una transformación de *Möbius*.

Tiene interés discutir el número de puntos fijos que puede tener toda transformación bilineal, vista como una transformación del plano complejo ampliado en sí mismo: $T: \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \infty \rightarrow \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \infty$.

Proposición 6.3.3:

Una transformación de *Möbius* tiene siempre un punto fijo, puede tener dos y si tiene tres es la identidad.

Para demostrarlo se buscan los puntos fijos de $T(z)$:

Si $c = 0$ entonces $z = b/(d - a)$ es un punto fijo y otro es el punto del infinito. Las traslaciones sólo dejan fijo el punto del infinito, los giros y las homotecias, además el centro de giro o el de homotecia.

Si c es distinto de cero entonces $T(\infty) \neq \infty$ y

$$T(z) = \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d} = z \Rightarrow cz^2 + (d - a)z - b = 0.$$

Una ecuación de segundo grado, en el campo complejo, tiene dos soluciones (quizás confundidas si $(d - a)^2 + 4cb = 0$) lo que prueba que tiene siempre un punto fijo como mínimo, puede tener dos, y si tuviera tres sería la

transformación identidad. \square

Proposición 6.3.4:

El conjunto $M = \{T; T \text{ es transformación de Möbius}\}$ tiene estructura de grupo con la operación composición de aplicaciones.

Demostración:

Se debe probar que la composición de dos transformaciones de este tipo sigue siendo de este tipo, y que la inversa de una transformación de Möbius es también una transformación de Möbius.

La inversa de T se obtiene despejando z , $T^{-1}(z) = \frac{d \cdot z - b}{-c \cdot z + a}$, y es otra

transformación de Möbius.

La identidad, $T(z) = z$, es una transformación de Möbius. Por tanto las transformaciones de Möbius forman un grupo para la composición. \square

6.3.2. Tipos particulares de transformaciones bilineales

Casos particulares de este tipo de transformaciones son las **aplicaciones lineales**: $T(z) = az + b$, donde $d = 1$ y $c = 0$.

La composición de dos aplicaciones lineales es una aplicación lineal y su inversa es $T^{-1}(z) = \frac{z - b}{a}$ es otra aplicación lineal. Forman un subgrupo de las aplicaciones bilineales. Son aplicaciones conformes en \mathbf{C} .

Transforman el punto del infinito en el punto del infinito, es decir, el punto del infinito es un punto fijo de las aplicaciones lineales. Entre ellas se distinguen:

Traslaciones: $T_b(z) = z + b$, donde b es un número complejo, $c = 0$ y $d = 1$.

Su único punto invariante es el punto del infinito. $T^{-1}(z) = z - b$.

Rotaciones: $R(z) = az$, con $|a| = 1$, con $b = c = 0$ y $d = 1$.

Homotecias: $H(z) = r \cdot z$, con $r \in \mathfrak{R}$ y $r > 0$ con $b = c = 0$ y $d = 1$.

Semejanzas directas: Los productos $S_a(z) = a \cdot z$ con $b = c = 0$ y $d = 1$, composición de una rotación de ángulo el argumento de a y una homotecia de razón el módulo de a .

Las aplicaciones lineales transforman rectas en rectas y circunferencias en circunferencias.

Toda transformación lineal es composición de una traslación, un giro y una homotecia.

Otro tipo particular es la *inversión*: $in(z) = 1/z$, cuya aplicación inversa es ella misma. La inversión, como se vio en el apartado anterior transforma circunferencias generalizadas (rectas o circunferencias) en circunferencias generalizadas (rectas o circunferencias).

Se puede comprobar que cada una de las transformaciones lineales es composición de dos inversiones en rectas o en circunferencias, luego toda transformación de *Möbius* es composición de inversiones geométricas. Puede demostrarse que cuatro inversiones bastan para descomponer cualquier transformación de *Möbius*, y para algunas es suficiente con dos. El estudio de estas descomposiciones permite clasificar las transformaciones bilineales en cuatro tipos: elípticas, parabólicas, hiperbólicas y loxodrómicas, con

interesantes propiedades. Este estudio puede verse en *Needham*.¹

Proposición 6.3.5:

Toda transformación de *Möbius* es composición de traslaciones, rotaciones, homotecias e inversiones.

Demostración:

La transformación: $T(z) = \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d}$ es composición de la traslación de vector d/c , $T_{d/c}$; la inversión, in ; semejanza directa de factor $\frac{bc-ad}{c^2}$, $S_{\frac{bc-ad}{c^2}}$; y la traslación de vector a/c , $T_{a/c}$; es decir $T = T_{a/c} \circ S_{\frac{bc-ad}{c^2}} \circ in \circ T_{d/c}$.

En efecto, sea $T(z) = \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d}$ con $ad - bc \neq 0$.

Si $c = 0$ entonces $T(z) = (a/d)z + (b/d) \Rightarrow T = T_{b/d} \circ S_{a/d}$.

$$\begin{aligned} \text{Si } c \neq 0 \Rightarrow T(z) &= \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d} = \frac{1}{c} \left(\frac{acz + bc}{cz + d} \right) = \frac{1}{c} \left(\frac{acz + ad - ad + bc}{cz + d} \right) = \\ &= \frac{1}{c} \left(a + \frac{bc - ad}{cz + d} \right) = \frac{1}{c} \left(a + \frac{bc - ad}{c \left(z + \frac{d}{c} \right)} \right) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}} = \\ &= (T_{a/c} \circ S_{\frac{bc-ad}{c^2}} \circ in \circ T_{d/c})(z). \quad \square \end{aligned}$$

Como consecuencia, al ser toda transformación de *Möbius* composición de transformaciones lineales (que transforman rectas en rectas y circunferencias en circunferencias) y de inversiones (que transforman rectas o circunferencias en rectas o circunferencias) se obtiene que una transformación

¹ Needham, T.: *Visual Complex Analysis*. Clarendon Press. 1997.

de *Möbius* transforma circunferencias o rectas en circunferencias o rectas.

En términos de proyección estereográfica transforma circunferencias de la esfera de *Riemann*, incluso las que pasan por el polo, en circunferencias de la esfera de *Riemann*. Y dadas dos circunferencias o rectas cualesquiera existe una transformación de *Möbius* que transforma la una en la otra. Dicho con más precisión:

Corolario 6.3.6:

Si T es una transformación bilineal y D es una circunferencia o una recta, entonces $T(D)$ es una circunferencia o una recta.

Proposición 6.3.7:

Dadas dos circunferencias o rectas D y D' en $\bar{\mathbf{C}}$ existe una transformación de *Möbius*, T , tal que $T(D) = D'$.

Además se puede especificar que T aplique tres puntos cualesquiera de D sobre otros tres de D' . Si se especifican las imágenes de tres puntos distintos de D la transformación T es única.

6.3.3. Razón doble

Proposición 6.3.8:

Sean z_1 , z_2 , y z_3 puntos de $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \infty$ distintos entre sí. Existe una única transformación bilineal T tal que $T(z_1) = 1$; $T(z_2) = 0$; $T(z_3) = \infty$.

Demostración:

Se prueba la *unicidad* utilizando que si tiene tres puntos fijos debe ser la identidad. Si $T(z_i) = S(z_i)$ para i igual a 1, 2, y 3, entonces $(S^{-1} \circ T)(z_i) = (S^{-1} \circ S)(z_i)$

= z_i por lo que $S^{-1} \circ T$ deja tres puntos fijos y en consecuencia es la identidad, y por tanto $T = S$.

Para probar la *existencia*, se construye la transformación T :

$$T(z) = \frac{\frac{z - z_2}{z - z_3}}{\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}} = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \cdot \frac{z - z_2}{z - z_3},$$

en el caso de que los tres puntos pertenezcan al plano complejo, y con las debidas modificaciones si alguno de ellos vale infinito:

$$\text{Si } z_1 = \infty \text{ entonces: } T(z) = \frac{z - z_2}{z - z_3}.$$

$$\text{Si } z_2 = \infty \text{ entonces: } T(z) = \frac{z_1 - z_2}{z - z_3}.$$

$$\text{Si } z_3 = \infty \text{ entonces: } T(z) = \frac{z - z_2}{z_1 - z_2}.$$

La transformación T así definida verifica que $T(z_1) = 1$, $T(z_2) = 0$ y $T(z_3) = \infty$. \square

Corolario 6.3.9:

Dados tres puntos de $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ distintos dos a dos: z_1, z_2, z_3 , y otros tres puntos, w_1, w_2, w_3 , también en $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ y distintos dos a dos, existe una única transformación bilineal que transforma cada z_k en w_k , $T(z_k) = w_k$.

Para demostrarlo basta construirla. Sean T y S las transformaciones tales que: $T: (z_1, z_2, z_3) \rightarrow (1, 0, \infty)$, y $S: (w_1, w_2, w_3) \rightarrow (1, 0, \infty)$, entonces la transformación: $S^{-1} \circ T$ transforma $(S^{-1} \circ T)(z_k) = w_k$. Si los puntos pertenecen a \mathbf{C} , su expresión es:

$$\frac{w_1 - w_3}{w_1 - w_2} \cdot \frac{w - w_2}{w - w_3} = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \cdot \frac{z - z_2}{z - z_3},$$

de donde despejando se obtiene w en función de z . \square

Si alguno de los puntos es el del infinito se sustituye T o S por la expresión correspondiente.

Dicha transformación permite introducir un nuevo concepto, el de “razón doble” o razón armónica:

Definición 6.3.2:

Si z_0, z_1, z_2 y z_3 son puntos de \bar{C} , se llama **razón doble** de z_0, z_1, z_2 y z_3 a la imagen de z_0 bajo la única transformación de Möbius T que aplica $T(z_1) = 1$; $T(z_2) = 0$; $T(z_3) = \infty$.

Se representa por (z_0, z_1, z_2, z_3) , y su expresión es:

$$(z_0, z_1, z_2, z_3) = \frac{\frac{z_0 - z_2}{z_0 - z_3}}{\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}} = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \cdot \frac{z_0 - z_2}{z_0 - z_3}$$

La razón doble es invariante por las transformaciones de Möbius, es decir, si T es una transformación de Möbius y se toman cuatro puntos arbitrarios, z_0, z_1, z_2 y z_3 , su razón doble es igual a la razón doble de sus transformados por T : $(z_0, z_1, z_2, z_3) = (T(z_0), T(z_1), T(z_2), T(z_3))$.

Proposición 6.3.10:

Sea T una transformación de Möbius, y sean z_0, z_1, z_2 y z_3 cuatro puntos, entonces $(z_0, z_1, z_2, z_3) = (T(z_0), T(z_1), T(z_2), T(z_3))$.

La demostración se basa en operar con la definición de razón doble.

La razón doble se empezó a estudiar en el siglo XVII, en el contexto de la Geometría Proyectiva, donde desempeña un papel importante, como el principal invariante de las proyectividades.

Corolario 6.3.11:

La ecuación de la única transformación de *Möbius* que transforma z_1 en w_1 , z_2 en w_2 y z_3 en w_3 viene dada en términos de razón doble por $(w, w_1, w_2, w_3) = (z, z_1, z_2, z_3)$.

En efecto, la expresión:

$$\frac{w_1 - w_3}{w_1 - w_2} \cdot \frac{w - w_2}{w - w_3} = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \cdot \frac{z - z_2}{z - z_3}$$

se puede abreviar como $(w, w_1, w_2, w_3) = (z, z_1, z_2, z_3)$, lo que se expresa diciendo que las transformaciones bilineales conservan las razones dobles.

Corolario 6.3.12:

$T(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$ es la única transformación de *Möbius* en $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \infty$ que transforma z_1 en 1, z_2 en 0 y z_3 en el punto del infinito.

$$T(z) = (z, z_1, z_2, z_3) = \frac{\frac{z - z_2}{z_1 - z_2}}{\frac{z - z_3}{z_1 - z_3}} = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \cdot \frac{z - z_2}{z - z_3}.$$

Si se considera que “circunferencia generalizada” puede ser tanto una circunferencia como una línea recta, ya que si una circunferencia generalizada en $\bar{\mathbf{C}}$ pasa por el punto del infinito entonces es una recta, pues la razón doble permite caracterizar el hecho de que cuatro puntos pertenezcan a una misma circunferencia, pues cuatro puntos de $\bar{\mathbf{C}}$ pertenecen a una misma

circunferencia cuando su razón doble es un número real.

Corolario 6.3.13:

Sean z_1, z_2 y $z_3 \in \gamma$ (circunferencia o recta) $\subset \mathbf{C}$. Si $z_0 \in \gamma$, entonces $T(z_0) = (z_0, z_1, z_2, z_3) \in \mathfrak{R} \cup \{\infty\}$.

Se define $T(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$ que transforma γ (circunferencia o recta) en γ^* (circunferencia o recta). Pero $T(z_1) = 1$; $T(z_2) = 0$; $T(z_3) = \infty$, por lo que γ^* es la recta $\mathfrak{R} \cup \{\infty\}$, y si $z_0 \in \gamma$, entonces $T(z_0) \in \mathfrak{R} \cup \{\infty\}$. \square

Corolario 6.3.14:

Sean z_1, z_2 y $z_3 \in \gamma$ (circunferencia o recta) $\subset \mathbf{C}$. Si z_0 no pertenece a γ , entonces $Im(T(z_0))$ es distinta de cero.

Pues, en efecto si z_0 no pertenece a $\gamma \Leftrightarrow z_0 \in \mathbf{C}/\gamma \Leftrightarrow T(z_0) \notin \mathfrak{R} \cup \{\infty\} \Leftrightarrow Im(T(z_0)) \neq 0 \Leftrightarrow Im((w_0, w_1, w_2, w_3)) \neq 0$. \square

Esta consecuencia proporciona la clave para definir los conceptos de parte derecha y de parte izquierda de una recta y de una circunferencia.

6.3.4. Principio de simetría y principio de orientación

De forma natural es posible hacerse la siguiente pregunta: ¿Qué sucede con el interior y el exterior de los recintos limitados por dichas circunferencias? Para poder responder a dicha cuestión es preciso introducir nuevos conceptos, el de **simetría** y el de **orientación**.

En $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ no es obvio el significado de las palabras interior y exterior de una circunferencia o de una recta; para poder darles un significado es preciso introducir el concepto de orientación.

Definición 6.3.3:

Una **orientación** en una circunferencia o recta γ de $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ es una terna ordenada de puntos de γ distintos entre sí: (z_1, z_2, z_3) .

De forma intuitiva se observa que dichos puntos dan una dirección sobre γ que correspondería a ir de z_1 a z_2 y de z_2 a z_3 . Se observa que con únicamente dos puntos no se tiene una orientación.

En $\mathfrak{R} \cup \{\infty\}$ existen dos orientaciones posibles: $(1, 0, \infty)$ y $(1, \infty, 0)$.

Definición 6.3.4:

Si γ es una circunferencia o una recta y (z_1, z_2, z_3) una orientación en γ , se denomina **“lado derecho”** o **región a la derecha de γ** al conjunto $\{z \in \mathbf{C} \cup \{\infty\}; \text{Im}(z, z_1, z_2, z_3) > 0\}$, y **“lado izquierdo”** o **región a la izquierda de γ** al conjunto $\{z \in \mathbf{C} \cup \{\infty\}; \text{Im}(z, z_1, z_2, z_3) < 0\}$ según la orientación dada.

Así, por ejemplo, en $\mathfrak{R} \cup \{\infty\}$, dada la orientación $(1, 0, \infty)$ su parte derecha es el semiplano superior. Si se toma la orientación $(1, \infty, 0)$ el semiplano superior es la parte izquierda. ¿Y con la orientación $(1, 2, -1)$? Esta orientación coincide con la orientación $(1, \infty, 0)$.

De esta forma la respuesta a la pregunta planteada anteriormente viene dada por el **principio de orientación** que dice:

Proposición 6.3.15.

Si γ_1 y γ_2 son dos circunferencias de $\bar{\mathbf{C}}$ y T es una transformación de **Möbius** tal que transforma la una en la otra, si se fija una orientación en γ_1 entonces T aplica el lado derecho de γ_1 sobre el lado derecho de γ_2 , y el lado

izquierdo de γ_1 sobre el lado izquierdo de γ_2 , respecto de la orientación transformada.

Esto es una consecuencia de que las transformaciones de *Möbius* conservan las razones dobles. Así si (z_1, z_2, z_3) determinan una orientación en γ , y T es una transformación de *Möbius* entonces la parte derecha (y respectivamente, la parte izquierda) de γ según esa orientación, se transforma en la parte derecha (y respectivamente, la parte izquierda) de $T(\gamma)$ según la orientación $(T(z_1), T(z_2), T(z_3))$.

Definición 6.3.5:

Sea γ una circunferencia que pase por los puntos z_1, z_2 y z_3 . Se dice que los puntos z y z^* son **simétricos** respecto de γ si:

$$(z^*, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)}.$$

En apariencia la definición no depende únicamente de la circunferencia γ sino también de los puntos z_1, z_2, z_3 , pero esta dependencia es aparente.

Si γ es una recta los puntos z y z^* son **simétricos** si equidistan de γ y se encuentran sobre la misma recta perpendicular a γ . Es decir, z y z^* son simétricos respecto de la recta γ , si γ es la mediatriz del segmento $[z, z^*]$

Si γ es una circunferencia en \mathbf{C} de centro a y radio r , entonces los puntos z y z^* son **simétricos** respecto de la circunferencia γ si verifican la relación:

$$(z^* - a) \cdot (\bar{z} - \bar{a}) = r^2.$$

Conocido uno de los puntos puede construirse geoméricamente el otro mediante una figura, ya que a, z y z^* están en la misma semirrecta. En efecto:

$\arg((z^* - a) \cdot (\bar{z} - \bar{a})) = \arg(r^2) \Rightarrow \arg(z^* - a) + \arg(\bar{z} - \bar{a}) = 0$ y por tanto:

$$\arg(z^* - a) = \arg(z - a).$$

Por otro lado, se obtiene una semejanza de triángulos, pues:

$$|(z^* - a)| \cdot |\bar{z} - \bar{a}| = |r^2| \Rightarrow |z^* - a| \cdot |z - a| = r^2 \Rightarrow \frac{|z^* - a|}{r} = \frac{r}{|z - a|}.$$

En general:

$$z^* = \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}} + a.$$

Se comprueba que:

- El punto simétrico respecto de la circunferencia γ del punto del infinito es el centro de la circunferencia.
- El punto simétrico respecto de la circunferencia γ de un punto de la circunferencia (o de la recta) es él mismo.
- El simétrico de z respecto de $\Re \cup \{\infty\}$ es su conjugado: \bar{z} .
- Si z^* es el simétrico de z respecto de γ , entonces z es simétrico de z^* respecto de γ .

Circunferencias de Apolonio

La expresión: $\frac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = \lambda$, con $\lambda \in \Re^+$, representa una recta si λ es igual a

uno, y una circunferencia si λ es distinto de uno.

En efecto, si $\lambda = 1 \Rightarrow |z - z_1| = |z - z_2| \Rightarrow$

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 \Rightarrow$$

$$2(x_1 - x_2) \cdot x + 2(y_2 - y_1) \cdot y + x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 = 0,$$

que es la ecuación de la recta mediatriz del segmento $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, por lo que z_1 y z_2 son simétricos respecto de la recta $|z - z_1| = |z - z_2|$.

Si $\lambda \neq 1$ se puede comprobar que la ecuación $|z - z_1| = \lambda \cdot |z - z_2|$ representa la circunferencia de centro $a = \frac{z_1 - \lambda z_2}{1 - \lambda^2}$ y radio $r = \frac{\lambda(z_1 - z_2)}{1 - \lambda^2}$.

Definición 6.3.6:

Se denomina **circunferencia de Apolonio** a la circunferencia: $\frac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = \lambda$

, con $\lambda \in \mathfrak{R}^+$.

Proposición 6.3.16:

Los puntos z_1 y z_2 son simétricos respecto de la circunferencia de

Apolonio: $\frac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = \lambda, \lambda \neq 1$, de centro $a = \frac{z_1 - \lambda^2 z_2}{1 - \lambda^2}$ y radio $r = \frac{\lambda(z_1 - z_2)}{1 - \lambda^2}$.

Demostración:

El simétrico de z , z^* es:

$$z^* = \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}} + a$$

por lo que el simétrico de z_2 , z_2^* , es:

$$z_2^* = \frac{r^2}{\bar{z}_2 - \bar{a}} + a = \frac{(\lambda(z_1 - z_2))^2}{(1 - \lambda^2)^2} + \frac{z_1 - \lambda^2 z_2}{1 - \lambda^2} = \frac{\bar{z}_2 - \frac{z_1 - \lambda^2 z_2}{1 - \lambda^2}}{\bar{z}_2 - \frac{z_1 - \lambda^2 z_2}{1 - \lambda^2}}$$

$$\frac{\lambda^2(z_1 - z_2)^2 + (z_1 - \lambda^2 z_2)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{(1 - \lambda^2)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)} = z_1. \quad \square$$

Como consecuencia se tiene:

Corolario 6.3.17:

Si los puntos z_1 y z_2 son dos simétricos respecto de la circunferencia γ , la ecuación de γ puede expresarse en la forma: $\frac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = \lambda$, con λ constante e

independiente de z , $\lambda = \frac{|z_1 - z_2|}{r}$.

Demostración:

Sean z_1 y z_2 dos puntos simétricos fijados respecto de la circunferencia γ , de centro a y radio r . Entonces:

$$(z_1 - a) \cdot (\bar{z}_2 - \bar{a}) = r^2 \Rightarrow z_1 = \frac{r^2}{\bar{z}_2 - \bar{a}} + a.$$

Sea z un punto cualquiera de la circunferencia. Se va a probar que

$\frac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = \lambda$ es independiente de z . En efecto:

$$\begin{aligned} \frac{|z - z_1|}{|z - z_2|} &= \frac{\left| z - \left(\frac{r^2}{\bar{z}_2 - \bar{a}} + a \right) \right|}{|z - z_2|} = \frac{|(z - a)(\bar{z}_2 - \bar{a}) - r^2|}{|(z - z_2)(\bar{z}_2 - \bar{a})|} = \\ &= \frac{|(z - a)(\bar{z}_2 - \bar{a}) - (z - a)(\bar{z} - \bar{a})|}{|(z - z_2)(\bar{z}_2 - \bar{a})|} = \frac{|(z - a)(\bar{z}_2 - \bar{a} - \bar{z} + \bar{a})|}{|(z - z_2)(\bar{z}_2 - \bar{a})|} = \frac{|z_2 - a|}{r} = \text{cte.} \quad \square \end{aligned}$$

Proposición 6.3.18:

El **principio de simetría** dice que si T es una transformación de Möbius

que aplica la circunferencia generalizada γ_1 sobre la circunferencia generalizada γ_2 , todo par de puntos simétricos respecto de γ_1 se transforman por T en un par de puntos simétricos respecto de γ_2 .

Demostración:

Es sencillo comprobar que las transformaciones lineales conservan la simetría. Bastaría, pues, probar que la inversión: $in(z) = 1/z$, la conserva.

Sea $\frac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = \lambda$ una circunferencia de la que se sabe que z_1 y z_2 son

simétricos respecto de ella. Su transformada por la inversión $w = 1/z$ es:

$$\frac{\left| \frac{1}{w} - z_1 \right|}{\left| \frac{1}{w} - z_2 \right|} = \lambda \Rightarrow \frac{|1 - z_1 w|}{|1 - z_2 w|} = \lambda \Rightarrow \frac{|z_1| \left| w - \frac{1}{z_1} \right|}{|z_2| \left| w - \frac{1}{z_2} \right|} = \lambda \Rightarrow \frac{\left| w - \frac{1}{z_1} \right|}{\left| w - \frac{1}{z_2} \right|} = \frac{\lambda |z_2|}{|z_1|} = \text{constante.}$$

En consecuencia la curva transformada es también una circunferencia para la que los puntos $\frac{1}{z_1} = w_1$ y $\frac{1}{z_2} = w_2$ son simétricos respecto a ella, por lo que la inversión conserva la simetría, y por tanto, las transformaciones bilineales conservan la simetría.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 6.3.1: Sea D el disco unidad, $B_1(0)$. Encontrar todas las transformaciones de Möbius, T , que transformen al disco unidad en sí mismo.

Algún punto $a \in D$ tendrá que transformarse en el origen, $T(a) = 0$, y mediante la conservación de la simetría se puede garantizar que el simétrico de

a se transformará en el simétrico del centro, esto es, en el punto del infinito:

El simétrico de a es $a^* = \frac{1}{\bar{a}}$ y $T(a^*) = T(1/\bar{a}) = \infty$.

Por tanto $T(z) = k \cdot \frac{z-a}{z-1/\bar{a}} = k \cdot \frac{z-a}{a \cdot z-1}$ para algún número complejo k .

Si T es una transformación de Möbius tal que $T(D) = D$ entonces transformará el borde de D en el borde de D , por lo que si $|z| = 1$ entonces $|T(z)| = 1$. Como $T(1)$ ha de estar en el borde del disco D ,

$$T(1) = k \cdot \frac{1-a}{a \cdot 1-1} \Rightarrow |T(1)| = |k| \cdot \left| \frac{1-a}{a \cdot 1-1} \right| = |k|$$

Por lo que k tiene que tener módulo 1, luego será de la forma $k = e^{i\varphi}$ para algún número real φ . En consecuencia $T(z) = e^{i\varphi} \cdot \frac{z-a}{az-1}$ para cierto número real φ y cierto número complejo a del disco unidad, por lo que se puede elegir de forma arbitraria un parámetro real, φ , y otro complejo, a . Se puede entonces afirmar que las transformaciones bilineales del disco en sí mismo tienen tres grados de libertad. Esos parámetros permiten elegir qué punto se transforma en el origen y cuál es el argumento de la derivada en ese punto.

Ejemplo 6.3.2: Encontrar una transformación de Möbius T que transforme $T(1) = 1$, $T(2) = 2$ y $T(7) = 3$.

Se sustituyen estos puntos en la expresión:

$$\frac{w_1 - w_3}{w_1 - w_2} \cdot \frac{w - w_2}{w - w_3} = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \cdot \frac{z - z_2}{z - z_3}$$

y se obtiene: $\frac{1-3}{1-2} \cdot \frac{w-2}{w-3} = \frac{1-7}{1-2} \cdot \frac{z-2}{z-7} \Rightarrow 2 \cdot \frac{w-2}{w-3} = 6 \cdot \frac{z-2}{z-7} \Rightarrow w = \frac{7z-4}{2z+1}$.

Si $z = x \in \mathfrak{R}$ entonces se transforma en $w = \frac{7x-4}{2x+1} \in \mathfrak{R}$. luego transforma

la recta real en la recta real. Si se quiere saber, por ejemplo, en qué se transforma la circunferencia de centro el origen y radio uno, se buscan los transformados de tres puntos de dicha circunferencia: $T(1) = 1$, $T(i) = 2 + 3i$ y $T(-1) = 11$. Están sobre la circunferencia de centro 6 y radio 5: $|z| = 1 \rightarrow |w - 6| = 5$.

Ejemplo 6.3.3: Hallar el transformado de la circunferencia de centro el origen y radio 1, y de la recta real, mediante la transformación: $w = \frac{-z+i}{z+i}$.

Se buscan los transformados de tres puntos de la recta real, y se obtiene: $T(1) = i$, $T(0) = 1$ y $T(-1) = -i$. Los transformados no están alineados por lo que están en una circunferencia, la circunferencia de centro el origen y radio 1.

Se buscan ahora los transformados de tres puntos de la circunferencia de centro el origen y radio uno: $T(1) = i$, $T(i) = 0$ y $T(-1) = -i$. Además $T(-i) = \infty$. Están alineados. Es la recta imaginaria. Por tanto: $\Re \rightarrow |w| = 1$ y $|z| = 1 \rightarrow \{z = x + yi; x = 0\}$.

Ejemplo 6.3.4: Encontrar una transformación de Möbius T que transforme $T(1) = i$, $T(0) = \infty$ y $T(-1) = 1$.

Se sustituyen estos puntos en la expresión:

$$\frac{w_1 - w_3}{w_1 - w_2} \cdot \frac{w - w_2}{w - w_3} = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \cdot \frac{z - z_2}{z - z_3}$$

y se obtiene: $w = \frac{(i+1)z + (i-1)}{2z}$.

Ejemplo 6.3.5: Comprobar que las aplicaciones de Möbius que transforman el semiplano superior $\text{Im } z > 0$ en el disco abierto $|w| < 1$ (y la

frontera $\text{Im } z = 0$ en $|w| = 1$) son de la forma $T(z) = e^{i\alpha} \cdot \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$.

$$\text{Sea } T(z) = k \cdot \frac{z - a}{z - b}.$$

El punto del infinito pertenece a $\text{Im } z = 0$, por lo que su transformado debe pertenecer a la frontera $|w| = 1$. Como $T(\infty) = k$ entonces $|T(\infty)| = |k| = 1$, de modo que $k = e^{i\alpha}$.

Algún punto del semiplano superior, z_0 , se transformará en el centro de la circunferencia, $T(z_0) = 0$, luego $a = z_0$. El simétrico de z_0 respecto del eje de abscisas ($\text{Im } z = 0$) es su conjugado, \bar{z}_0 , que se transformará en el simétrico del centro de la circunferencia que es el punto del infinito, $T(\bar{z}_0) = \infty$. Luego $b = \bar{z}_0$.

$$\text{. Por tanto } T(z) = e^{i\alpha} \cdot \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}.$$

Otra forma de proceder posible es considerar que el origen pertenece a $\text{Im } z = 0$, por lo que su transformado debe pertenecer a la frontera $|w| = 1$.

Como $T(0) = e^{i\alpha} \cdot \frac{-a}{-b}$ entonces $|T(0)| = |e^{i\alpha}| \cdot \left| \frac{-a}{-b} \right| = \left| \frac{a}{b} \right| = 1$, de modo que $|a| = |b|$.

El punto $z = 1$ pertenece a $\text{Im } z = 0$, por lo que su transformado debe pertenecer a la frontera $|w| = 1$. Como $T(1) = e^{i\alpha} \cdot \frac{1-a}{1-b} = \frac{1-a}{1-b}$ pues $\alpha = 0$,

entonces $|T(1)| = \left| \frac{1-a}{1-b} \right| = 1$, de modo que: $|1-a| = |1-b| \Rightarrow (1-a)(1-\bar{a})$

$$= (1-b)(1-\bar{b}) \Rightarrow a + \bar{a} = b + \bar{b} \Rightarrow \text{Re}(a) = \text{Re}(b).$$

Los números complejos a y b tienen igual módulo e igual parte real, por

tanto, o son iguales o son conjugados. Si fuesen iguales la transformación sería constante, en consecuencia son conjugados: $b = \bar{a}$. Y por tanto $T(z) = e^{i\alpha} \frac{z-a}{z-\bar{a}}$.

$$\frac{z-a}{z-\bar{a}}$$

Además si se impone que z con $\text{Im } z > 0$ debe transformarse en w del interior del círculo, $\left| \frac{z-a}{z-\bar{a}} \right| < 1$, de donde se obtiene que $\text{Im } a > 0$.

Ejercicios

6.9. Encontrar la imagen del círculo de centro el origen y radio 1 mediante las transformaciones:

a) $w = \frac{z-2}{z-1}$.

b) $w = \frac{z}{z-1}$.

c) $w = \frac{z-2}{z}$.

d) $w = \frac{3z-2i}{iz-4}$.

6.10. Encontrar la imagen de la franja $0 < x < 1$, mediante las transformaciones:

e) $w = \frac{z+2}{z-3}$.

f) $w = \frac{z}{z+2}$.

$$g) w = \frac{3z+2}{z-4i}$$

$$h) w = \frac{2z+3i}{iz+2}$$

6.11. Encontrar las transformaciones de *Möbius* que aplican los puntos 1, i y -1 , respectivamente, en:

a) 1, 0, ∞ .

b) 0, 3, $2+i$.

c) 2, $3i$, 7.

d) -1 , $-4i$, 0.

6.12. Determinar todas las transformaciones bilineales tales que dejen invariante el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$.

6.13. Determinar todas las aplicaciones de *Möbius* que transformen la región A en la región B , siendo $A = \{z = x + iy, x + y > 0\}$ y $B = \{w = u + iv, |w| < 3\}$.

6.14. Determinar la transformación de *Möbius* que transforma el círculo unidad en sí mismo y tal que $T(2) = 3$.

6.4. APLICACIONES DE LAS TRANSFORMACIONES CONFORMES

6.4.1. Transformaciones de funciones armónicas

El “Teorema de la aplicación de *Riemann*” decía que si Ω es un subconjunto de \mathbf{C} abierto y simplemente conexo distinto del plano complejo; entonces existe una única biyección conforme f que transforma el conjunto Ω en el disco unidad con centro en el origen, tal que $f(z_0) = 0$ y $f'(z_0)$ sea un número real positivo.

La demostración de este teorema está en el libro de *Marsden-Hoffman*. Puede comprobarse también, usando el “lema de *Schwarz*”, que las únicas transformaciones biyectivas y conformes de D en D son las bilineales; y la posibilidad de representar Ω sobre D de manera conforme permite resolver el importante problema, conocido como “problema de *Dirichlet*”.

6.4.2. Ecuación de Laplace con condiciones de contorno

Muchos problemas que plantea la Física se resuelven buscando soluciones de la ecuación de *Laplace*: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. Esta ecuación no tiene

solución única; sin embargo, cuando se establecen condiciones iniciales o condiciones de contorno se estudia, bajo que condiciones, dicha solución es única.

El problema de hallar una función armónica en un dominio específico que satisfaga sobre su contorno condiciones previamente establecidas es muy importante en matemática aplicada. Si se conocen los valores de la función sobre la frontera el problema se denomina como un problema de contorno de primera especie, o problema de *Dirichlet*. Si se conocen los valores de la derivada normal a la función sobre la frontera, se dice que es un problema de

contorno de segunda especie, o problema de *Neumann*.

Problema de *Dirichlet*: Encontrar una función $u(x, y)$ derivable dos veces en un dominio Ω que verifique la ecuación de *Laplace* en todo punto de dicho dominio, ($u(x, y)$ armónica), cuyos valores en todo punto de la frontera de Ω son especificados, está determinada en forma única.

Problema de *Neumann*: Encontrar una función $u(x, y)$ derivable dos veces en un dominio Ω que verifique la ecuación de *Laplace* en todo punto de dicho dominio, suponiendo que se conoce la derivada direccional de u en la dirección del vector normal a la curva que define la frontera de Ω

Los dominios más frecuentes son simplemente conexos, y ya se ha estudiado en el *capítulo 2* que una función armónica en un dominio simplemente conexo tiene siempre una armónica conjugada, por lo que en ocasiones la solución de un problema de contorno para tales dominios es la parte real o imaginaria de una función holomorfa. El éxito de este procedimiento depende de la simplicidad del problema.

Un problema de *Dirichlet* se transforma mediante una aplicación conforme en otro problema de *Dirichlet*, y un problema de *Neumann* se transforma en un problema de *Neumann*.

Las condiciones de contorno mencionadas pueden quedar inalteradas bajo cambios de variables asociados a una transformación conforme. La técnica básica consiste en transformar un problema de contorno dado en el plano xy en otro más sencillo en el plano uv , resolverlo, y escribir la solución del problema original en términos de la solución obtenida para el más sencillo. Por lo que si se dispone de una tabla lo suficientemente amplia que indique

como se transforman unos recintos en otros resultará que el conocimiento de la solución en un determinado recinto va a determinar la solución en otros.

Se pueden utilizar las transformaciones conformes para resolver problemas relativos a la ecuación de *Laplace* en dos variables independientes, lo que permitirá comentar aplicaciones sobre conducción térmica, potencial electrostático o flujo de fluidos.

6.4.3. Aplicaciones a la hidrodinámica

Las ecuaciones de la hidrodinámica² son ecuaciones en derivadas parciales que rigen el movimiento de un fluido y expresan la conservación de los momentos, la conservación de la masa, o la ecuación conocida como ecuación de estado. Son demasiado complicadas, por lo que se deben añadir hipótesis para poder abordarlas. Así, se puede suponer que: i) el fluido es incompresible, ii) no existen las fuerzas externas, iii) se consideran únicamente movimientos estacionarios, y iv) se restringe el problema a flujos bidimensionales. Se comprueba entonces que una de las ecuaciones es la segunda ecuación de *Cauchy-Riemann*, lo que lleva a la utilización de las funciones holomorfas para resolver estos problemas.³

6.4.4. Aplicaciones a la teoría del calor

En la teoría de la conducción del calor, el flujo a través de una superficie interior a un sólido, en un punto de la superficie, es la cantidad de calor que fluye en la dirección normal a la superficie por unidad de tiempo y por unidad de área. Por tanto varía con la derivada normal de la de la temperatura en el

² Pueden encontrarse en *Hydrodynamics* de H. Lamb.

³ En *Polya&Latta* se encuentra explicado el flujo en canales con fuentes sumideros y dipolos.

punto en cuestión. Se parte de la hipótesis de que ni se crea ni se destruye energía térmica en el interior del sólido, y que tanto la temperatura como sus derivadas parciales son funciones continuas, y si sólo se consideran dos variables, esto permite concluir que la temperatura es una función armónica de x e y . Las superficies $T(x, y) = C$ son isotermas, y las curvas que tienen al gradiente de T como vector tangente son las líneas de flujo. En Churchill⁴ se pueden encontrar aplicaciones a las temperaturas estacionarias en un semiplano y en un cuadrante.

6.4.5. Aplicaciones a la electrostática

En un campo de fuerzas electrostático la intensidad de campo en un punto es un vector que representa la fuerza ejercida sobre una carga positiva unidad colocada en ese punto. El potencial electrostático es una función con valores reales de las coordenadas del punto, tal que, en cada punto, la derivada direccional en cualquier dirección es la opuesta de la componente de la intensidad de campo en esa dirección. Para dos partículas cargadas estacionarias, la magnitud de fuerza de atracción o repulsión ejercida entre ellas es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de las distancias entre las partículas. Por lo que el potencial en un punto debido a una sola partícula en el espacio es inversamente proporcional a la distancia entre el punto y la partícula. En toda región libre de cargas se puede demostrar que el potencial debido a una distribución de cargas externa a la región satisface la ley de *Laplace* para el espacio tridimensional. Y si las condiciones son tales que el potencial es el

⁴ Churchill, R. V.; Brown, J. W.: *Variable compleja y sus aplicaciones*. Mc Graw-Hill. (4ª edición). 1998.

mismo en todos los planos paralelos al plano xy entonces éste es una función armónica de dos variables. El potencial en el flujo estacionario de electricidad en una lámina conductora plana es también una función armónica en zonas libres de fuentes o sumideros. El potencial gravitatorio es otro ejemplo de función armónica en Física. Los problemas de contorno para el potencial son los mismos que para las temperaturas estacionarias.⁵

6.4.6. La transformación de *Schwarz-Christoffel*

La transformación de *Schwarz-Christoffel* que aplica el eje x y el semiplano superior en el interior y frontera de un polígono cerrado simple se utiliza para dar solución a ciertos problemas de teoría de fluidos y de teoría del potencial. Un ejemplo adecuado es hallar el potencial complejo para el flujo de un fluido en un canal con un cambio abrupto en su anchura, que se denomina canal con recodo.⁶

6.5. EJERCICIOS

6.15. Estudiar dónde es conforme la aplicación $f(z) = \log z$.

6.16. Comprobar que la transformación $w = iz$ es una rotación de ángulo $\frac{\pi}{2}$

del plano z . Hallar la imagen de $A = \{z = x + iy; 0 < x < 2\}$ mediante w

⁵ En el libro de *Churchill & Brown* pueden verse otros ejemplos de potencial como el potencial en un espacio cilíndrico.

⁶ Estas aplicaciones de la transformación de *Schwarz-Christoffel* están desarrolladas en *Churchill & Brown*: flujo de un canal a través de una rendija, flujo en un canal con recodo, potencial electrostático en el borde de una placa conductora... En *Polya & Latta* también se explica el flujo en canales utilizando esta transformación conforme, y como ejemplos, el flujo alrededor de cuerpos fijos, el flujo con fronteras libres, y el bocal de borda.

= iz . (Solución: $\{w = u + iv; 0 < v < 2\}$).

6.17. Hallar la imagen de A mediante la transformación $w = f(z)$, y representar gráficamente la región inicial y la región imagen, para:

a) $A = \{z = x + iy; \in \mathbf{C}; x > 0\}$; $w = f(z) = (i - 1)z + 2i$.

b) $A = \{z = x + iy; \in \mathbf{C}; y > 0\}$; $w = f(z) = iz + 1 + i$.

c) $A = \{z = x + iy; \in \mathbf{C}; x > 1\}$; $w = f(z) = (1 + i)z + 1$.

d) $A = \{z = x + iy; \in \mathbf{C}; x > 0, 0 < y < 2\}$; $w = f(z) = (i - 1)z + 2i$.

6.18. Hallar la imagen de $A = \{z = x + iy; \in \mathbf{C}; x < -3\}$ mediante la transformación $w = \frac{1}{z}$. ¿Es el interior de un círculo? Analizar el

resultado para $A = \{z = x + iy; \in \mathbf{C}; x < a\}$ según sea a un número real y positivo, o un número real y negativo. ¿Y si $a = 0$?

6.19. Hallar la imagen de A mediante la transformación $w = \frac{1}{z}$, para:

a) $A = \{z = x + iy \in \mathbf{C}; y < 3\}$.

b) $A = \{z = x + iy \in \mathbf{C}; 0 < y < 3\}$.

c) $A = \{z = x + iy \in \mathbf{C}; x > 1, y > 1\}$.

d) $A = \{z = x + iy \in \mathbf{C}; 1 < x < 3\}$.

Representar gráficamente, en cada caso, la región inicial y la región imagen.

6.20. Describir geoméricamente la transformación $w = \frac{1}{z+1}$.

- 6.21. Demostrar que aunque $w = \frac{1}{z}$ transforme una circunferencia en una circunferencia, el centro de la circunferencia inicial no se transforma en el centro de la circunferencia imagen.
- 6.22. Hallar la imagen de A mediante la transformación $J(z) = z + \frac{1}{z}$, para:
- $A = \{z \in \mathbf{C}; |z| = 1\}$
 - $A = \{z \in \mathbf{C}; |z| < 1/2, \text{Im } z > 0\}$
 - $A = \{z \in \mathbf{C}; |z| < 1/2\}$
 - $A = \{z \in \mathbf{C}; |z| < 1\}$
- 6.23. Comprobar que $f(z) = z^2$ transforma la circunferencia $\{z \in \mathbf{C}; |z - r| = r\}$ en la cardiode $\rho = 2r^2(1 + \cos \theta)$. (Ayuda: Escribir las ecuaciones paramétricas de la circunferencia).
- 6.24. Comprobar que $w = \text{sen } z$ transforma rectas horizontales ($y = b$) en elipses $\left(\frac{u^2}{(\cosh b)^2} + \frac{v^2}{(\sinh b)^2} = 1 \right)$ y rectas verticales ($x = a$) en hipérbolas $\left(\frac{u^2}{(\text{sen } a)^2} - \frac{v^2}{(\text{cos } a)^2} = 1 \right)$. Comprobar también que la familia de las elipses es ortogonal a la familia de las parábolas.
- 6.25. Demostrar que la composición de dos transformaciones de *Möbius* es también una transformación de *Möbius*.
- 6.26. Determinar la imagen de la región A mediante la transformación T , siendo:

$$a) A = \{z \in \mathbf{C}; \operatorname{Re} z > 0 \text{ y } \operatorname{Im} z > 0\} \text{ y } T(z) = \frac{2z+3i}{z-2i}.$$

$$b) A = \{z \in \mathbf{C}; -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4}\} \text{ y } T(z) = \frac{z-2i}{3z-i}.$$

$$c) A = \{z \in \mathbf{C}; |z| < 2\} \text{ y } T(z) = 2i \frac{-z+i}{2z-3i}.$$

6.27. Transformar el semicírculo de centro el origen y radio 1, con $\operatorname{Im} z > 0$, mediante las transformaciones:

$$a) w = \frac{z+1}{z-3}.$$

$$b) w = \frac{z-i}{z+2}.$$

$$c) w = \frac{3z-2}{z+4i}$$

$$d) w = \frac{3z-2i}{iz-3}$$

6.28. Transformar la corona circular $1 < |z| < 2$, mediante las transformaciones:

$$a) w = \frac{z}{z-3}.$$

$$b) w = \frac{z+i}{z-5}.$$

$$c) w = \frac{z-i}{z+i}$$

$$d) w = \frac{3z-2i}{iz-4}$$

6.29. Transformar el primer cuadrante $x > 0$, $y > 0$, mediante las

transformaciones:

$$a) w = \frac{z-5}{z-2}.$$

$$b) w = \frac{z-i}{z+i}.$$

$$c) w = \frac{3z-2}{z+4i}$$

$$d) w = \frac{7z+i}{iz-3}$$

6.30. Transformar la región limitada por las circunferencias: $|z-i|=1$, $|z-1|=1$, mediante las transformaciones:

$$a) w = \frac{-2z+1}{z-3}.$$

$$b) w = \frac{-2z-i}{z+2}.$$

$$c) w = \frac{3z+4}{z+4i}$$

$$d) w = \frac{3z}{iz-3}.$$

6.31. Encontrar la *transformación de Möbius* T que transforme $T(-1) = -i$, $T(0) = 1$ y $T(1) = i$.

$$(Solución: $w = \frac{-z+i}{z+i}$).$$

6.32. Hallar la *transformación de Möbius* que aplica los puntos $z_1 = -i$, $z_2 = 0$ y $z_3 = i$ en los puntos:

$$a) w_1 = -2, w_2 = 2 \text{ y } w_3 = 4.$$

- b) $w_1 = -1$, $w_2 = i$ y $w_3 = i$.
- c) $w_1 = 2i$, $w_2 = -i$ y $w_3 = -2i$.
- d) $w_1 = 0$, $w_2 = i$ y $w_3 = \infty$.

Indicar, en cada caso, en qué curva se transforma el eje imaginario $x = 0$.

6.33. Hallar los puntos fijos de las transformaciones *de Möbius* siguientes:

- a) $w = iz$.
- b) $w = \frac{z-1}{z+1}$.
- c) $w = \frac{6z-9}{z}$.
- d) $w = z + 3$.

(Solución: a) $z = 0, \infty$; b) $z = i, -i$; c) $z = 3$; d) $z = \infty$).

6.34. Determinar todas las transformaciones bilineales que dejan invariante la circunferencia de centro el origen y radio uno.

6.35. Determinar todas las transformaciones bilineales que dejan invariante el eje real $Im z = 0$.

6.36. Determinar todas las transformaciones bilineales que dejan invariante el semiplano superior $Im z > 0$.

6.37. Determinar todas las aplicaciones de *Möbius* que transformen la región A en la región B , siendo $A = \{z = x + iy; x > y\}$ y $B = \{w = u + iv; |w| < 1\}$.

6.38. Determinar todas las aplicaciones de *Möbius* que transformen la región A en la región B , siendo $A = \{z = x + iy; x < y\}$ y $B = \{w = u + iv;$

$$|w| > 2\}.$$

- 6.39. Comprobar que todas las transformaciones de Möbius que aplican el círculo unidad en sí mismo y dejan invariante el origen, son rotaciones.
- 6.40. Hallar las transformaciones de Möbius que aplican A en B , siendo $A = \{z \in \mathbf{C}; |z| = 1\}$ y $B = \{w \in \mathbf{C}; |w - 2| = 2\}$ y que transforman -1 en 0 y 0 en $-2i$. Calcular $T(\Re)$.

$$(\text{Solución: } T(z) = 2(1 + i) \cdot \frac{z+1}{2z+1-i}; T(\Re) = \{w \in \mathbf{C}; |w - i| = 1\}).$$

- 6.41. Hallar las transformaciones de Möbius que aplican A en B , siendo $A = \{z \in \mathbf{C}; |z + 2i| = 1\}$ y $B = \{w \in \mathbf{C}; |w - 3| = 1\}$ y que transforman las circunferencias de centro el origen en las circunferencias de centro el punto -1 .
- 6.42. Hallar la imagen del semiplano superior por la transformación: $w = \text{Log} \frac{i - z}{i + z}$.
- 6.43. Encontrar una transformación conforme que transforme la región $A = \{z \in \mathbf{C}; -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4}\}$ en la región $B = \{w \in \mathbf{C}; |w - 2| < 3\}$.
- 6.44. Encontrar una transformación conforme que transforme la región $A = \{z \in \mathbf{C}; -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4}\}$ en la región $B = \{w = u + iv \in \mathbf{C}; u > v\}$.
- 6.45. Sea T una transformación de Möbius $w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Demostrar que $T^{-1} = T$ si y sólo si $a = -d$.

6.46. Determinar y representar la imagen de $A = \{z = x + iy \in \mathbf{C}; x^2 + y^2 + 2x < 0\}$ mediante las transformaciones:

a) $T_1(z) = z + 3;$

b) $T_2(z) = \frac{1}{z+3};$

c) $T_3(z) = \frac{z-1}{z+3};$

d) $T_3(z) = \frac{z+3}{z-1}.$

6.47. Determinar la imagen de $A = \{z \in \mathbf{C}; |\arg(z)| \leq \pi/4\}$ mediante la transformación $f(z) = z^2$.

(Solución: $T(A) = \{w \in \mathbf{C}; \operatorname{Re} w \geq 0\}$).

6.48. Hallar la transformación bilineal $w = T(z)$ que aplica $A = \{z \in \mathbf{C}; |z - 4i| \leq 2\}$ en el semiplano $B = \{w = u + iv \in \mathbf{C}; v \geq u\}$ y tal que $T(2i) = 0$ y $T(0) = -i$.

(Solución: $T(z) = \frac{6+3zi}{6i-(i+2)z}$).

6.49. Sea B la imagen mediante $T_1(z) = \frac{z}{5-z}$ de $A = \{z = x + iy \in \mathbf{C}; y >$

$x\}$. Hallar la imagen de B mediante la transformación $T_2(z) = \frac{-z}{z+1}$.

(Solución: $T_2(T_1(A)) = \{z = x + iy \in \mathbf{C}; y < x\}$).

6.50. Obtener la transformación bilineal compleja $w = T(z)$ que transforma el círculo $A = \{z \in \mathbf{C}; |z| < 2\}$, en el círculo $B = \{w \in \mathbf{C}; |w| < 3\}$, tal que $T(i) = 0$ y $\arg(T'(i)) = \pi/2$. Obtener $T(2i)$.

$$(Solución: T(z) = 6 \cdot \frac{z-i}{z-4i}; T(i) = -3).$$

- 6.51. Obtener la transformación bilineal compleja $w = T(z)$ que transforma el semiplano $A = \{z \in \mathbf{C}; \operatorname{Im}(z) > 0\}$, en el círculo $B = \{w \in \mathbf{C}; |w| < 1\}$, tal que $T(4i) = 0$ y $\arg(T'(4i)) = 3\pi/4$. Obtener $T(0)$.

$$(Solución: T(z) = \frac{\sqrt{2}(-1-i)}{2} \cdot \frac{z-4i}{z+4i}; T(0) = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}).$$

- 6.52. Obtener la transformación bilineal compleja $w = T(z)$ que transforma el semiplano $A = \{z \in \mathbf{C}; \operatorname{Im}(z) > 0\}$, en el círculo $B = \{w \in \mathbf{C}; |w| < 1\}$, tal que $T(3i) = 0$ y $T(\infty) = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$. Obtener $T(i)$.

$$(Solución: T(z) = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{z-3i}{z+3i}; T(i) = \frac{i-1}{2\sqrt{2}}).$$

- 6.53. Obtener la transformación bilineal compleja $w = T(z)$ que transforma el círculo $A = \{z \in \mathbf{C}; |z| < 1\}$, en el círculo $B = \{w \in \mathbf{C}; |w| < 1\}$, tal que deja invariantes a los puntos: 1 y 2i. Obtener $T(i)$.

$$(Solución: T es la identidad; T(i) = i).$$

- 6.54. Determinar la imagen de $A = \{z \in \mathbf{C}; |z| = 4, \operatorname{Im}(z) > 0\}$ mediante la transformación $T(z) = \frac{z-4}{z+4}$.

$$(Solución: T(A) = \{w = u + iv \in \mathbf{C}; u = 0, v > 0\}).$$

- 6.55. Obtener la transformación bilineal compleja $w = T(z)$ que transforma el semiplano $A = \{z \in \mathbf{C}; \operatorname{Im}(z) > 0\}$, en el círculo $B = \{w \in \mathbf{C}; |w-1| < 6\}$, tal que $T(i) = 1$ y $T'(i) = 3$. Obtener $T(1)$.

6.56. Obtener la transformación bilineal compleja $w = T(z)$ que transforma el semiplano $A = \{z \in \mathbf{C}; \operatorname{Re}(z) > 0\}$, en el círculo $B = \{w \in \mathbf{C}; |w - 1| < 2\}$, tal que $T(1) = 1$ y $T(0) = 1 - 2i$. Calcular $T(\mathfrak{R})$.

6.57. Dada la transformación $w = 2i \frac{z+1}{1-z}$, determinar:

- La imagen del eje real.
- La imagen del eje imaginario.
- La imagen de cada uno de los cuatro cuadrantes.

(Solución: a) $T(\mathfrak{R}) = \{w = u + iv \in \mathbf{C}; u = 0\}$. b) $\{w \in \mathbf{C}; |w| = 2\}$. c) $C'_1 = \{w = u + iv \in \mathbf{C}; |w| > 2, u < 0\}$; $C'_2 = \{w = u + iv \in \mathbf{C}; |w| < 2, u < 0\}$; $C'_3 = \{w = u + iv \in \mathbf{C}; |w| < 2, u > 0\}$; $C'_4 = \{w = u + iv \in \mathbf{C}; |w| > 2, u > 0\}$).

6.58. Determinar la transformación bilineal $w = T(z)$ tal que $T(-i) = 0$, $T(0) = 1 + i$ y $T(\infty) = 2i$. Obtener su desarrollo en serie de potencias positivas de $z + i$. Calcular los residuos de T y T' en sus singularidades. Determinar la imagen de la recta $y = -x$ mediante la transformación T .