CAPÍTULO 5

Singularidades y residuos

En este capítulo se estudian las funciones complejas cerca de aquellos puntos en los que la función no es holomorfa. Estos puntos se denominan singularidades. Las singularidades más frecuentes aparecen al formar el cociente de dos funciones holomorfas, ya que los ceros del denominador van a ser singularidades de la función. Esto lleva a estudiar brevemente el conjunto de ceros de una función holomorfa.

5.1. SINGULARIDADES

Tienen importancia ahora los puntos en los que la función no es holomorfa.

Definición 5.1.1:

Se dice que una función tiene una ***singularidad*** en $z = a$ si f no es holomorfa en a, y en todo entorno de a existen puntos donde la función es holomorfa.

Definición 5.1.2:

Se dice que una función f tiene una ***singularidad aislada*** en $z = a$ si f no es holomorfa en a, y existe un número $R > 0$ tal que f es holomorfa en $\{z;\ 0 < |$

$z - a \mid < R\}$.

El conjunto $B_R(a) = \{z; \mid z - a \mid < R\}$ se denomina ***disco abierto***, ***bola abierta*** o ***entorno*** de centro *a* y radio *R*.

El conjunto $B_R(a)/\{a\} = \{z; 0 < \mid z - a \mid < R\}$ se denomina ***disco pinchado***, ***bola pinchada*** o ***entorno pinchado*** de centro *a* y radio *R*, y se denota por $B'_R(a)$.

Usualmente se utiliza el nombre de ***singularidad*** para denominar a las singularidades aisladas.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 5.1.1: Determinar las singularidades aisladas de las funciones $f(z) = sen\frac{1}{z}$, $f(z) = \frac{senz}{z}$, $f(z) = \frac{4z}{z^2+1}$.

Estas funciones tienen singularidades aisladas en los puntos 0; 0; i y –i respectivamente.

Ejemplo 5.1.2: Determinar las singularidades de la función $f(z) = \frac{1}{sen\frac{1}{z}}$.

Tiene singularidades aisladas en los inversos de los múltiplos enteros de π. El origen, que es también una singularidad de esta función, al ser un punto de acumulación de las singularidades anteriores, es una singularidad no aislada, ya que no existe ningún entorno del origen donde la función sea holomorfa.

Nótese que si *f* es holomorfa en todo el plano complejo salvo una cantidad finita de puntos, entonces todas sus singularidades son aisladas.

Ejercicios

5.1. Determinar las singularidades aisladas de las funciones:

a) $f(z) = \begin{cases} senz & si \quad z \neq 2 \\ 0 & si \quad z = 2 \end{cases}$,

b) $f(z) = \begin{cases} e^z & si \quad z \neq 1 \\ 1 & si \quad z = 1 \end{cases}$,

c) $f(z) = \frac{1}{z}$,

d) $f(z) = \frac{1}{z-3}$.

(*Solución*: a) $z = 2$, b) $z = 1$, c) $z = 0$, d) $z = 3$).

5.2. Determinar las singularidades aisladas de las funciones:

a) $f(z) = \frac{z}{z^2+3}$,

b) $f(z) = exp(\frac{1}{z})$,

c) $f(z) = \frac{z+1}{z^3(z^2+1)}$,

d) $f(z) = sen(\frac{1}{z})$.

(*Solución*: a) $z = \pm i\sqrt{3}$, b) $z = 0$, c) $z = 0$, i, –i, d) $z = 0$).

5.3. Analizar las singularidades de la función: $f(z) = \dfrac{1}{sen(\frac{1}{z})}$.

(*Solución*: Tiene singularidades aisladas en $z = \dfrac{1}{n\pi}$, pero en $z = 0$ tiene una singularidad no aislada.

5.4. Analizar el tipo de singularidad de la función $f(z) = Log\ z$ en $z = 0$.

(*Solución*: El origen es un punto singular, pero no es una singularidad aislada sino un punto singular no aislado ya que todos los puntos del semieje real negativo son singulares).

5.5. Analizar las singularidades de la función: $f(z) = \dfrac{1}{sen(\frac{\pi}{z})}$.

(*Solución*: Tiene singularidades aisladas en $z = \dfrac{1}{n}$, para n entero, y en $z = 0$ tiene una singularidad no aislada).

5.2. CARACTERIZACIÓN DE LAS SINGULARIDADES AISLADAS

Las singularidades aisladas se pueden clasificar en tres tipos:

- Singularidades evitables
- Polos
- Singularidades esenciales

5.2.1. Singularidades evitables

Definición 5.2.1:

El punto $z = a$ es una ***singularidad evitable*** de f si existe una función holomorfa g: $B_R(a) \to \mathbf{C}$ tal que $g(z) = f(z)$ para todo z del conjunto $B'_R(a) = \{z;\ 0 < |z - a| < R\}$.

Para comprobar si una función f tiene una singularidad evitable en un punto $z = a$ se puede utilizar el hecho de que si la función tiene una extensión analítica en la bola $B_R(a)$ entonces $\int_\gamma f(z)\cdot dz = 0$ para toda curva cerrada en $B'_R(a)$.

Una función f tiene una singularidad evitable en a si f está acotada en $B_R(a)/\{a\}$ para algún $R > 0$, por lo que también se puede comprobar la existencia del límite (finito) de $f(z)$ cuando z tiende a a.

Caracterización 5.2.1:

Sea a una singularidad aislada de f.

La función f tiene en $z = a$ una singularidad evitable $\Leftrightarrow$

$\exists \lim\limits_{z\to a} f(z) \Rightarrow \lim\limits_{z\to a} (z-a)\cdot f(z) = 0$.

5.2.2. Polos

Definición 5.2.2:

Si $z = a$ es una singularidad aislada de f, se dice que es un **polo** si

$\lim\limits_{z \to a} |f(z)| = \infty$.

Si *f* tiene un polo en *z* = *a*, la función 1/*f*(*z*) tiene una singularidad evitable en ese punto. Así, si se define *h*(*z*) = 1/*f*(*z*) si $z \neq a$ y *h*(*a*) = 0, la función *h* es holomorfa y tiene un cero en *z* = *a*. Al orden de este cero se le llama ***orden del polo***.

Por otra parte si *f* tiene un cero en *z* = *a*, la función 1/*f*(*z*) tiene un polo en *z* = *a*. Así existe una dualidad entre estos dos conceptos. De acuerdo con las propiedades de los ceros de una función holomorfa, se tiene:

Proposición 5.2.2:

Sea *G* una región, $a \in G$, *f* holomorfa en $G/\{a\}$. La función *f* tiene un polo en *z* = *a* si y sólo si existe un entero positivo *m* y una función holomorfa $g: G \to$ ***C***, con $g(a) \neq 0$ tal que $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-a)^m}$.

Se dice que *m* es el ***orden del polo***. Si *m* = 1 se dice que *z* = *a* es un ***polo simple***.

Caracterización 5.2.3:

Sea *a* una singularidad aislada de *f*.

La función *f* tiene un polo de orden *m* en *z* = *a*

$\Leftrightarrow$ Existe el límite $\lim\limits_{z \to a} (z-a)^m \cdot f(z)$ y es distinto de cero $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{z \to a} |f(z)| = \infty \\ \\ \lim\limits_{z \to a} (z-a)^k \cdot f(z) = \infty \text{ si } m > k \\ \\ \end{cases}$$

$$\lim_{z \to a} (z-a)^k \cdot f(z) = 0 \text{ si } m < k.$$

5.2.3. Singularidad esencial

Definición 5.2.3:

Se dice que una singularidad es **esencial** si es una singularidad aislada que no es polo ni evitable.

Por tanto, f tiene una singularidad esencial en $z = a$ si y sólo si en $\boldsymbol{C} \cup \infty$ no existe el límite: $\lim_{z \to a} f(z)$.

De hecho el comportamiento de la función cerca de una singularidad esencial es muy oscilante como demuestra el siguiente teorema:

Teorema 5.2.5: ***Teorema de Casorati-Weierstrass***

La función f tiene una singularidad esencial en $z = a$ si y sólo si $f(U)$ es denso en $\boldsymbol{C}$, para todo entorno reducido U de a.

Lo que es equivalente:

Si f tiene una singularidad esencial en a entonces para todo $w \in \boldsymbol{C}$, $\forall r > 0$, $\forall \varepsilon > 0$ existe $z \in B'_r(a)$ tal que $| f(z) - w | < \varepsilon$.

Demostración:

Si no fuera así existirían w, r y ε tales que $\forall z \in B'_r(a)$ verificaría $| f(z) - w | \geq \varepsilon$. Entonces $g(z) = \dfrac{1}{f(z)-w}$ estaría acotada en $B'_r(a)$ por lo que la singularidad en a sería evitable, y en consecuencia la función $f(z) = w + \dfrac{1}{g(z)}$

tendría, bien un polo (si $\lim_{z \to a} g(z) = 0$) o bien una singularidad evitable (si $\lim_{z \to a} g(z) \neq 0$). □

En la línea de estos resultados existe un teorema debido a *Picard* que afirma que, en las condiciones anteriores, *f* toma como valores todos los números complejos infinitas veces salvo quizás con una única posible excepción. Esto da idea de la naturaleza espectacularmente oscilante de las funciones cerca de sus singularidades esenciales.

Teorema 5.2.4: ***Teorema grande de Picard***

El punto *a* es una singularidad esencial si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$, $f(B_\varepsilon(a))/\{a\}$ es todo el campo complejo ***C*** salvo, a lo sumo, un punto.

Estos teoremas tienen diferentes aplicaciones, como por ejemplo:

- Si *f* transforma un entorno de *a* en un subconjunto del campo complejo excepto dos valores $f(B_\varepsilon(a)) \subset \mathbf{C}/\{b, c\}$, entonces *a* no es una singularidad esencial de *f*.
- Para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{w;\ w = e^{1/z},\ 0 < |z| < \varepsilon\}$ es $\mathbf{C}/\{0\}$, pues la función $w = e^{1/z}$, tiene una singularidad esencial en $z = 0$. (Se recuerda que $e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! \cdot z^n}$).

5.2.4. Ceros de una función analítica

Se ha visto el interés de estudiar los ceros de una función holomorfa para analizar los polos, pues si *f* tiene un polo de orden *m* en *a*, entonces $(z - a)^m f(z)$

tiene una singularidad evitable en *a* y por tanto existe una función holomorfa $g(z)$ en un entorno de *a* tal que $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$ con $g(a) \neq 0$.

Definición 5.2.4:

Sea *G* una región, $a \in G$ y *f* una función holomorfa en *a* distinta de la función nula. Se dice que *a* es un ***cero*** de *f* si $f(a) = 0$. Se dice que *a* es un ***cero de orden k*** de *f* si $f(a) = f'(a) = ... = f^{k-1)}(a) = 0$ y $f^{k)}(a) \neq 0$.

En consecuencia, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ donde $a_n = 0$ para todo *n* desde 0 hasta $k - 1$.

Teorema 5.2.6:

Se supone que *G* es una región, *f* una función holomorfa sobre *G* y que $Z(f) = \{a \in G;\ f(a) = 0\}$. Entonces, o bien $Z(f)$ no tiene puntos de acumulación en *G* o bien $Z(f) = G$. En el primer caso, a cada $a \in Z(f)$ le corresponde un único entero positivo *m* tal que $f(z) = (z - a)^m \cdot g(z)$ con $z \in G$ y $g(a) \neq 0$.

Por lo tanto si *f* es holomorfa y no nula en una región *G* entonces sus ceros son aislados y $Z(f)$ es a lo sumo numerable.

El entero *m* es el orden del cero.

Es claro que se puede plantear un resultado similar para los α-puntos de *f*, es decir, para el conjunto de ceros de $f - \alpha$ donde α es un número complejo.

Consecuencia inmediata del teorema anterior es que si dos funciones *f* y *g* son holomorfas sobre una región *G* y coinciden sobre un conjunto que tenga un punto de acumulación en *G*, las dos funciones son idénticas.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 5.2.1: Clasificar los distintos tipos de singularidades aisladas de las funciones siguientes:

1. $f_1(z) = \begin{cases} senz & si\ z \neq 2 \\ 0 & si\ z = 2 \end{cases}$ tiene una singularidad aislada y *evitable* en *z* = 2.

2. $f_2(z) = \begin{cases} e^z & si\ z \neq 1 \\ 1 & si\ z = 1 \end{cases}$ tiene una singularidad aislada y *evitable* en *z* = 1

3. $f_3(z) = \frac{1}{z}$ tiene un *polo* de orden 1 en *z* = 1.

4. $f_4(z) = \frac{1}{(z-3)^4}$ tiene un *polo* de orden 4 en *z* = 3.

5. $f_5(z) = \frac{z}{z^2+3}$ tiene dos *polos* de orden 1 en $i\sqrt{3}$ y en $-i\sqrt{3}$.

6. $f_6(z) = \frac{z+1}{z^3(z^2+1)}$ tiene un *polo* de orden tres en 0 y dos polos de orden uno en i y –i.

7. $f_7(z) = exp(1/z)$ tiene en *z* = 0 una singularidad *esencial*.

8. $f_8(z) = sen(1/z)$ tiene en *z* = 0 una singularidad no aislada, y en $z = \frac{1}{n\pi}$, $n \in \boldsymbol{N}$, polos simples.

Ejemplo 5.2.2: Escribir cuatro ejemplos de singularidades evitables en *z* = 0:

1) La función $g_1(z) = \frac{1 - cos\, z}{z^2}$ tiene en $z = 0$ una singularidad evitable, pues $\lim_{z \to 0} z \cdot \frac{1 - cos\, z}{z^2} = 0$.

2) La función $g_2(z) = \frac{senz}{z}$ tiene en $z = 0$ una singularidad evitable, pues $\lim_{z \to 0} z \cdot \frac{senz}{z} = 0$.

3) La función $g_3(z) = \begin{cases} e^z & si \quad z \neq 0 \\ 0 & si \quad z = 0 \end{cases}$ tiene en $z = 0$ una singularidad evitable, pues $\lim_{z \to 0} z \cdot g_3(z) = 0$.

4) La función $g_4(z) = \frac{1 - cos\, z}{z}$ tiene en $z = 0$ una singularidad evitable, pues $\lim_{z \to 0} z \cdot \frac{1 - cos\, z}{z} = 0$.

Ejemplo 5.2.3: Escribir tres ejemplos de polos de orden dos en $z = 1$:

1) La función $h_1(z) = \frac{1 - cos\, z}{(z-1)^2}$ tiene en $z = 1$ un polo de orden dos, pues $\lim_{z \to 1} (z - 1)^2 \cdot \frac{1 - cos\, z}{(z-1)^2} = 1 - cos(1) \neq 0$.

2) La función $h_2(z) = \frac{1 - cos\, z}{z^3 (z-1)^2}$ tiene en $z = 1$ un polo de orden dos, pues $\lim_{z \to 1} (z - 1)^2 \cdot \frac{1 - cos\, z}{z^3 (z-1)^2} = 1 - cos(1) \neq 0$.

3) La función $h_3(z) = \frac{1 - cos\, z}{(z^2 - 1)^2}$ tiene en $z = 1$ un polo de orden dos, pues

$\lim\limits_{z\to 1} (z-1)^2\cdot\frac{1-\cos z}{(z^2-1)^2} = (1-\cos(1))/2 \neq 0.$

Ejemplo 5.2.4: Escribir un ejemplo de singularidad esencial en $z = 0$:

La función $f_1(z) = exp(\frac{1}{z})$ tiene en $z = 0$ una singularidad esencial pues es singularidad aislada que no es ni polo ni evitable.

Ejercicios

5.6. Clasificar los distintos tipos de singularidades aisladas de las funciones siguientes: $f_1(z) = \frac{senz}{z^2}$, $f_2(z) = \frac{e^z-1}{z^3}$, $f_3(z) = exp(\frac{senz}{z^2})$, $f_4(z) = \frac{(z-1)}{(z^2-1)(z+3)}$.

5.7. Clasificar los distintos tipos de singularidades de las funciones siguientes:

a) $f(z) = \frac{e^z-1}{z^2 sen^3 z}$

b) $f(z) = \frac{e^z}{z^2 tg^3 z}$

c) $f(z) = \frac{senz}{z^k}$

d) $f(z) = \frac{1-\cos z}{sen^2 z\cdot e^z}$.

(*Solución*: a) Polo de orden 4 en $z = 0$, polo de orden 3 en $z = n\pi$, $n \neq 0$; b) Polo de orden 5 en $z = 0$, polo de orden 3 en $z = n\pi$, $n \neq 0$; c) Si $k = 1$, singularidad evitable, si $k > 1$, polo de orden $k - 1$, en $z = 0$).

5.3. SERIES DE LAURENT

En el *capítulo 3* se estudió el desarrollo de una función mediante una serie de Laurent en un entorno de una singularidad, y se comprobó que el dominio de convergencia de la serie es una corona circular, obteniéndose que:

La serie de Laurent centrada en z_0, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n.(z - z_0)^n$ es convergente en $r < |z - z_0| < R$ siendo su parte regular o analítica: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.(z - z_0)^n$, y su parte principal: $\sum_{m=1}^{+\infty} a_{-m}.(z - z_0)^{-m}$.

Se demostró en el *capítulo 3, sección 3.5*, que $\frac{1}{R} = \lim\sup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, y que $r = \lim\sup_{m\to\infty} \sqrt[m]{|a_{-m}|}$, por lo que la parte regular converge en el interior del círculo de centro z_0 y radio R mientras que la parte principal lo hace en el exterior del círculo con el mismo centro y radio r.

Entonces existen tres posibilidades:

i) Si $r = 0$ la serie es absolutamente convergente en el entorno pinchado de z_0 de radio R, que puede ser todo el plano complejo excepto el punto z_0 si $R = +\infty$.

ii) Si $0 < r < R < +\infty$ la serie es absolutamente convergente en la corona circular de radios r y R.

iii) Si $r > R$ la serie es divergente para todo z.

Así si $r < R$ la serie de *Laurent* es convergente en la intersección de los dos dominios, es decir en la corona circular $D = \{z;\ r < |z - z_0| < R\}$. Además en cada conjunto compacto contenido en el dominio de convergencia, la convergencia es uniforme. Esto permite definir en D una función holomorfa por medio de $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n.(z - z_0)^n$.

5.3.1. Expresión integral de los coeficientes de la serie de Laurent

Si se forma una nueva corona circular de centro z_0 y radios r' y R' con $r < r' < R' < R$ contenida en la corona D, en esta nueva corona circular la función es holomorfa y existe convergencia absoluta y uniforme de la serie. Se construye un camino cerrado y simple γ formado por dos circunferencias de centro z_0 contenidas en el nuevo dominio y dos segmentos que las unen; entonces, aplicando la fórmula integral de *Cauchy* se puede expresar f mediante una integral compleja. Esta integral se descompone en dos integrales, una a través del círculo interior y otra a través del exterior. Se escribe cada una de las integrales en forma de serie de potencias y se obtiene una interesante relación entre los coeficientes de la serie de Laurent: a_k y expresiones integrales de la función f:

Como consecuencia del teorema de *Cauchy*. se sabe que la integral no depende de las circunferencias elegidas por lo que si γ_ρ es la circunferencia de centro z_0 y radio ρ, $|z - z_0| = \rho$ y $r < \rho < R$, entonces

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\cdot dz, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...) .$$

Gracias a este resultado de representación integral de los coeficientes de la serie de *Laurent* se obtiene que si $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n.(z-z_0)^n$ y $\varphi(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n.(z-z_0)^n$ son dos series de *Laurent* convergentes en las coronas circulares D y Δ respectivamente y $f(z)$ y $\varphi(z)$ coinciden en la circunferencia $|z - z_0| = \rho$ contenida en la intersección de D y Δ, entonces los coeficientes $a_n = b_n$ para todo n, esto es, las series coinciden.

En consecuencia, en una corona circular dada, sólo hay una serie de *Laurent* centrada en $z = z_0$ que tenga una determinada suma, y por lo tanto, si f tiene una singularidad aislada en z_0, como entonces $r = 0$, la función tiene un desarrollo de *Laurent* válido en un entorno pinchado de z_0.

5.3.2. Relación entre el tipo de singularidad y los coeficientes de la serie de Laurent

Se puede utilizar el desarrollo de Laurent para estudiar y clasificar las singularidades aisladas de una función. Así, si $z = z_0$ es una singularidad aislada de f y $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$ es su desarrollo de *Laurent* en un disco pinchado $B'_r(z_0)$, se tiene:

i) $z = z_0$ es una **singularidad evitable** de $f(z)$ si y sólo si $a_n = 0$ para todo $n \leq -1$.

ii) $z = z_0$ es un **polo de orden *m*** de $f(z)$ si y sólo si $a_{-m} \neq 0$ y $a_n = 0$ para todo $n \leq -(m + 1)$.

iii) $z = z_0$ es una **singularidad esencial** de $f(z)$ si y sólo si $a_n \neq 0$ para infinitos enteros negativos n.

Como era previsible, la parte del desarrollo que caracteriza el tipo de singularidad es la de potencias negativas, lo que explica el nombre dado de "parte principal".

Ejemplos resueltos

Ejemplo 5.3.1: En el *capítulo 3* se estudiaron los desarrollos en serie de Laurent en $z = 0$ de las siguientes funciones:

1. $f(z) = \dfrac{(z+1)^2}{z} = z + 2 + \dfrac{1}{z}$.

2. $g(z) = \dfrac{1}{z^2(1-z)} = \dfrac{1}{z^2}\dfrac{1}{1-z} = \dfrac{1}{z^2}(1 + z + z^2 + \ldots) = \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \ldots$

3. $h(z) = exp\left(\dfrac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}\dfrac{1}{z^n} = 1 + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{2z^2} + \ldots + \dfrac{1}{n!}\dfrac{1}{z^n} + \ldots$

Clasificar el tipo de singularidad, en cada caso.

Todas ellas presentan en $z = 0$ una singularidad aislada. A la vista de su desarrollo se puede asegurar que:

La función $f(z)$ tiene un polo simple, pues el último coeficiente distinto de cero de las potencias negativas es el de $\frac{1}{z}$.

La función $g(z)$ tiene un polo de orden 2, pues el último coeficiente distinto de cero de las potencias negativas es el de $\frac{1}{z^2}$.

La función $h(z)$ tiene una singularidad esencial, pues tiene infinitos coeficientes de potencias negativas distintos de cero.

Ejercicios

5.8. Clasificar, si existe, el tipo de singularidad en $z = z_0$, teniendo en cuenta los desarrollos en serie siguientes:

a) $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)(z-3)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right)z^n$.

b) $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)(z-3)} = -\dfrac{1}{z-2} - \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^n$.

c) $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)(z-3)} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-3)^{n+2}}$.

5.4. RESIDUOS

Una de las aplicaciones del desarrollo de *Laurent* en torno a una singularidad reside en el **cálculo de integrales sobre caminos cerrados**. En este cálculo, la parte significativa del desarrollo es la correspondiente al coeficiente a_{-1}, coeficiente que es conocido como "**residuo**" y que se representa como $Res(f, z_0)$: $Res(f, z_0) = a_{-1}$.

La noción de residuo fue introducida por *Cauchy*, quien llegó al concepto en 1 814 al estudiar la diferencia entre dos integrales $\int_{L_1} f(z).dz$, $\int_{L_2} f(z).dz$ en el caso de que L_1 y L_2 sean caminos con los mismos puntos extremos, y que existan polos de $f(z)$ en la región comprendida entre las trazas de L_1 y L_2. El mismo término, "residuo", data de 1826 y es debido también a *Cauchy*. Durante el periodo de 1 826 a 1 829 *Cauchy* aplicó la teoría de residuos a problemas como los de evaluación de integrales, desarrollos de funciones en serie y productos infinitos, teoría de ecuaciones, etc.

Definición 5.4.1:

Sea z_0 una singularidad aislada de f y sea $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n.(z-z_0)^n$, $\forall z \in B'_r(z_0)$. Se denomina ***residuo*** de f en z_0 y se escribe $Res(f, z_0)$ al coeficiente $\boldsymbol{a_{-1}}$ de la serie de Laurent.

La **razón** para destacar ese coeficiente estriba en que cuando se integra f a lo largo de un camino cerrado y simple recorrido en sentido positivo γ contenido en el disco pinchado $B_r(z_0)/\{z_0\}$ en que es válido el desarrollo de

Laurent $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n.(z-z_0)^n$, resulta que $\int_\gamma f(z)dz = a_{-1}\cdot 2\pi i\cdot I_\gamma(z_0)$. Este resultado se debe a la convergencia uniforme de la serie sobre la traza del camino, lo que legitima la integración término a término, y a la existencia de primitiva para las funciones $(z - z_0)^n$ para todo $n \neq -1$, lo que anula dichas integrales, por lo que únicamente queda una integral distinta de cero, la de coeficiente a_{-1}. En consecuencia, a_{-1} es "lo que queda" o "residuo" al integrar:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n.(z-z_0)^n\right)dz = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n.\int_\gamma (z-z_0)^n dz =$$

$$a_{-1}\cdot\int_\gamma (z-z_0)^{-1}dz = a_{-1}\cdot 2\pi i\cdot I_\gamma(z_0).$$

Se comprende la importancia de los residuos puesto que para evaluar $\int_\gamma f(z)dz$ lo único que cuenta es, (suponiendo que la función no tenga en el dominio rodeado por γ más singularidades que z_0 y que $I_\gamma(z_0) = 1$), el residuo: $Res(f, z_0)$. Si la curva rodease un número finito de singularidades se puede descomponer $\int_\gamma f(z)dz$ en suma de varias integrales $\int_{\gamma_k} f(z)dz$ de forma que cada curva γ_k rodee una única singularidad.

Teorema del residuo

Teorema 5.4.1:

Sea γ un camino cerrado que encierra un número finito de singularidades:

z_1, ..., z_n; entonces: $\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} I_{\gamma}(z_k) \cdot Res(f, z_k)$.

Si se supone que γ es un camino cerrado y simple, por lo que el índice es uno, la idea de la demostración se basa en elegir los caminos γ_k: $z_k + r \cdot e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, con r suficientemente pequeño para que los γ_k no se corten entre sí ni a γ. Entonces:

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma_1} f + \ldots + \int_{\gamma_k} f = 2\pi i \cdot Res(f, z_1) + \ldots + 2\pi i \cdot Res(f, z_k).$$

Este teorema generaliza tanto el teorema de *Cauchy* como las fórmulas integrales de *Cauchy* para la función y sus derivadas.

Otra formulación de este mismo teorema es:

Teorema 5.4.1. ***Teorema de los residuos***

Sea f holomorfa en G abierto simplemente conexo excepto en las singularidades aisladas z_1, z_2, ..., z_n. Si γ es un camino cerrado con su traza contenida en G y que no contiene a ninguno de los puntos z_1, z_2, ..., z_n y si γ es homótopo a ***0*** en G, entonces: $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z).dz = \sum_{k=1}^{n} I\gamma(z_k) \cdot Res(f, z_k)$.

5.4.2. Cálculo de residuos. Residuos en los polos

La obtención general del residuo se realiza por medio del cálculo del desarrollo en serie de *Laurent* para conseguir conocer a_{-1}. Sin embargo, en el caso de que la singularidad sea un polo, existen procedimientos más breves que se derivan directamente del desarrollo.

Proposición 5.4.2:

Si f tiene una singularidad evitable en z_0, el residuo vale cero.

Si f tiene un polo de orden k en z_0, el residuo se obtiene utilizando las siguientes expresiones:

$$k = 1: \qquad Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \cdot f(z)$$

$$k > 1: \quad Res(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz_0{}^{k-1}} \left[(z - z_0)^k . f(z) \right]$$

Demostración:

En efecto:

Sea $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n . (z - z_0)^n$ en un disco $B_r(z_0)$. Si f tiene una singularidad evitable en z_0, entonces $a_n = 0$ para todo $n \leq -1$, por lo que el residuo vale cero.

Si f tiene un polo simple en z_0, entonces:

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{+\infty} a_n . (z - z_0)^n = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n \Rightarrow$$

$(z - z_0) \cdot f(z) = a_{-1} + a_0 \cdot (z - z_0) + \ldots \Rightarrow \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \cdot f(z) = a_{-1} = Res(f, z_0)$.

Si f tiene un polo de orden dos en z_0, entonces:

$$f(z) = \sum_{n=-2}^{+\infty} a_n . (z - z_0)^n = \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n \Rightarrow$$

$(z - z_0)^2 \cdot f(z) = a_{-2} + a_{-1} \cdot (z - z_0) + a_0 \cdot (z - z_0)^2 + \ldots \Rightarrow$

$$\frac{d}{dz}((z-z_0)^2\cdot f(z)) = a_{-1} + 2a_0\cdot(z-z_0) + 3a_1\cdot(z-z_0)^2 + \ldots \Rightarrow$$

$$\lim_{z\to z_0}\left(\frac{d}{dz}((z-z_0)^2\cdot f(z))\right) = a_{-1} = Res(f, z_0).$$

Si f tiene un polo de orden m en z_0, entonces:

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n\cdot(z-z_0)^n = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\cdot(z-z_0)^n \Rightarrow$$

$$(z-z_0)^m\cdot f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}\cdot(z-z_0) + \ldots\ a_{-1}\cdot(z-z_0)^{m-1} + a_0\cdot(z-z_0)^m + \ldots \Rightarrow$$

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}((z-z_0)^m\cdot f(z)) = (m-1)!\cdot a_{-1} + m!\cdot a_0\cdot(z-z_0) + \ldots \Rightarrow$$

$$\lim_{z\to z_0}\left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}((z-z_0)^m\cdot f(z))\right) = (m-1)!\cdot a_{-1} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(m-1)!}\left(\lim_{z\to z_0}\left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}((z-z_0)^m\cdot f(z))\right)\right) = a_{-1} = Res(f, z_0). \square$$

Proposición 5.4.3:

Si g y h son funciones holomorfas en un entorno de z_0, y si $f = g/h$ con $g(z_0) \neq 0$ y $h(z_0) = 0$ siendo $h'(z_0) \neq 0$ entonces $Res(f, z_0) = \dfrac{g(z_0)}{h'(z_0)}$.

Demostración:

En las condiciones de la proposición, f tiene un polo simple en z_0, y

$$Res(f, z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\cdot f(z) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\cdot\frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

aplicando la regla de L'Hôpital para calcular el límite. Por tanto:

$$Res(f,\ z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.\ \square$$

Proposición 5.4.4:

Si g es una función holomorfa en un entorno de z_0, y si $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z - z_0)^m}$ con $g(z_0) \neq 0$ entonces $Res(f,\ z_0) = \dfrac{g^{m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$.

Demostración:

En estas condiciones z_0 es un polo de orden m de la función f, por lo tanto:

$$Res(f,\ z_0) = \frac{1}{(m-1)!}\left(\lim_{z\to z_0}\left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z - z_0)^m \cdot f(z)\right)\right)\right) =$$

$$\frac{1}{(m-1)!}\left(\lim_{z\to z_0}\left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z - z_0)^m \cdot \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}\right)\right)\right) =$$

$$\frac{1}{(m-1)!}\left(\lim_{z\to z_0}\left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(g(z))\right)\right) = \frac{g^{m-1)}(z_0)}{(m-1)!}.\ \square$$

5.4.3. Residuo en el infinito

Se supone que $f(z)$ es holomorfa en cada punto z tal que $|z| > r$, para algún $r > 0$, excepto posiblemente en el punto $z = \infty$, y si se realiza una transformación preliminar por medio del cambio $\xi = 1/z$ se transforma el punto $z = \infty$ en el $\xi = 0$ y cada sucesión que converge a infinito en una sucesión que converge a cero. Debido a esto, el estudio de la función f en $z = \infty$ se reduce al estudio de $f^*(\xi) = f(1/\xi)$ que es una función holomorfa en el entorno reducido de cero, $|\xi| < 1/r$. El comportamiento de f cerca de ∞ se conoce mediante el de f^* cerca de 0, con lo que es posible abordar cuestiones referentes a derivabilidad y continuidad cerca de ∞.

En estas condiciones se dice ahora, por definición, que $z = \infty$ es un punto regular, un polo de orden k o una singularidad esencial de f si $\xi = 0$ lo es de f^*, es decir, $f(z)$ tiene en $z = \infty$ una singularidad evitable, un cero de orden k, un polo de orden k, una singularidad esencial o una singularidad no aislada si lo mismo le ocurre a $f^*(z)$ en $z = 0$.

Por ejemplo, $f(z) = z^k$ es un polinomio de grado k, que es una función entera. Para analizar su comportamiento en $z = \infty$ se estudia $f^*(z)$ en $z = 0$, es decir, $f^*(z) = 1/z^k$, que tiene un polo de orden k en $z = 0$, por lo que $f(z) = z^k$ tiene un polo de orden k en $z = \infty$. En general, un polinomio de grado k tiene en $z = \infty$ un polo de orden k.

Como se observa en el ejemplo anterior, la situación en el desarrollo de *Laurent* es la misma que en el caso finito, salvo que quedan intercambiados los papeles de las potencias positivas y negativas. Así, la parte principal pasa a ser la parte de las potencias positivas, y la parte regular, la de las potencias negativas. Hasta el momento se han evaluado los residuos en puntos finitos del plano complejo, sin embargo es posible considerar también el **desarrollo en serie de *Laurent* en torno al punto del infinito**.

Definición 5.4.2:

Dada una función f con desarrollo de Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n . z^n, \quad R < |z| < +\infty .$$

1. Se dice que *f* tiene un polo de orden *k* en $z = \infty$, si f^* tiene un polo de orden *k* en $z = 0$.

2. Se dice que *f* tiene un cero de orden *k* en $z = \infty$, si f^* tiene un cero de orden *k* en $z = 0$.

3. Se define ***residuo de una función f en el punto del infinito*** como:

$$\mathbf{Res}(f, \infty) = -\mathbf{Res}\left(\frac{f^*(z)}{z^2}, 0\right) = -\mathbf{Res}\left(\frac{f(\frac{1}{z})}{z^2}, 0\right).$$

Proposición 5.4.5:

Si γ es una curva cerrada simple recorrida una vez en sentido positivo (el sentido contrario al de las agujas del reloj), y *f* es una función que no tiene singularidades en la región exterior a la curva γ (salvo ∞) entonces:

$$\int_\gamma f = -2\pi i \cdot Res(f, \infty).$$

Demostración:

Sea *R* suficientemente grande para que la traza de la curva esté contenida en el círculo de centro el origen y radio *R*: $(\gamma) \subset B_R(0)$. Como, por hipótesis, no hay singularidades entre (γ) y $|z| = R$ se verifica que:

$$\int_\gamma f = \int_{|z|=R} f = \int_0^{2\pi} f(R \cdot e^{it}) \cdot i \cdot R \cdot e^{it} \cdot dt.$$

Por otra parte $f^*(z) = f(1/z)$ no tiene singularidades en $|z| < 1/R$ (salvo en 0) porque *f* no las tiene en $|z| > R$ (salvo ∞). Por ello:

$$-2\pi i\cdot Res(f, \infty) = 2\pi i\cdot Res\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right) = \int_{|z|=\frac{1}{R}} \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot dz =$$

$$\int_0^{2\pi} R^2\cdot e^{-2it}\cdot f(Re^{-it})\cdot \frac{i}{R}\cdot e^{it}\cdot dt = \int_0^{2\pi} i\cdot R\cdot e^{-it}\cdot f(R\cdot e^{-it})\cdot dt$$

que haciendo un cambio de variable se transforma en:

$$= \int_{2\pi}^{0} i\cdot R\cdot e^{is}\cdot f(R\cdot e^{is})\cdot ds = \int_0^{2\pi} i\cdot R\cdot e^{is}\cdot f(R\cdot e^{is})\cdot ds = \int_\gamma f$$

La penúltima igualdad se obtiene teniendo en cuenta que la función $f(z) = e^{iz}$ es periódica, con periodo 2π. □

Corolario 5.4.6:

Si $f(z)$ es holomorfa salvo en puntos singulares aislados, la suma de todos los residuos de $f(z)$ (incluyendo el residuo en el infinito) es igual a cero.

Este resultado permite simplificar el cálculo de algunas integrales.

La elección del signo negativo en la definición del residuo del infinito se puede explicar por el hecho de que si se tiene un camino cuya traza rodea a uno o varios puntos singulares finitos, se considera como sentido positivo el contrario a las agujas del reloj, ya que, en esta situación, dichos puntos quedan a la "izquierda", supuesto que el desplazamiento es en ese sentido sobre la traza del camino. Si se quiere hacer lo mismo con un camino circular y el punto del infinito, ahora el sentido a considerar como positivo es precisamente el mismo que el de las agujas del reloj.

Corolario 5.4.7:

Sea una función f analítica en un entorno reducido del infinito, $\{z;\ R < |z| < +\infty\}$ y que tenga un desarrollo de *Laurent* de la forma:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cdot z^n, \quad R < |z| < +\infty.$$

Entonces $Res(f, \infty) = -a_{-1}$.

Demostración:

Se sabe que $Res(f, \infty) = -Res(\frac{f(\frac{1}{z})}{z^2}, 0) = -Res(\frac{1}{z^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^n, 0)$,

Pero $\frac{1}{z^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^2}\left(... + a_{-n} \cdot z^n + ... + a_{-1} \cdot z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + ...\right)$

$= \left(... + a_{-n} \cdot z^{n-2} + ... + a_{-1} \cdot z^{-1} + \frac{a_0}{z^2} + \frac{a_1}{z^3} + ...\right).$

Por tanto:

$$Res(\frac{1}{z^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^n, 0) = a_{-1},$$

y en consecuencia:

$$Res(f, \infty) = -a_{-1}. \square$$

Si se integra $f(z)$ sobre un camino γ_ρ: $|z| = \rho$, $\rho > R$, se tiene que $\int_{\gamma_\rho} f(z) \cdot dz = -2\pi i \cdot a_{-1}$, lo que también explica el hecho de que el residuo de f en el infinito sea la cantidad $-a_{-1}$, ya que entonces $\int_\gamma f(z) \cdot dz = 2\pi i \cdot Res(f, \infty)$ y se mantiene la armonía con el teorema del residuo.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 5.4.1: Calcular los siguientes residuos: a) $Res(cotg\ \pi z, 0)$, b) $Res\left(\frac{1}{(2z+1)(z-1)^2}, 1\right)$, c) $Res\left(\frac{1}{(2z+1)(z-1)^2}, \frac{-1}{2}\right)$.

En a) $cotg\ \pi z = \frac{\cos \pi z}{sen \pi z}$ se verifican las condiciones de la *proposición 5.4.3*, por lo que $Res(cotg\ \pi z, 0) = Res\left(\frac{\cos \pi z}{sen \pi z}, 0\right) = \frac{\cos \pi 0}{(sen \pi 0)'} = \frac{1}{\pi}$.

En b) la función tiene un polo de orden 2 en $z = 1$, por lo que:

$$Res\left(\frac{1}{(2z+1)(z-1)^2}, 1\right) = \lim_{z\to 1}\left(\frac{d}{dz}((z-1)^2 \cdot f(z))\right) = \lim_{z\to 1}\left(\frac{d}{dz}\frac{1}{(2z+1)}\right) =$$

$$\lim_{z\to 1}\left(\frac{-2}{(2z+1)^2}\right) = \frac{-2}{9}.$$

En c) la función tiene un polo simple en $z = \frac{-1}{2}$, por lo que:

$$Res\left(\frac{1}{(2z+1)(z-1)^2}, \frac{-1}{2}\right) = \lim_{z\to -\frac{1}{2}}\left((z - \frac{-1}{2})\frac{1}{(2z+1)(z-1)^2}\right) =$$

$$\lim_{z\to -\frac{1}{2}} \frac{1}{2\cdot(z-1)^2} = \frac{2}{9}.$$

Ejemplo 5.4.2: Calcular las siguientes integrales utilizando el teorema del residuo:

a) $\int_\gamma \frac{dz}{z^2+2z-3}$, donde $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

b) $\int_\gamma \frac{e^z \cdot dz}{z^2}$, donde $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

c) $\int_\gamma \frac{(z^2-1)\cdot dz}{z^2+1}$, donde $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

En los tres ejemplos, la curva está recorrida una vez y en sentido positivo, por lo que $I_\gamma(z) = 1$, si z es un punto interior a ella. Es la circunferencia de centro el origen y radio 2.

En a) la función tiene un polo simple en el interior de la circunferencia, el punto $z = 1$, mientras que $z = 3$ es exterior, por lo que:

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2+2z-3} = \int_\gamma \frac{dz}{(z+3)(z-1)} = 2\pi i\cdot I_\gamma(1)\cdot Res(f,\ 1) = 2\pi i\cdot 1\cdot \lim_{z\to 1} \frac{1}{z+3} = \frac{\pi i}{2}.$$

En b) la función tiene un polo de orden 2 en el interior de la circunferencia, el punto $z = 0$, por lo que:

$$\int_\gamma \frac{e^z \cdot dz}{z^2} = 2\pi i\cdot I_\gamma(1)\cdot Res(f,\ 0) = 2\pi i\cdot 1 = 2\pi i,$$

pues $Res(\frac{e^z}{z^2}, 0) = \lim_{z\to 0} (\frac{d}{dz}(z^2\cdot \frac{e^z}{z^2})) = \lim_{z\to 0} e^z = 1$.

En c) la función tiene polos simples en $z = i$ y en $z = -i$ en el interior de la circunferencia:

$$\int_\gamma \frac{(z^2-1)\cdot dz}{z^2+1} = 2\pi i\cdot I_\gamma(i)\cdot Res(f,\ i) + 2\pi i\cdot I_\gamma(-i)\cdot Res(f,\ -i) = 0,$$

pues $Res(\frac{(z^2-1)}{z^2+1}, i) = \lim_{z\to i} (\frac{(z^2-1)}{2z}) = i$, ya que f es de la forma $f = g/h$, y

Res(*f*, i) = $\frac{g(i)}{h'(i)}$. De igual modo *Res*($\frac{(z^2-1)}{z^2+1}$,–i) = $\lim_{z\to -i}$ ($\frac{(z^2-1)}{2z}$) = –i.

Ejemplo 5.4.3: Calcular, utilizando el residuo en el infinito las siguientes integrales:

a) $\int_{|z|=4}\frac{(z-1)^3}{z(z+2)^3}dz$

b) $\int_{|z|=5}\frac{1}{z^2+2z-3}dz$.

Todos los puntos singulares están en el interior de la curva en los dos casos por lo que se puede asegurar que las integrales valen:

$\int_\gamma f$ = –2πi·*Res*(*f*, ∞) = –2πi·*Res*($\frac{-1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)$, 0).

En la integral a) $\int_\gamma f$ = –2πi·*Res*($\frac{-1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)$, 0) = –2πi·*Res*($\frac{-1}{z^2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{z}-1\right)^3}{\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z}+2\right)^3}$, 0)

= –2πi·*Res*($\frac{-1}{z}\cdot\frac{(1-z)^3}{(1+2z)^3}$, 0) = 2πi. pues esta función tiene un polo simple en *z* = 0 y su residuo vale –1.

En la integral b)

$\int_\gamma f$ = –2πi·*Res*($\frac{-1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)$, 0) = –2πi·*Res*($\frac{-1}{z^2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{z}\right)^2+2\left(\frac{1}{z}\right)-3}$, 0) =

–2πi·*Res*($\frac{-1}{1+2z-3z^2}$, 0) = 0,

pues esta función tiene una singularidad evitable en *z* = 0 y su residuo vale 0.

Ejemplo 5.4.4: Calcular las siguientes integrales reales, utilizando integrales complejas: a) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{10-6\cos x}$ b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

a) Se toma γ como la circunferencia de centro el origen y radio 1 $\Rightarrow z = e^{ix}$ $\Rightarrow dz = i \cdot e^{ix} \cdot dx \Rightarrow dx = \frac{dz}{iz}$. cos x = $\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{z+\frac{1}{z}}{2}$.

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{10-6\cos x} = \int_\gamma \frac{\frac{dz}{iz}}{10-6(z+\frac{1}{z})/2} = \frac{1}{i}\int_\gamma \frac{dz}{10z-3z^2-3} = i\int_\gamma \frac{dz}{(3z-1)(z-3)}.$$

El punto $z = 3$ es exterior a la circunferencia, y el punto $z = 1/3$ es interior, por lo que:

$$I = i \cdot 2\pi i \cdot Res\left(\frac{1}{(3z-1)(z-3)}, 1/3\right) = \frac{\pi}{4}.$$

b) Para calcular la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ se toma como recinto un semicírculo de radio R en el semiplano superior, siendo $\gamma(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t)$, $\gamma_1(t) = -R + 2Rt$, $0 \leq t \leq 1$; $\gamma_2(t) = R \cdot e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$. La función tiene dos singularidades $z = i$ y $z = -i$, pero sólo $z = i$ está en el interior de la curva.

Por tanto:

$$\int_\gamma f = 2\pi i \cdot Res\left(\frac{1}{1+z^2}, i\right) = \pi = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f. \qquad (5.1)$$

Mediante la desigualdad de Cauchy se puede acotar la segunda integral:

$$\left|\int_{\gamma_2} f\right| \leq Long(\gamma_2).\ \underset{z\in\gamma_2}{máx}\left|\frac{1}{1+z^2}\right| = \pi\cdot R\cdot\frac{1}{R^2-1}.$$

Se calcula el límite en la igualdad (5.1) cuando R tiende a infinito, y se obtiene:

$$\pi = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} + \lim_{R\to\infty}\left(\pi\cdot R\cdot\frac{1}{R^2-1}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}.$$

Ejercicios

5.9. Calcular los siguientes residuos, sabiendo que son polos simples y utilizando que $Res(f, z_0) = \lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)\cdot f(z)$:

a) $Res(\frac{1}{z-z^2}, 1)$.

b) $Res(\frac{1}{z-z^2}, 0)$.

c) $Res(cotg\ \pi z, 0)$.

d) $Res(\frac{1}{z^4-1}, i)$.

(*Solución*: a) –1; b) 1; c) $\frac{1}{\pi}$; d) $\frac{i}{3}$)

5.10. Calcular los residuos del ejercicio anterior, utilizando que $Res(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$:

5.11. Calcular los residuos de las funciones siguientes en todas sus singularidades aisladas:

a) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^3}$.

b) $f(z) = \dfrac{1}{1+z^4}$.

c) $f(z) = \dfrac{\pi \cdot \cot g \pi z}{z^2}$.

(*Solución*: a) $Res(f, i) = \dfrac{-3i}{8} = -Res(f, -i)$; b) $Res(f, e^{\frac{2k+1}{4}\pi i}) = \dfrac{-1}{4} e^{\frac{2k+1}{4}\pi i}$, para $k = 0, 1, 2$ y 3; c) $Res(f, 0) = \dfrac{-\pi^2}{3}$, $Res(f, n) = \dfrac{1}{n^2}$, si $n \neq 0$)

5.12. Demostrar la expresión $Res\left(\dfrac{g(z)}{(z-z_0)^m}, z_0\right) = \dfrac{g^{m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$ utilizando las fórmulas integrales de Cauchy.

5.13. Calcular los residuos siguientes mediante el desarrollo de la función en serie de Laurent:

a) $Res\left(\dfrac{e^{iz}}{z^4}, 0\right)$.

b) $Res\left(\dfrac{1}{z^4}, 0\right)$.

(*Solución*: a) $\dfrac{-i}{6}$; b) 0)

5.14. Calcular la integral $\int_\gamma \dfrac{dz}{1+z^4}$ utilizando el teorema del residuo, donde $\gamma(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t)$, $\gamma_1(t) = -2 + 4t$, $0 \le t \le 1$; $\gamma_2(t) = 2e^{it}$, $0 \le t \le \pi$, y utilizar el resultado para calcular la integral real: $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^4}$.

(*Solución*: $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$)

(*Ayuda:* Utilizar la integral primera sustituyendo el radio, $r = 2$, por R que se hace tender a infinito)

5.5. FUNCIONES MEROMORFAS, ANALÍTICAS Y ENTERAS

En esta sección se presentan algunos resultados de interés, pero sin demostración, debido a que muchos de ellos son superiores al nivel pretendido en este libro.

5.5.1. Funciones meromorfas

Definición 5.5.1:

Una función f es **meromorfa** en G si sólo tiene singularidades aisladas en G y éstas son evitables o polos.

Por tanto:

- f es meromorfa en G si y sólo si $f = g/h$ con g y h funciones holomorfas en G y h no es idénticamente nula
- Dado un abierto H en ***C*** y un conjunto P de puntos aislados de H se dice que f es una función meromorfa en H si f es holomorfa en H/P siendo P el conjunto de polos y singularidades evitables de f.
- La suma y el producto de funciones meromorfas es una función

meromorfa.

- Si *f* es una función holomorfa en un conexo *H* entonces se sabe que el conjunto de sus ceros es un conjunto de puntos aislados y como consecuencia la función 1/*f* es meromorfa en *H*. Es decir, en un conexo el cociente de dos funciones holomorfas es una función meromorfa.

5.5.2. El principio del argumento y sus consecuencias

La fórmula integral de *Cauchy* puede considerarse como un caso especial del teorema de los residuos. Basta acudir al planteamiento de ese resultado para comprobar que si la función $\frac{f(z)}{z-a}$ tiene un polo simple en $z = a$ su residuo es $f(a)$. Así, por el teorema del residuo se tiene que:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\cdot dz = I_\gamma(a)\cdot Res(\frac{f(z)}{z-a},a) = I_\gamma(a)\cdot f(a).$$

Por otra parte, si se considera una función analítica *f* que tenga en *a* un cero de orden *h*, la función $\frac{f'(z)}{f(z)}$ tiene en $z = a$ un polo simple con residuo *h*. Si se considera un camino cerrado γ que rodee al punto $z = a$, se tiene que:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = I_\gamma(a)\cdot Res(\frac{f'(z)}{f(z)},a) = I_\gamma(a)\cdot h$$

Si la función *f* tiene un polo de orden *h* en $z = a$, el planteamiento viene a ser el mismo, salvo que el residuo es ahora $-h$. Esta situación puede plantearse en general para funciones meromorfas y da lugar al teorema conocido como “principio del argumento”.

Teorema 5.5.1: ***Principio del argumento***

Sea f meromorfa en G con polos $p_1, \ldots, p_m$ y ceros $z_1, \ldots, z_n$ contados tantas veces como indica su multiplicidad. Si γ es un camino cerrado con traza contenida en G, que no pasa por los puntos $p_1, \ldots, p_m, z_1, \ldots, z_n$ y que es homótopo a ***0***, se tiene que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \cdot dz = \sum_{k=1}^{n} I_\gamma(z_k) - \sum_{j=1}^{m} I_\gamma(p_j).$$

Un planteamiento más general es el siguiente:

Teorema 5.5.2:

Sea f meromorfa en G con polos $p_1, \ldots, p_m$ y ceros $z_1, \ldots, z_n$ contados tantas veces como indica su multiplicidad. Si γ es un camino cerrado con traza contenida en G, que no pasa por $p_1, \ldots, p_m, z_1, \ldots, z_n$ y homótopo a ***0*** y g es analítica en G, entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z) \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \cdot dz = \sum_{i=1}^{n} g(z_i) I_\gamma(z_i) - \sum_{j=1}^{m} g(p_j) I_\gamma(p_j)$$

El primero de los dos teoremas corresponde al caso $g(z) \equiv 1$. Si se compara la primera versión del principio del argumento con los comentarios realizados, se observa que los resultados planteados corresponden exactamente a este principio, ya que si $f(z)$ tiene un cero de orden h en $z = a$ (polo de orden h), el número $I_\gamma(a)$ aparece exactamente h veces en el primer sumatorio de la igualdad que constituye la tesis de este principio.

Las razones por las que el resultado anterior recibe el nombre de "principio del argumento" no son obvias. Si se puede definir *log*(*f*(*z*)), esta función es una primitiva de $\frac{f'(z)}{f(z)}$ y así $2\pi i\left[\sum_{k=1}^{n} I_{\gamma}(z_k) - \sum_{j=1}^{m} I_{\gamma}(p_j)\right]$ representa la variación del argumento de *f*(*z*) cuando *z* recorre γ. Como este número es imaginario puro, el cambio es, realmente, el de *Im*(*log*(*f*(*z*))), esto es, el de *i*·*arg*(*f*(*z*)). Así, *arg*(*f*(*z*)) cambia en $2\pi\cdot\left[\sum_{k=1}^{n} I_{\gamma}(z_k) - \sum_{j=1}^{m} I_{\gamma}(p_j)\right]$ cuando *z* recorre γ.

Se puede entender mejor el significado de ese principio si se piensa en un ejemplo concreto como *f*(*z*) = $\frac{z\cdot(z-3)^2\cdot(z-6)}{z+2}$, y una curva γ que tiene de traza la circunferencia $|z|$ = 5. Cuando el punto *z* da una vuelta completa a lo largo de γ, cada uno de los factores del numerador de *f* tiene el siguiente efecto: *z* da una vuelta en torno a 0, $(z-3)^2$ da dos vueltas alrededor del origen y (*z* – 6) no da ninguna, sólo oscila un poco, por lo que el argumento del numerador aumenta en 3·2π = 6π cada vez que *z* recorre el camino γ. El denominador también da una vuelta completa alrededor de 0, que hace disminuir el argumento de *f*(*z*) en 2π.

Naturalmente la explicación anterior no es precisa ni completa. En la situación planteada se tiene que $\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\cdot dz = 0$ ya que es una función que admite primitiva. Una justificación completa se puede hacer por medio del lema de cubrimiento de *Lebesgue*, y puede verse en *J. B. Conway*.[1]

[1] Conway, J.: *Functions of One Complex Variable.* Springer-Verlang. (2ª edición). 1984.

5.5.3. Teorema de *Rouché*

Como consecuencia del principio del argumento se pueden extraer conclusiones sobre el número de ceros de una función holomorfa y especialmente el "*teorema de Rouché*".

Teorema 5.5.3: ***Teorema de Rouché***

Sea γ un camino homótopo a ***0*** con traza contenida en un conjunto abierto y simplemente conexo *G*. Sean *f* y *g* funciones analíticas en *G* y tales que $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$, $\forall z \in (\gamma)$. Entonces $\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot I_\gamma(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{m} q_j \cdot I_\gamma(\beta_j)$ donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son los ceros de *f* con multiplicidades $p_1, \ldots, p_n$ y $\beta_1, \ldots, \beta_m$ son los ceros de *g* con multiplicidad $q_1, \ldots, q_m$.

La versión más interesante de este resultado aparece cuando γ es precisamente la frontera del disco. En este caso, los índices son iguales a uno y el resultado dice que *f* y *g* tienen el mismo número de ceros dentro del disco, contando cada cero tantas veces como indique su orden.

El teorema de *Rouché* dice que si se somete una función *f* a una pequeña perturbación, *g*, pequeña en el sentido de que sobre una curva γ su módulo sea inferior al de *f*, entonces la función modificada tiene el mismo número de ceros encerrados por γ que la función no perturbada.

5.5.4. Teorema fundamental del Álgebra

Esta idea puede aprovecharse para demostrar con toda facilidad el Teorema Fundamental del Álgebra, pues el polinomio $z^n + a \cdot z^{n-1} + b \cdot z^{n-2} + ... + c$ se puede descomponer en suma de z^n, con n raíces en $z = 0$, con el resto $a \cdot z^{n-1} + b \cdot z^{n-2} + ...+ c$, que verifica la desigualdad pedida pues z^n es mayor que el resto si $|z| = R$ es muy grande.

5.5.5. Teorema de *Hurwitz*

Como consecuencia importante del teorema de *Rouché* se obtiene una relación entre los ceros de las funciones de una sucesión y los de la función límite.

Teorema 5.5.4: ***Teorema de Hurwitz***

Sea $\{f_n\}_1^\infty$ una sucesión de funciones holomorfas definidas en un abierto G. Sea f su función límite (que se sabe que es también holomorfa). Sea D un disco con frontera γ tal que $\overline{D} \subseteq G$ y $f(z) \neq 0$ para todo z en la traza de γ. Entonces existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$ la función f_n tiene el mismo número de ceros que f en D.

Como consecuencia se tiene que, si además de las hipótesis anteriores, G es conexo y las funciones f_n no tienen ceros, f no tiene ceros o es idénticamente nula.

Sea G una región, f una función analítica sobre G, a_1, ..., a_m los puntos de G en los que $f(z) = \alpha$ y γ un camino con traza contenida en G y que no pasa por

a_1, ..., a_m. Entonces, por aplicación del principio del argumento, se tiene que:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-\alpha}\cdot dz = \sum_{i=1}^{m} I_\gamma(a_i).$$

5.5.6. Teorema de la aplicación abierta

Se observa que en el planteamiento anterior aparecen los puntos en los que f toma el valor α, esto es, los α-puntos de f. Puede derivarse de esta expresión un resultado sobre el número de raíces de una ecuación y el teorema de una aplicación abierta.

Teorema 5.5.5:

Sea f una función holomorfa en $B_R(a)$ y sea $\alpha = f(a)$. Si $f(z) - \alpha$ tiene un cero de orden m en $z = a$, entonces existen $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ tales que para ζ, $|\zeta - \alpha| < \delta$, la ecuación $f(z) = \zeta$ tiene exactamente m raíces simples en $B_\varepsilon(a)$.

Teorema 5.5.6: ***Teorema de la aplicación abierta***

Sea G una región y f una función holomorfa no constante en G. Entonces para todo conjunto abierto U en G, $f(U)$ es abierto. O de forma equivalente, para cada $a \in G$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(f(a)) \subset f(G)$.

Si $f: G \to \mathbf{C}$ es inyectiva, holomorfa y $f(G) = \Omega$, la aplicación inversa $f^{-1}: \Omega \to \mathbf{C}$ es también holomorfa y $\left(f^{-1}\right)'(w) = \frac{1}{f'(z)}, \quad f(z) = w$.

De acuerdo con el teorema de la aplicación abierta si $w \in f(G)$, siempre se puede encontrar una bola centrada en w y contenida en $f(G)$. Así, si f es no constante, $|f|$ no puede alcanzar el máximo dentro de G. Esto de nuevo da lugar al teorema del módulo máximo, del cual se exponen a continuación tres versiones. Para poder formular la tercera versión se utilizan las siguientes notaciones:

Si *f* es una aplicación definida en *G* y con valores en $\mathfrak{R}$ y $a \in \overline{G}$ o $a = \infty$,

$$\text{lím}\sup_{z \to a} f(z) = \lim_{r \to 0^+} \sup\{f(z) : z \in G \cap B_r(a)\}$$

$$\text{lím}\inf_{z \to a} f(z) = \lim_{r \to 0^+} \inf\{f(z) : z \in G \cap B_r(a)\}.$$

Se llama "frontera ampliada de *G*" a la frontera de *G* en la compactificación de ***C*** y se representa por $\partial_\infty G$. Se observa que si *G* es un subconjunto de ***C*** acotado, esta frontera coincide con la ordinaria, mientras que si *G* es no acotado habría que añadirle el punto del infinito, es decir:

$$\partial_\infty G = \partial G \cup \{\infty\}.$$

5.5.7. Teorema del módulo máximo

Teorema 5.5.7: ***Teorema del módulo máximo (primera versión)***

Si *f* es holomorfa en una región *G* y *a* es un punto en *G* tal que $|f(a)| \geq |f(z)|$ para todo *z* perteneciente a *G*, entonces *f* es constante.

Si *f* es holomorfa en un abierto *G* y no es constante entonces $|f|$ no alcanza su valor máximo en *G*.

Teorema 5.5.8: ***Teorema del módulo máximo (segunda versión)***

Sea *G* un conjunto abierto acotado contenido en ***C*** y se supone que *f* es continua en $\overline{G}$ y holomorfa en *G*. Entonces el valor máximo de $|f|$ en $\overline{G}$ se alcanza en la frontera de *G*:

$$máx\{|f(z)|;\ z \in \overline{G}\} = máx\ \{|f(z)|;\ z \in \partial G\}$$

Teorema 5.5.9: ***Teorema del módulo máximo (tercera versión)***

Sea *G* una región en ***C*** y *f* una función holomorfa en *G*. Se supone que existe una constante *M* tal que *lím sup* $|f(z)| \le M$ para todo $a \in \partial_\infty G$. Entonces $|f(z)| \le M$ para todo $z \in G$.

A partir de estos resultados se pueden obtener interesantes propiedades sobre las funciones holomorfas en relación con su región de crecimiento, distribución de ceros, etc. Por ejemplo se enuncia a continuación el teorema de los "*tres círculos de Hadamard*".

5.5.8. Teorema de los tres círculos de *Hadamard*

Teorema 5.5.10: ***Teorema de los tres círculos de Hadamard***

Sea $0 < R_1 < R_2 < +\infty$ y se supone que *f* es holomorfa en $\{z;\ R_1 < |z| < R_2\}$. Si $R_1 < r < R_2$, se define $M(r) = máx\{|f(r \cdot e^{i\theta})|,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$. Entonces para $R_1 < r_1 \le r \le r_2 < R_2$, se tiene:

$$log\, M(r) \le \frac{log\, r_2 - log\, r}{log\, r_2 - log\, r_1} log\, M(r_1) + \frac{log\, r - log\, r_1}{log\, r_2 - log\, r_1} log\, M(r_2)$$

Expresado de otra manera, *log*(*M*(*r*)) es una función convexa de *log*(*r*).

5.5.9. Problema de *Dirichlet*

Como consecuencia directa de la segunda versión del principio del módulo máximo se sabe que si dos funciones *f* y *g* son continuas sobre un compacto, holomorfas en el interior, y coinciden en la frontera, las dos funciones son iguales. Con esto se obtiene un nuevo resultado sobre identidad de funciones. A partir de aquí se plantea, de forma natural el siguiente problema:

"Si *g* es una función continua en la frontera de un compacto *K*, ¿existe una función *f* definida en *K* que sea prolongación de *g*, continua en *K* y holomorfa en el interior?".

Esta es una forma particular de presentar un problema más general, conocido como "*problema de Dirichlet*".

Otras propiedades sobre funciones holomorfas no constantes son fáciles consecuencias del hecho de que son aplicaciones abiertas. Por ejemplo, la función *Re*(*f*(*z*)) no puede alcanzar el máximo (o el mínimo) en un dominio *D*, si *f* es holomorfa y no constante en él.

5.5.10. Teorema de *Phragmen-Lindelöf*

Por el teorema de *Liouville* se sabe que si una función entera es acotada entonces es constante. Sin embargo a la vista de estos últimos resultados se observa que no es necesario imponer una restricción tan fuerte, sino que es posible limitarse a dar una restricción en el crecimiento de la función. Así, si *f* es entera y $|f(z)| \leq 1 + |z|^{1/2}$ entonces *f* es constante.

En 1908 *E. Phragmen* y *E. Lindelöf* extienden el principio del módulo máximo en este sentido. En su teorema aparece una restricción del crecimiento de la función cuando z se aproxima a puntos de la frontera ampliada.

Teorema 5.5.11: ***Teorema de Phragmen-Lindelöf***

Sea G una región simplemente conexa y f una función holomorfa en G. Se supone que existe una función analítica φ definida en G que no se anula y es acotada en G. Si M es una constante, $\partial_\infty G = A \cup B$ y se verifica:

i) Para cada $a \in A$, $\underset{z \to a}{\text{lím sup}} |f(z)| \leq M$.

ii) Para cada $b \in B$, y $\eta > 0$, $\underset{z \to b}{\text{lím sup}} |f(z)|.|\varphi(z)|^\eta \leq M$ entonces $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in G$.

Se pueden formular los siguientes resultados, que son consecuencias del teorema anterior.

Corolario 5.5.12:

Sea $a \geq 1/2$ y $G = \{z;\ |arg(z)| < \pi/(2 \cdot a)\}$. Se supone que f es holomorfa en G y que existe una constante M tal que $\underset{z \to w}{\text{lím sup}} |f(z)| \leq M, \forall w \in \partial G$. Si existen constantes positivas p y $b < a$ tales que $|f(z)| \leq p \cdot \exp(|z|^b)$ para todo z con módulo suficientemente grande, entonces $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in G$.

Corolario 5.5.13:

Sea $a \geq 1/2$ y $G = \{z;\ |arg(z)| < \pi/(2 \cdot a)\}$. Se supone que $\underset{z \to w}{\text{lím sup}} |f(z)| \leq M, \forall w \in \partial G$. Además se supone que para cada δ existe una constante p (que puede depender de δ) tal que $|f(z)| \leq p \cdot \exp(\delta \cdot |z|^w)$ para todo z con módulo suficientemente grande y que pertenezca a G, entonces $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in G$.

A continuación se presenta una última consecuencia del teorema del módulo máximo, que permite, por otra parte, caracterizar las aplicaciones conformes del disco unidad sobre si mismo.

5.5.11. Lema de *Schwarz*

Proposición 5.5.14: ***Lema de Schwarz***

Sea $B_1(0) = \{z; |z|<1\}$ y se supone que f es holomorfa en $B_1(0)$ y que verifica que $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in B_1(0)$, y $f(0) = 0$; entonces $|f'(0)| \leq 1$ y $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in B_1(0)$. Además si $|f'(0)| = 1$ o si $|f(z)| = |z|$ para algún $z \neq 0$, existe una constante c con módulo uno, tal que $f(z) = cz$ para todo $z \in B_1(0)$, lo que significa que f es un giro.

La conclusión $|f(z)| \leq |z|$ en el lema de *Schwarz* expresa una restricción específica sobre $f(z)$ en términos de z, esto es, la aplicación $z \to f(z)$ no aumenta el módulo. En particular esto implica que si z varía en algún subconjunto del disco $|z| \leq r$ $(0 < r < 1)$, entonces los valores de $f(z)$ están también en ese disco.

Por aplicación de este resultado se obtiene que si f es una aplicación holomorfa y biyectiva del disco $B_r(0)$ sobre sí mismo, f es de la forma $f = c\varphi_\alpha$ donde c es una constante del módulo igual a 1 y φ_α es una transformación de *Möbius* de la forma $\varphi_\alpha = \dfrac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}.z}$.

5.5.12. Principio de *Lindelöf* o principio de subordinación

Sean f y g dos funciones holomorfas en $|z|<1$ con rangos F y G respectivamente, y se supone que F está contenido en G. Se supone también que g es inyectiva en $|z| < 1$ y que $f(0) = g(0)$. Todos estos supuestos se expresan diciendo que f está subordinada a g para $|z| < 1$. Bajo estas condiciones g tiene inversa analítica g^{-1} y la función $\phi = g^{-1} \circ f$ es analítica para $|z| < 1$. La función ϕ satisface el lema de *Schwarz* y así $|\phi'(0)| \leq 1$. Como $f(z) = g(\phi(z))$ y, en particular como $f'(0) = g'(0)\cdot\phi'(0)$ se tiene que $|f'(0)| \leq |g'(0)|$. Además la igualdad se verifica si $f(z) = g(rz)$, donde $|r| = 1$. Así la desigualdad anterior expresa el hecho de que el máximo módulo de la derivada en el 0 de todas las funciones subordinadas a g se alcanza en aquellas funciones que se obtienen de g por rotaciones en z.

La subordinación de f a g es equivalente a la relación $f(z) = g(\phi(z))$, donde ϕ satisface el lema de *Schwarz*.

Por tanto ϕ satisface $|\phi(z)| \leq |z|$ para todo z, ($|z| < 1$). En particular si $|z| \leq r$ ($0 < r < 1$) entonces $|\phi(z)| \leq r$. Como $f(z) = g(\phi(z))$ esto implica que la imagen de $|z| \leq r$ por f es un subconjunto de la imagen de $|z| \leq r$ bajo g.

Este resultado se conoce usualmente como "**principio de *Lindelöf***".

Puede expresarse diciendo que si f está subordinada a g para $|z| < 1$ entonces f está subordinada a g para $|z| < r$, para todo r, $0 < r < 1$.

El término "**principio de subordinación"** remite a la desigualdad $|f'(0)| \leq |g'(0)|$, a la relación $f(z) = g(\phi(z))$, o al principio de *Lindelöf*. El lema de *Schwarz* puede considerarse como un caso especial de este principio, donde G es el disco unidad abierto y $g(z) = z$.

5.5.13. Clasificación de las funciones enteras

Definición 5.5.2:

Una ***función entera*** es una función holomorfa en todo el plano complejo.

Esto implica que verifica un conjunto de interesantes propiedades, como por ejemplo, que:

- El desarrollo en serie de potencias en cualquier punto tiene un radio de convergencia infinito.
- La suma, diferencia y producto de un número finito de funciones enteras sigue siendo una función entera.
- El cociente de dos funciones enteras es una función entera si el denominador es distinto de cero en todo punto.
- La composición de dos funciones enteras es una función entera.
- Si $f(z)$ es una función entera que no se anula en ningún punto entonces existe una función entera $g(z)$ tal que $f(z) = exp(g(z))$.

El comportamiento de las funciones enteras en el infinito permite clasificarlas en tres grandes grupos:

- Si la función entera tiene en el punto del infinito un punto regular, al aplicar el teorema de *Liouville* se tiene que debe ser una **función constante**.
- Si la función entera tiene en el punto del infinito un polo de orden k

mayor o igual a uno, entonces la función es un **polinomio**.

- Si la función entera tiene en el punto del infinito una singularidad esencial entonces recibe el nombre de **función entera transcendente** por similitud a los números transcendentes.

Se considera un dominio acotado D y una función entera f. Aplicando el teorema del módulo máximo se sabe que el módulo de f alcanza su máximo en la frontera de D. Por tanto si $D = \{z;\ |z| < r\}$ el máximo se alcanza en un punto z_0 con módulo r. Se representa por $\boldsymbol{M}(r)$, o por $\boldsymbol{M}(r, f)$, si se quiere hacer referencia expresa a la función, a dicho máximo:

$$\boldsymbol{M}(r) = \boldsymbol{M}(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

De igual forma, si f es una función entera que no se anula, entonces $F(z) = 1/f(z)$ es entera, y f alcanza su módulo mínimo en el punto donde F alcanza su módulo máximo, y por tanto en un punto z_1 de módulo r, que se representa por $\boldsymbol{m}(r)$. Es evidente que $\boldsymbol{M}(r)$ crece al crecer r. Se estudia la relación entre $\boldsymbol{M}(r)$ y los coeficientes de la serie de potencias asociada a f en 0, y se compara su crecimiento con el de la función exponencial. Por último se compara el crecimiento del módulo máximo, $\boldsymbol{M}(r)$, con el crecimiento del módulo mínimo $\boldsymbol{m}(r)$.

Al desarrollar la función f en serie de potencias en el origen se conoce, por la desigualdad de *Cauchy*, que el módulo de los coeficientes está acotado por $|a_n| \le \boldsymbol{M}(r)/r^n$, luego en el caso en que la función sea un polinomio de grado n se tiene que:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{M(r)}{|a_n|\cdot r^n} = \lim_{r\to\infty} \frac{M(r,P)}{M(r,a_n z^n)} = 1,$$

es decir, el módulo máximo de un polinomio de grado *n* es asintóticamente igual al término de mayor grado del polinomio.

Si *f* es una función entera que no es un polinomio, la relación de crecimiento de su módulo máximo con respecto a la del polinomio viene dada por el siguiente teorema:

Proposición 5.5.15:

Si *f* es una función entera que no es un polinomio se tiene que:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{M(r,P)}{M(r,f)} = 0 .$$

Esto indica que el módulo máximo de la función crece más deprisa que el módulo máximo del polinomio, sea cual sea ese polinomio.

Definición 5.5.3:

Una función holomorfa se dice que es una función ***algebraica*** si verifica una ecuación de la forma:

$$P_0(z) + P_1(z)\cdot f(z) + P_2(z)\cdot f^2(z) + ... + P_n(z)\cdot f^n(z) = 0,$$

para todo z en un dominio dado, donde $P_i(z)$ son polinomios y $P_n(z)$ no es idénticamente nulo.

Los nombres de funciones enteras algebraicas y transcendentes hacen referencia a la similitud con los números irracionales algebraicos, que son raíces de alguna ecuación algebraica, o transcendentes, que no son raíces de ninguna ecuación algebraica de grado finito con coeficientes racionales. Se tiene que si una función entera no es un polinomio, entonces no es algebraica.

5.5.14. Orden de una función entera

El orden es un número que caracteriza a las funciones enteras pues compara el crecimiento del módulo máximo de la función con el crecimiento del módulo máximo de la función exponencial.

Definición 5.5.4:

Se llama ***orden de una función entera*** *f*(*z*) no idénticamente nula al número ρ obtenido como el límite superior de:

$$\rho = \mathop{lím\,sup}_{r\to\infty} \frac{lg\, lg\, \mathrm{M}(r,f)}{lg\, lg\, \mathrm{M}(r,e^{z})} = \mathop{lím\,sup}_{r\to\infty} \frac{lg\, lg\, \mathrm{M}(r,f)}{lg\, r}.$$

Se tienen los siguientes resultados:

- Si *f*(*z*) es una función entera transcendente, *P*(*z*) y *Q*(*z*) son polinomios y *P*(*z*) no es idénticamente nulo, entonces el orden de *P*(*z*)·*f*(*z*) + *Q*(*z*) es el mismo que el de *f*(*z*).
- El orden de una función entera *f*(*z*) = *P*(*z*)·$e^{R(z)}$ + *Q*(*z*), donde *P*(*z*), *R*(*z*) y *Q*(*z*) son polinomios y *P*(*z*) no es idénticamente nulo, es igual al grado de *R*(*z*).
- Si *R*(*z*) es una función entera y el orden de *f*(*z*) = $e^{R(z)}$ es finito, entonces *R*(*z*) es un polinomio y por tanto el orden de *f*(*z*) es un número entero.

El desarrollo en serie de potencias de una función entera transcendente se podría suponer que es una especie de polinomio de grado infinito, con lo que entonces debería de tener, igualada a cero, un número infinito de soluciones, lo que en general no es cierto. En este sentido se tienen los siguientes resultados:

- Si $f(z)$ es una función entera transcendente y de orden finito no entero, y $P(z)$ es un polinomio no idénticamente nulo, la ecuación: $f(z) = A{\cdot}P(z)$, tiene infinitas raíces para todo número complejo A sin excepciones.

Si $f(z)$ es una función entera transcendente y de orden finito entero, y $P(z)$ es un polinomio no idénticamente nulo, la ecuación: $f(z) = A{\cdot}P(z)$, tiene infinitas raíces para todo número complejo A con la posible excepción de un valor.

Los resultados anteriores son casos particulares del siguiente teorema:

Proposición 5.5.16:

Si $f(z)$ es una función meromorfa transcendente, (con una singularidad esencial en el infinito), para cada número complejo A, finito o infinito, la ecuación $f(z) = A$ tiene un número infinito de raíces con dos posibles excepciones.

Se puede estudiar también la relación entre el conjunto de ceros y el módulo máximo de la función enunciando el teorema de *Jensen*, que se puede extender a los polos, teniendo la expresión conocida como fórmula de *Poisson-Jensen*. Un resultado parecido al teorema de *Jensen* pero que en lugar de aplicarse en una región circular se aplica en un semiplano es el teorema de *Carleman*. El teorema de *Borel* y *Carathéodory* permite obtener una cota superior del módulo de una función en un círculo a partir de cotas de sus partes real o imaginaria sobre un círculo concéntrico de radio mayor.

Otra forma de introducir el concepto de orden, útil en muchas ocasiones, es como sigue:

Definición 5.5.5:

Se dice que una función entera $f(z)$ tiene ***orden finito*** si existe una constante λ tal que $|f(z)| < exp\ r^{\lambda}$ para $|z| = r$, y r mayor que un cierto r_0.

Mediante la definición anterior es fácil probar que:

- Si $f_1(z)$ y $f_2(z)$ son funciones enteras de órdenes ρ_1 y ρ_2 respectivamente, y si $\rho_1 < \rho_2$, el orden de $f_1(z) + f_2(z)$ es igual a ρ_2.
- Si $f_1(z)$ y $f_2(z)$ son funciones enteras de órdenes ρ_1 y ρ_2 respectivamente, y si $\rho_1 \le \rho_2$, el orden de $f_1(z)\cdot f_2(z)$ es menor o igual a ρ_2.
- Si $f(z)$ es una función entera de orden ρ y $P(z)$ es un polinomio no nulo, el producto $f(z)\cdot P(z)$ es una función entera de orden ρ. Y si el cociente $f(z)/P(z)$ es una función entera, también es de orden ρ.

Definición 5.5.6:

Dada una función entera $f(z)$ de orden finito ρ, si se supone que existe un $k > 0$ tal que $\boldsymbol{M}(r, f) < exp(k\cdot r^{\rho})$, con r suficientemente grande, entonces se dice que f es de ***tipo finito***.

Al ínfimo de los valores k se le denomina **tipo** de f y se representa por σ. Si $0 < \sigma < \infty$ se dice que f es de **tipo finito**, si $\sigma = 0$ se dice que f es de **tipo mínimo**, y si $\sigma = \infty$ se dice que f es de **tipo máximo**.

5.6. EJERCICIOS

5.15. Determinar las singularidades de las funciones:

a) $f(z) = Log(\frac{2z+3}{z-1})$,

b) $f(z) = Im(\bar{z}^2)$.

c) $f(z) = \frac{1}{z^2 senz}$.

d) $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$.

5.16. Analizar las singularidades de la función: $f(z) = \frac{1}{cos(\frac{1}{z})}$.

5.17. Analizar las singularidades de la función: $f(z) = \frac{1}{tan g(\frac{1}{z})}$.

5.18. Clasificar los distintos tipos de singularidades de las funciones siguientes:

a) $f(z) = \frac{1}{z^2 senz}$.

b) $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$.

c) $f(z) = \frac{sen^2 z}{z^2}$.

d) $f(z) = \frac{z}{(e^z - 1)cos\, z}$.

5.19. Clasificar los distintos tipos de singularidades de las funciones siguientes:

a) $f(z) = \dfrac{(z+1)}{(z-3)^2 sen^3 z}$.

b) $f(z) = \dfrac{z}{e^{\frac{1}{z}} - 1}$.

c) $f(z) = \dfrac{sen^2 z}{(z+5)^2 (z-1)^3}$.

d) $f(z) = \dfrac{2(z+3)}{(e^z - 1)cos(\frac{1}{z})}$.

5.20. Clasificar, si existe, el tipo de singularidad en $z = z_0$, realizando el desarrollo en serie adecuado:

a) $f(z) = \dfrac{1}{(z+2)(z-3)}$ en z = –2.

b) $f(z) = \dfrac{1}{(z+2)^3 (z-3)}$ en z = –2.

c) $f(z) = \dfrac{(z-1)^3}{(z+2)^3 z}$ en z = –2.

d) $f(z) = \dfrac{1}{z^3 senz}$ en z = 0.

5.21. Calcular los siguientes residuos:

a) $Res(\dfrac{1}{z^3 senz}, 0)$.

b) $Res(\dfrac{(z-1)^3}{(z+2)^3 z}, -2)$.

c) $Res(\dfrac{1}{(z+2)^3(z-3)}, -2)$.

d) $Res(\dfrac{z}{(z-3)^2 sen^3 z}, 0)$.

5.22. Calcular las siguientes integrales utilizando el teorema del residuo:

a) $\int_\gamma \dfrac{(z-1)^3 \cdot dz}{z \cdot (z+2)}$, donde $\gamma(t) = 3e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

b) $\int_\gamma \dfrac{\cos z \cdot dz}{(z+2)^2(e^z - 1)}$, donde $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

c) $\int_\gamma \dfrac{senz \cdot dz}{z^2(z^2+1)(z+5)}$, donde $\gamma(t) = 4e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(*Solución*: a) $2\pi i$; b) $\dfrac{\pi i}{2}$; c) $2\pi i(\dfrac{1}{5} + \dfrac{5i \cdot seni}{26})$)

5.23. Calcular la integral $I_m = \int_{\gamma_m} \dfrac{dz}{z^2(senz)}$ si la traza de γ_m es el cuadrado de vértices los puntos: $\dfrac{2m+1}{2}\pi(\pm 1 \pm i)$ y utilizar el resultado para calcular la suma de la serie: $s = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$.

(*Solución*: $I_m = 2\pi i(\dfrac{1}{6} + 2\sum_{n=1}^{m} \dfrac{(-1)^n}{n^2\pi^2})$; $s = \dfrac{-\pi^2}{12}$)

5.24. Deducir que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

(*Ayuda*: Evaluar la integral $I_m = \int_{\gamma_m} \frac{\pi \cdot \cot g \pi z \cdot dz}{z^2}$ cuando la traza de γ_m es el cuadrado de vértices los puntos: $\frac{2m+1}{2}\pi(\pm 1 \pm i)$)

5.25. Deducir que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

5.26. Calcular las siguientes integrales reales, utilizando integrales complejas:

a) $\int_0^{+\infty} \frac{(2x^2 - 1) \cdot dx}{x^4 + 5x^2 + 4}$.

b) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 \cdot dx}{(x^2 + 9)(x^2 + 4)^2}$.

c) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 4)}$.

(*Solución*: a) $\frac{\pi}{4}$; b) $\frac{\pi}{200}$; c) $\frac{\pi}{18}$)

5.27. Demostrar que $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + 1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

(*Ayuda*: Evaluar la integral $I = \int_{\gamma} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f + \int_{\gamma_3} f$ siendo la traza de γ_1 el segmento [0, *R*], $\gamma_2(t) = Re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi/3$, y γ_3 el segmento $[Re^{\frac{2\pi}{3}i}, 0]$. Calcular el límite cuando *R* tiende a infinito.)

5.28. Estudiar la forma de calcular utilizando integrales complejas las siguientes integrales reales, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \begin{Bmatrix} senx \\ cos\, x \end{Bmatrix} dx$, donde P(x) y Q(x) son polinomios, y aplicarlo a los siguientes ejemplos:

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cos\, x \cdot dx}{x^2 + x + 1}$.

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{senx \cdot dx}{x^2 + x + 1}$.

(*Solución*: Se calcula la integral compleja en el semicírculo, sustituyendo el seno o el coseno por e^{iz}, y se separa parte real y parte imaginaria. a) $\frac{2\pi e^{\frac{-\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}}$; b) $\frac{-\pi}{\sqrt{3}}$)

5.29. Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{senx \cdot dx}{x^2}$.

5.30. Calcular, utilizando el residuo en el infinito las siguientes integrales:

a) $\int_{\gamma} \frac{(z-1)^3 \cdot dz}{z^2 \cdot (z^2 + a)}$, donde $\gamma(t) = 5e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

b) $\int_{\gamma} \frac{cos\, z \cdot dz}{(z+2)^7 (e^z - 1)}$, donde $\gamma(t) = 7e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

c) $\int_{\gamma} \frac{senz \cdot dz}{z^5 \cdot (z^2+1)^3 \cdot (z+5)^2}$, donde $\gamma(t) = 6e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

5.31. Se considera el camino: $\gamma(t) = 1 + (3 + 2t - t^2)e^{2\pi it}$, $0 \le t \le 2$. a) Comprobar que el camino es cerrado. b) Calcular, utilizando la definición de índice, el índice de γ respecto del punto $z = 1$. c)

Calcular $\int_{\gamma} \frac{z^3 \cdot cos(\pi z^2) \cdot dz}{(z-1)}$.

5.32. Calcular el residuo de *f* en su singularidad siendo *f* la transformación de Móbius $f(z) = k \cdot \frac{z-A}{z-B}$, donde *k*, *A* y *B* son números complejos. Calcular $\int_{\gamma} f'$ siendo γ una curva cerrada y simple cualquiera.

5.33. Calcular la integral $\int_{\gamma} \frac{(\pi^2 z^2 - z^4) \cdot dz}{(e^z + e^{-z}) \cdot (1 - cos^2 z)}$ utilizando el teorema del residuo, donde $\gamma(t) = \frac{7}{2} e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

5.34. Calcular las siguientes integrales utilizando el teorema del residuo:

a) $\int_{\gamma} \frac{e^{-z} \cdot dz}{(z-1)^2}$, donde $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \le t \le 6\pi$.

b) $\int_{\gamma} (z - z_0)^{\frac{-1}{2}} dz$, donde $\gamma(t) = z_0 + 2e^{it}$, $-\pi \le t \le \pi$.

5.35. Sea γ el camino cerrado cuya traza es el cuadrado de vértices (2, 2), (–2, 2), (–2, –2), (2, –2), calcular las siguientes integrales:

a) $\int_{\gamma} \frac{z^2 \cdot dz}{(\pi + z)(z - i)}$, donde γ se recorre dos veces en sentido negativo.

b) $\int_{\gamma} \frac{e^{cos\, z} \cdot dz}{(9 - z^2)(z + \pi)}$, donde γ se recorre tres veces en sentido positivo.

c) $\int_\gamma \bar{z} \cdot dz$, donde γ se recorre una vez en sentido positivo.

5.36. Calcular las siguientes integrales donde $\gamma(t) = 5e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

a) $\int_\gamma (1+z+z^2)\cdot e^{\frac{1}{z}} \cdot dz$.

b) $\int_\gamma (1+z+z^2)\cdot e^{\frac{1}{z-4}} \cdot dz$.

c) $\int_\gamma (1+z+z^2)\cdot (e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-4}})\cdot dz$.

(*Solución*: a) $\frac{10\pi i}{3}$ b) $\frac{154\pi i}{3}$ c) $\frac{164\pi i}{3}$)

5.37. Calcular $\int_\gamma \frac{3z^2 \cos z \cdot dz}{(1-z^2)\cdot(z-3i)\cdot sen^2 z}$,

a) donde $\gamma(t) = 4e^{it}$, $0 \le t \le 4\pi$.

b) donde $\gamma(t) = 4e^{it}$, $-2\pi \le t \le 0$.

c) donde $\gamma(t) = \frac{1}{4}e^{it}$, $0 \le t \le 4\pi$.

d) donde $\gamma(t) = \frac{1}{4}e^{it}$, $-2\pi \le t \le 0$.

5.38. Calcular las siguientes integrales donde $\gamma(t) = \frac{3}{4}e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

a) $\int_\gamma \frac{(1-4z)\cdot dz}{(1-z)^2\cdot(1-2z)}$.

b) $\int_\gamma z^5 \cdot \cos\frac{1}{z} \cdot dz$.

5.39. Calcular $\int_\gamma \frac{dz}{sen z - 2}$, donde $\gamma(t) = \pi e^{it}$, $0 \le t \le 6\pi$, obteniendo previamente las raíces de la ecuación: *sen z* = 2.

5.40. Calcular $\int_\gamma \frac{(3z - sen 2z + 3(z-1)\cdot \cos z)\cdot dz}{(z-1)^2}$, donde la traza de la curva γ es $\{z; |z - 1| = 2\}$, recorrida una vez en sentido positivo.

5.41. Calcular $\int_\gamma \frac{z \cdot dz}{e^z - 1}$, donde $\gamma(t) = 4e^{it} - (1 - \pi i)$, $0 \le t \le 2\pi$.

(*Solución*: $-4\pi^2$)

5.42. Calcular $\int_\gamma f$, donde $\gamma(t) = 1 + 2e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, sabiendo que $f'(z) = z^4 \cdot \cos \frac{5}{z}$.

(*Solución*: $\frac{2\pi i \cdot 5^6}{6!}$)

5.43. Calcular las siguientes integrales donde la traza de la curva γ es el contorno del cuadrado de lados paralelos a los ejes coordenados, centrado en el origen y semilado de longitudes *a* = 1, 2, 3 y 4, recorrida una vez en sentido positivo.

a) $\int_\gamma \frac{dz}{e^z + 1}$.

b) $\int_\gamma \frac{dz}{e^{2z} + 2e^z + 1}$.

(*Solución*: Para *a* = 1, 2 y 3, I = 0; Para *a* = 4: I $= -4\pi i$, en ambas integrales)

5.44. Dada la función $f(z) = \dfrac{e^{z+3i}}{(z+3i)^4}$:

a) Calcular el desarrollo de Laurent de $f(z)$ en $0 < |z + 3i| < +\infty$.

b) Calcular $\int_\gamma f$ siendo la traza de la curva γ el cuadrado de lados de longitud 10 paralelos a los ejes coordenados, centrado en el origen y recorrido una vez en sentido positivo.

(*Solución*: $\int_\gamma f = \dfrac{\pi i}{3}$)

5.45. Calcular $\int_\gamma \dfrac{senz \cdot dz}{z(\cos z - 1)}$, donde $\gamma(t) = 3e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

(*Solución*: 0)

5.46. Calcular $\int_\gamma \dfrac{2tghz \cdot dz}{e^z(\cos z - 1)}$, donde $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 4\pi$, siendo *tgh z* la función tangente hiperbólica. Estudiar previamente la derivabilidad de esta función, y la derivabilidad de la función: $\dfrac{2tghz}{e^z(\cos z - 1)}$.

(*Solución*: $\int_\gamma f = -16\pi i$)

5.47. Calcular $\int_\gamma \left(\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{5z} + \dfrac{1}{\cos z - senx}\right)dz$, donde $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 4\pi$.

(*Solución*: $\dfrac{4\pi i}{5} - 2\sqrt{2}\pi i$)

5.48. Calcular las siguientes integrales donde $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \le t \le 2k\pi$, *k*

= 1, 2, ...

a) $\int_\gamma \frac{dz}{z-1}$.

b) $\int_\gamma \frac{dz}{z-3}$.

c) $\int_\gamma \frac{e^z \cdot dz}{z^3+9z}$.

(*Solución*: a) $2\pi i\cdot k$; b) 0; c) $2\pi i\cdot k/9$)

5.49. Calcular $\int_\gamma \frac{1}{z^2+i}dz$, donde $\gamma(t) = \begin{cases} \pi e^{it} & \frac{-\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2} \\ 2(-t+\pi)i & \frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2} \end{cases}$.

(*Solución*: $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi(-1+i)$)

5.50. Calcular $\int_\gamma f$, donde $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2$, y $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{z^n}{3^{|n|}}$.

(*Solución*: $\frac{2}{3}\pi i$)

5.51. Calcular $\int_\gamma \left(\frac{\cos z - 1}{z^2(e^z - 1} + (z-2)e^{\frac{1}{z}}\right)dz$, donde $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

(*Solución*: $-4\pi i$)

5.52. Calcular $\int_\gamma \frac{3z^2 \cos z}{(1-z^2)(z-3i)\operatorname{sen}^2 z}dz$, donde

a) $\gamma(t) = 6e^{it}$, $0 \le t \le 4\pi$.

b) $\gamma(t) = \frac{1}{6}e^{it}$, $-2\pi \le t \le 0$.

5.53. Calcular $\int_\gamma \frac{z - \frac{\pi}{4}}{\cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z} dz$, donde $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.