ÍNDICE

CAPÍTULO 11. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden *695*

Prólogo

En este libro los autores y autoras hemos pretendido desarrollar los contenidos de un curso clásico de Análisis Matemático: Variable Compleja, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Métodos Numéricos para las ecuaciones diferenciales. Está dirigido de manera especial a estudiantes de ingeniería y por tanto los contenidos se han seleccionado teniendo muy presentes las posibles aplicaciones. Nuestro deseo es que esta obra sea de utilidad tanto para estudiantes de escuelas técnicas como para el profesorado que imparte las correspondientes asignaturas.

Se ha procurado que el texto tenga una estructura clara y sencilla. Por esta razón se han eliminado las demostraciones de algunos resultados que, quizás, por su excesiva abstracción o sus dificultades técnicas, pudieran complicar la comprensión, en lugar de ayudar a mejorarla.

Se ha intentado mantener un orden coherente en la presentación y desarrollo de los distintos conceptos que se van introduciendo, incorporando al final de cada apartado algunos ejemplos totalmente resueltos que pueden contribuir en gran medida a su comprensión y asimilación. Al final de cada apartado y de cada capítulo se adjuntan ejercicios y problemas, y en las ocasiones que se ha considerado adecuado, se han añadido las soluciones.

El equipo formado por los autores y las autoras del libro lleva numerosos años explicando los contenidos del texto a alumnado de distintas ramas de ingeniería: caminos, informática, telecomunicaciones... A partir de la propia experiencia se observó que existen magníficos textos de ecuaciones diferenciales ordinarias, que sin embargo proporcionan un tratamiento demasiado elemental, en opinión de los autores, al estudio de los procedimientos de resolución numérica de ecuaciones diferenciales. Igualmente, existen estupendos textos de métodos numéricos, pero que no abordan el estudio general de las ecuaciones diferenciales ordinarias, y de forma similar sucede con la teoría de las funciones complejas, donde se encuentran espléndidos textos de variable compleja, pero que no tratan ni las ecuaciones diferenciales ordinarias, ni los métodos para la resolución numérica de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Aunque existía bastante bibliografía de consulta, no conocíamos ninguna obra en el mercado que reuniera todos los aspectos que necesitábamos que tuviese el libro de texto. Desde un punto de vista docente es muy importante que una materia de este tipo se encuentre recogida en un único texto, de forma que el profesorado pueda utilizarlo como guía y recomendarlo a los alumnos. En este libro se ha pretendido recopilar los contenidos básicos de las materias anteriores de manera que su estructura reúna con el nivel de rigor requerido, ni demasiado riguroso, más adecuado para el alumnado de matemáticas, ni carente de rigor, de manera que los estudiantes de ingeniería, a los que va especialmente dirigido, encuentren lo necesario para servirles de guía y les permita comprender y asimilar la materia desarrollada.

El texto se puede considerar formado por tres secciones diferenciadas, que abordan, en este orden, el estudio de las funciones de variable compleja, el estudio general de la teoría de ecuaciones diferenciales y el tratamiento numérico de las ecuaciones diferenciales. En cada una de ellos se ha añadido una introducción histórica, con el fin de introducir en las distintas materias que se van a estudiar a través de un recorrido por el tiempo, en el que se muestra su origen, evolución y desarrollo posterior. Pensamos que conocer la evolución histórica de las matemáticas, la forma de trabajar del matemático profesional y la contribución de éste, así como las dificultades, las razones o los procedimientos de los que han surgido los conceptos y las ideas, mejora el aprendizaje.

La primera sección aborda el estudio de la teoría de funciones de una variable compleja. Se ha dividido en seis capítulos, que van precedidos por una introducción histórica. En ella se ha pretendido presentar de forma resumida la aparición de los números complejos, su utilización en los comienzos como solución de distintos problemas planteados, pero pensando en los números complejos como entes extraños e imaginarios, y su sucesiva formalización hasta llegar a su aceptación por parte de la comunidad científica como disciplina dotada de una base sólida y coherente, eliminando definitivamente el carácter misterioso que tenían en un principio dichos números.

El primer capítulo es esencialmente una revisión de los números complejos, concepto y propiedades, ya conocidos de cursos anteriores, tanto por las asignaturas de primer curso de ingeniería como en el bachillerato: se introducen los números complejos, sus operaciones, propiedades y estructura. Quizás se añade a lo que usualmente conocen, la notación exponencial. Se define el plano complejo, se representan conjuntos en él, se concretan algunas definiciones topológicas y se define la esfera de Riemann, que permite introducir el punto de infinito en el plano complejo, insistiendo en la diferencia en el concepto de infinito en la recta real, que es un conjunto totalmente ordenado con $-\infty$ y $+\infty$, y el concepto de infinito en el plano complejo.

En el segundo capítulo se definen las funciones complejas. Se extienden al plano complejo las funciones reales ya conocidas, y se define la derivada de una función compleja, de importancia fundamental dentro de la teoría, poniendo especial atención en presentar las diferencias existentes entre la derivada de las funciones de $\Re$ en $\Re$, las funciones de $\Re\times\Re$ en $\Re$ y la derivada compleja. Se introduce el concepto de holomorfía. Se podría haber definido función holomorfa en un punto como función derivable en dicho punto, pero entonces se perderían muchas de sus buenas propiedades, por lo que la experiencia en su docencia, nos ha llevado a definir que una función es holomorfa en un punto z_0 si es una función derivable en todos los puntos de un entorno de z_0. Este hecho supone que dichas funciones adquieran propiedades muy diferentes a las de las funciones derivables en el cuerpo de los números reales o las definidas en el plano real.

Se apunta ya el interés en señalar de manera especial a las funciones holomorfas, pues como se demostrará en capítulos posteriores las funciones holomorfas van a tener muy buenas propiedades. Por el hecho de ser una función holomorfa en un abierto, va a ser analítica, es decir desarrollable en serie de potencias en los puntos de ese abierto; va a ser infinitamente derivable en su dominio de holomorfía; y va a ser integrable, y las integrales a lo largo de curvas cerradas en recintos donde la función sea holomorfa, valen cero, y si la curva no es cerrada, la integral no depende del camino. Se puede decir que derivación, series, integración… se entretejen para construir estas funciones, cuyas propiedades se desarrollan en los siguientes capítulos. El capítulo termina con la introducción de las funciones de dos variables reales armónicas, estudiando su relación con las funciones holomorfas.

El tercer capítulo está dedicado al desarrollo en serie de las funciones complejas. Además de tratar con el desarrollo en serie de potencias, se estudian las series de Laurent. Se podría haber dejado el tratamiento de las series de Laurent para cuando se conocen los valores de sus coeficientes mediante fórmulas integrales, pero la experiencia en impartir esta enseñanza nos ha llevado a considerar que presentarlas en este momento simplifica su comprensión. Se introducen las funciones analíticas en un punto z_0 como funciones desarrollables en series de potencias en un entorno de z_0, y se estudian sus propiedades, como por ejemplo, el hecho de que una función analítica es indefinidamente derivable. Finalmente se introducen las series dobles o series de Laurent, que permiten desarrollar funciones que presenten algún tipo de singularidad en series de potencias positivas y negativas.

En los capítulos cuarto y quinto se estudia la integral de una función compleja a lo largo de una curva situada en el plano complejo y se prueban sus propiedades. Se presenta el teorema de Cauchy y sus consecuencias, remarcando de manera especial la fórmula integral de Cauchy, que permite expresar el valor de una función en el interior de un recinto cerrado a través de los valores que toma la función en la frontera del recinto, y que autoriza a asegurar que toda función holomorfa es desarrollable en serie de potencias, es decir, es analítica, y por tanto infinitamente derivable. Se tiene demostrado entonces que los conceptos de holomorfía y analiticidad son equivalentes.

Se considera a continuación la situación en la que la función que se quiere integrar tenga singularidades aisladas. Se estudian los distintos tipos de singularidades que puede presentar una función a través de los correspondientes desarrollos de Laurent. Se introduce el concepto de residuo de una función en un punto, y se muestra la forma de obtener el valor de la integral de la función a través del teorema de los residuos, que se aplica también para la obtención de integrales de funciones reales y de integrales impropias.

En el sexto capítulo de consideran las funciones complejas como transformaciones geométricas, pues una función compleja transforma un subconjunto del plano complejo en otro subconjunto del plano complejo que es precisamente la imagen a través de la función del conjunto inicial. Se dedica una especial atención al tratamiento de las transformaciones de Möbius por sus especiales propiedades.

Los capítulos siete al doce constituyen lo que los autores consideran como la segunda sección. En ellos se aborda el estudio de la teoría general de las ecuaciones diferenciales ordinarias y van precedidos por una introducción histórica, comenzando por el siglo XVI, donde se analizan los distintos logros que se han ido obteniendo de forma sucesiva, así como los problemas que los generaron. De esta forma se puede conocer el origen y la evolución de los distintos tipos de ecuaciones diferenciales que se van a estudiar, así como de los métodos que se van a aplicar o de los resultados que se van a poder aplicar al estudiar los distintos temas que se presentan a continuación.

El objetivo fundamental del capítulo siete es introducir las ecuaciones diferenciales en el mundo físico acercando éstas a las aplicaciones. Se tratan diferentes problemas concretos que se pueden explicar a partir de comportamientos regidos por ecuaciones diferenciales. De esta forma se da una primera aproximación, que a lo largo de los siguientes capítulos se irá desarrollando, de cómo las ecuaciones diferenciales pueden proporcionar modelos para estudiar casos tan diferentes como la dinámica de poblaciones o como el crecimiento y desintegración de las reacciones químicas. También, siguiendo el desarrollo histórico de las matemáticas, se tratan distintas maneras de resolver algunas ecuaciones diferenciales conocidas, tal y como se trabajaban en el siglo XVII.

Una de las cuestiones fundamentales en el tratamiento de las ecuaciones diferenciales es el estudio de las condiciones por las que se puede asegurar la existencia de solución, o que ésta sea única, sin tener que resolverla previamente. Una ecuación diferencial en general no tiene por qué tener solución y aunque la tenga, ésta no tiene por qué ser única. En el capítulo ocho se introducen los problemas de valor inicial, o problemas de Cauchy, y se tratan las condiciones que garantizan la existencia y la unicidad de solución, que se conocen como teoremas de existencia y unicidad.

Al escribir este capítulo nos hemos encontrado con la dificultades siguientes. Por un lado queríamos que supieran que, siguiendo el desarrollo histórico de las matemáticas, en un principio no se imaginaba que una ecuación procedente de un problema físico pudiera no tener solución, o que ésta no fuera única, y que fue en el curso de Análisis que impartió Cauchy, cuando se planteó este problema, lo que supone una nueva etapa en las matemáticas. Ser conscientes de que toda ecuación diferencial no tiene por qué tener solución y aunque la tenga, ésta no tiene por qué ser única, supone un gran paso en la historia. Tratarlas, por ello, con el requerido cuidado, es importante. Pero por otro, éstos teoremas son complicados y sus demostraciones sobrepasan en muchas ocasiones el nivel de este libro. Se ha valorado el grado de dificultad que presentan y se han incluido aquéllas que por el propio razonamiento que siguen puedan aportar una claridad adicional. D. Alberto Dou fue profesor tanto de la escuela de ingenieros de caminos como de la facultad de matemáticas, impartiendo en ambos lugares, la asignatura de ecuaciones diferenciales, y le hemos oído comentar que estos teoremas y su desarrollo minucioso parecía adecuado en un determinado momento para los matemáticos, y que sin embargo, resultan ser tremendamente prácticos para los ingenieros que iban a resolver las ecuaciones diferenciales que les aparecieran usando el ordenador y los métodos numéricos, obteniendo una solución, que podía no tener ningún sentido si antes no habían garantizado la existencia y unicidad de las soluciones.

El interés de los teoremas de existencia y unicidad estriba en que en muchas ocasiones, al resolver un problema cuyo modelo es una ecuación diferencial, no es preciso encontrar la solución exacta de la ecuación y basta encontrar valores aproximados de ella, lo que se puede conseguir aplicando alguna fórmula numérica como las que se presentan el los capítulos trece y catorce. Pero para que los valores obtenidos a partir de dichas fórmulas sean aceptables es preciso conocer a priori que el problema en cuestión tiene una única solución.

En el capítulo nueve se trabaja la relación entre los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden y las ecuaciones diferenciales de orden superior, particularizando los teoremas de existencia y unicidad a estos casos. Se introduce la transformada de Laplace como herramienta para transformar una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales en una ecuación algebraica o un sistema de ecuaciones algebraicas, y se estudian sus propiedades. Se estudian, de nuevo, un buen número de aplicaciones particulares.

El capítulo diez se ocupa de las ecuaciones diferenciales lineales de orden superior, y el capítulo once de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. El orden para impartir estos capítulos es discutible. Ya se ha visto, en el capítulo anterior, la relación existente entre un sistema de *n* ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden y una ecuación diferencial lineal de orden *n*, y la posibilidad de convertir las unas en los otros. El estudio de la estructura algebraica de las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales, estructura de espacio vectorial para las que son homogéneas, y de espacio afín, para las no homogéneas, proporciona una idea de cuáles deben ser los procedimientos para buscar las soluciones. Quizás un orden más matemático sería estudiar antes los sistemas, pero las ecuaciones de orden superior resultan más sencillas, por lo que se ha decidido trabajarlas antes, y poder así añadir en el capítulo once cuestiones como la exponencial de una matriz, específicas de los sistemas lineales.

El capítulo doce es una iniciación a los sistemas dinámicos. Los modelos matemáticos simplifican la realidad para poder estudiarla, y una de esas simplificaciones es la linealización, lo que implica considerar que el proceso es lineal. Existe para ello una razón importante. En las ecuaciones diferenciales no lineales aparecen grandes complicaciones. Con el uso de los ordenadores se ha visto que ecuaciones diferenciales no lineales, que verifican los teoremas de existencia y unicidad, pueden producir caos, es decir, que si existe un pequeño error en la obtención de las condiciones iniciales, pueda dar lugar al cabo de un cierto tiempo, a que la nueva solución que se obtenga se aleje demasiado de la anterior, con lo que el fenómeno resulte impredecible. Después de explicar durante muchos años en cursos de doctorado y tercer ciclo estos hechos se ha intentado dar unas orientaciones sencillas en este capítulo donde quizás queden abiertas las puertas de manera que el estudiante interesado pueda sentirse invitado a seguir trabajando, pues ya sabe que no conoce todo sobre ecuaciones diferenciales sino que existen muchos problemas abiertos de gran interés y belleza que merecen el esfuerzo de ser estudiados.

La tercera sección la constituyen los métodos numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales. Comienza, como las secciones anteriores, con una breve introducción histórica. Es interesante saber que estos métodos ya existían antes del uso de los ordenadores, y cómo se aplicaban a resolver sobre todo problemas de balística, por lo que muchas veces sus resultados se mantenían en secreto. Con la aparición de los ordenadores se han podido analizar las soluciones obtenidas, comprobar qué métodos tenían mejores propiedades, y confeccionar aquellos que tienen una relación calidad-coste óptima.

Los distintos métodos numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales se agrupan en dos grandes grupos: los métodos de un paso y los métodos lineales multipaso. Su estudio se realiza en los capítulos trece y catorce.

En el capítulo trece se estudian los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales de un solo paso como el método de Euler, los métodos de Taylor, los métodos de Runge – Kutta o los pares encajados de Runge – Kutta. Una vez conocidos estos métodos, sus ventajas y sus inconvenientes, se hace un estudio general de los métodos de un paso para poder analizar los distintos tipos de errores, el error global, el error de truncamiento y el error local, así como los conceptos de convergencia y consistencia. Se estudia a continuación la estabilidad absoluta de las distintas fórmulas, y también se comenta brevemente la extrapolación de Richarson.

En el capítulo catorce se estudian los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales lineales multipaso, especialmente los métodos de Adams-Bashforth y los métodos de Adams-Moulton, siendo los primeros métodos explícitos y los segundos, implícitos. Termina el capítulo con un estudio detenido de los conceptos de convergencia, consistencia, orden de consistencia y estabilidad, así como algunos tipos distintos de estabilidad, como la estabilidad absoluta y la relativa de las fórmulas lineales multipaso.

Termina el texto con una bibliografía separada en las tres secciones que lo forman.

Esto es todo, los autores desean que el libro resulte de su agrado y sea de utilidad.

Los autores