

ÍNDICE

CONTENIDO	I
PRÓLOGO	XI
VARIABLE COMPLEJA	1
HISTORIA DE LA VARIABLE COMPLEJA	2
Los números complejos	2
Funciones de variable compleja	5
La función logaritmo	7
Integración	9
Cauchy y la variable compleja	10
Riemann y la variable compleja	12
Weierstrass y la variable compleja	14
CAPÍTULO 1. Los números complejos	17
1.1. EL CUERPO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS	18
1.1.1. Números complejos en forma binómica	19
1.1.2. Operaciones en forma binómica	20
1.1.3. Propiedades algebraicas	21
Ejemplos resueltos	22
Ejercicios	23
1.2. REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA. DIAGRAMA DE ARGAND	25
Ejemplos resueltos	26
Ejercicios	29
1.3. FORMA POLAR	30
1.3.1. Módulo	30
1.3.2. Argumento	31
1.3.3. Propiedades del módulo, del conjugado y del argumento de un número complejo	32
1.3.4. Forma polar	33
Ejemplos resueltos	34
Ejercicios	35
1.4. FORMA EXPONENCIAL DE UN NÚMERO COMPLEJO	36
1.4.1. Operaciones entre números complejos en forma exponencial	37
1.4.2. Fórmula de Moivre	39
Ejemplos resueltos	39
Ejercicios	42
1.5. TOPOLOGÍA DEL PLANO COMPLEJO	43
Ejemplos resueltos	46
Ejercicios	47
1.6. LA ESFERA DE RIEMANN. PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA.	48
Ejercicios	51

1.7. EJERCICIOS	52
CAPÍTULO 2. Funciones complejas	57
2.1. DEFINICIÓN. FUNCIONES ELEMENTALES	59
2.1.1. Definición de función compleja	59
2.1.2. Funciones elementales	60
2.1.2.1. Polinomios	60
2.1.2.2. Funciones racionales	61
2.1.2.3. Función exponencial	61
2.1.2.4. Funciones trigonométricas	63
2.1.2.5. Funciones hiperbólicas	65
2.1.2.6. Función logaritmo	66
2.1.2.7. Funciones definidas como potencias	68
Ejemplos resueltos	70
Ejercicios	74
2.2. LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD.	76
2.2.1. Límites de funciones	76
2.2.2. Límites en el infinito. Límites infinitos	76
2.2.3. Continuidad.	77
Ejemplos resueltos	79
Ejercicios	81
2.3. DERIVADA COMPLEJA	82
2.3.1. Definición de derivada	82
2.3.2. Propiedades	85
2.3.3. Condiciones de Cauchy Riemann.	86
2.3.4. Estudio de la derivada de distintas funciones	89
Ejemplos resueltos	92
Ejercicios	93
2.4. FUNCIONES HOLOMORFAS	94
2.4.1. Funciones holomorfas. Definiciones	95
2.4.2. Estudio de la holomorfía de las distintas funciones	95
2.4.3. Propiedades de las funciones holomorfas	96
Ejemplos resueltos	97
Ejercicios	98
2.5. FUNCIONES ARMÓNICAS	99
2.5.1. Funciones armónicas. Definición	99
2.5.2. Propiedades de las funciones armónicas.	101
Ejemplos resueltos	102
Ejercicios	103
2.6. EJERCICIOS	104
CAPÍTULO 3. Series complejas	111
3.1. SUCESIONES Y SERIES DE NÚMEROS COMPLEJOS	113
Ejemplos resueltos	117
Ejercicios	119
3.2. SUCESIONES Y SERIES DE FUNCIONES COMPLEJAS	120
3.2.1. Sucesiones de funciones complejas	120
3.2.2. Series de funciones complejas. Definición y convergencia	122

3.2.3.	Series de funciones complejas. Continuidad y derivabilidad	125
	Ejemplos resueltos	127
	Ejercicios	128
3.3.	SERIES DE POTENCIAS	129
3.3.1.	Definición. Convergencia de una serie de potencias	129
	Ejemplos resueltos	134
3.3.2.	Funciones definidas por series de potencias	136
	Ejemplos resueltos	141
	Ejercicios	143
3.4.	FUNCIONES ANALÍTICAS	144
3.4.1.	Definición y propiedades	145
3.4.2.	Desarrollos en serie de funciones	146
3.4.3.	Prolongación analítica	148
	Ejemplos resueltos	151
	Ejercicios	152
3.5.	SERIES DE LAURENT	153
3.5.1.	Series de Laurent. Definición y convergencia	154
3.5.2.	Representación de funciones en series de Laurent	157
	Ejercicios	162
3.6.	EJERCICIOS	163
	CAPÍTULO 4. Integración en el plano complejo	169
4.1.	CURVAS EN EL CAMPO COMPLEJO.	170
	Ejemplos resueltos	175
	Ejercicios	178
4.2.	INTEGRACIÓN SOBRE CAMINOS.	179
4.2.1.	Integral de una función sobre un camino	180
4.2.2.	Relación de la integral compleja con la integral curvilínea real	181
4.2.3.	Propiedades elementales	182
	Ejemplos resueltos	184
	Ejercicios	188
4.3.	ÍNDICE DE UN PUNTO RESPECTO DE UNA CURVA.	190
4.3.1.	Definición de índice	190
4.3.2.	Índice y homotopía	192
4.3.3.	Índice y conexión	193
	Ejemplos resueltos	193
	Ejercicios	195
4.4.	TEOREMA DE CAUCHY.	196
4.4.1.	Primitivas	196
4.4.2.	Distintos enunciados del teorema de Cauchy.	199
	Versión primera del Teorema de Cauchy	200
	Lema de Goursat	201
	Teorema de Cauchy para un disco	205
	Teorema de Cauchy para caminos homótopos	206
	Teorema de Cauchy en dominios simplemente conexos	207
	Teorema de Cauchy-Goursat	208
	Ejemplos resueltos	208
	Ejercicios	210

4.5. INTERPRETACIÓN FÍSICA Y GEOMÉTRICA DE LA INTEGRAL COMPLEJA	211
4.5.1. Trabajo y flujo	211
4.5.2. Teorema de la divergencia	213
Ejercicios	214
4.6. FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY.	214
4.6.1. Fórmula integral de Cauchy.	217
Ejemplos resueltos	219
Ejercicios	221
4.7. CONSECUENCIAS DE LA FÓRMULA DE CAUCHY.	222
4.7.1. Aplicación al cálculo de integrales reales	223
4.7.2. Desarrollo en serie de potencias de una función holomorfa	224
4.7.3. Derivadas de orden superior	226
4.7.4. Desigualdad de Cauchy	228
4.7.5. Teorema de Liouville	229
4.7.6. Teorema fundamental del Álgebra	230
4.7.7. Teorema de Morera	231
4.7.8. Principio del módulo máximo	232
4.7.9. Otras consecuencias	234
Principio de prolongación analítica	234
Ceros de funciones holomorfas	234
Regla de L'Hôpital	235
Ejemplos resueltos	236
Ejercicios	237
4.8. EJERCICIOS	238
CAPÍTULO 5. Singularidades y residuos	245
5.1. SINGULARIDADES	245
Ejemplos resueltos	246
Ejercicios	247
5.2. CARACTERIZACIÓN DE LAS SINGULARIDADES AISLADAS	248
5.2.1. Singularidades evitables	249
5.2.2. Polos	249
5.2.3. Singularidad esencial	251
5.2.4. Ceros de una función analítica	252
Ejemplos resueltos	254
Ejercicios	256
5.3. SERIES DE LAURENT	257
5.3.1. Expresión integral de los coeficientes de la serie de Laurent	258
5.3.2. Relación entre el tipo de singularidad y los coeficientes de la serie de Laurent	259
Ejemplos resueltos	260
Ejercicios	261
5.4. RESIDUOS	262
5.4.1. Teorema del residuo	263
5.4.2. Cálculo de residuos. Residuos en los polos	264
5.4.3. Residuo en el infinito	267
Ejemplos resueltos	271
Ejercicios	276

5.5. FUNCIONES MEROMORFAS, ANALÍTICAS Y ENTERAS	278
5.5.1. Funciones meromorfas	278
5.5.2. El principio del argumento y sus consecuencias	279
5.5.3. Teorema de Rouché	281
5.5.4. Teorema fundamental del Álgebra	282
5.5.5. Teorema de Hurwitz	283
5.5.6. Teorema de la aplicación abierta	283
5.5.7. Teorema del módulo máximo	285
5.5.8. Teorema de los tres círculos de Hadamard	286
5.5.9. Problema de Dirichlet	286
5.5.10. Teorema de Phragmen-Lindelöf	287
5.5.11. Lema de Schwarz.	289
5.5.12. Principio de Lindelöf o principio de subordinación	289
5.5.13. Clasificación de las funciones enteras	290
5.5.14. Orden de una función entera	293
5.6. EJERCICIOS	296
CAPÍTULO 6. Geometría de las transformaciones complejas	307
6.1. TRANSFORMACIONES CONFORMES	308
Observaciones	310
Ortogonalidad	311
Equivalencia conforme	312
6.1.1. Teoremas de la aplicación abierta y de la aplicación de Riemann.	313
Teorema de la aplicación abierta	313
Teorema de la aplicación de Riemann	314
Ejemplos resueltos	316
Ejercicios	317
6.2. ALGUNAS TRANSFORMACIONES SENCILLAS	317
6.2.1. La aplicación lineal: $f(z) = az + b$	317
6.2.2. La función $f(z) = z^2$	319
6.2.3. La función $f(z) = z^n$	320
6.2.4. La función exponencial $w = \exp(z) = e^z$	320
6.2.5. La función $w = \cos(z)$	321
6.2.6. La función $w = \bar{z}$	321
6.2.7. La función $w = 1/z$	321
6.2.8. Otras transformaciones	323
Ejemplos resueltos	324
Ejercicios	326
6.3. TRANSFORMACIÓN BILINEAL O DE MÖBIUS	327
6.3.1. Propiedades básicas	328
6.3.2. Tipos particulares de transformaciones bilineales	331
6.3.3. Razón doble	334
6.3.4. Principio de simetría y principio de orientación	338
Circunferencia de Apolonio	341
Ejemplos resueltos	344
Ejercicios	348

6.4. APLICACIONES DE LAS TRANSFORMACIONES CONFORMES	349
6.4.1. Transformaciones de funciones armónicas	349
6.4.2. Ecuación de Laplace con condiciones de contorno	349
6.4.3. Aplicaciones a la hidrodinámica	352
6.4.4. Aplicaciones a la teoría del calor	352
6.4.5. Aplicaciones a la electrostática	353
6.4.6. La transformación de Schwarz-Christoffel	354
6.5. EJERCICIOS	354

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS 365

HISTORIA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES	368
---	------------

CAPÍTULO 7. Ecuaciones diferenciales en el mundo físico. Integración elemental	407
---	------------

7.1. NATURALEZA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES	409
--	------------

7.1.1. Primeras definiciones	409
7.1.2. Soluciones	410
7.1.3. Campos de direcciones. Curvas integrales. Isoclinas	412
Ejemplos resueltos	413
Ejercicios	416

7.2. LAS ECUACIONES DIFERENCIALES COMO MODELOS MATEMÁTICOS	417
---	------------

7.2.1. Crecimiento, desintegración y reacciones químicas	417
7.2.2. Cuerpos en caída libre y con resistencia	418
7.2.3. Movimiento pendular	420
7.2.4. La cicloide. La curva braquistócrona	423
7.2.5. Circuitos eléctricos simples. Oscilaciones en resortes.	426
7.2.6. Dinámica de poblaciones.	429
7.2.7. La catenaria.	429
7.2.8. Ecuación diferencial de una familia de curvas	431
Ejemplos resueltos	432
Ejercicios	433

7.3. INTEGRACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN	435
---	------------

7.3.1 Ecuaciones diferenciales con variables separadas	435
Ecuaciones diferenciales reducibles a este tipo	435
Ejemplos resueltos	436
Ejercicios	436
7.3.2 Ecuaciones diferenciales homogéneas	437

Ecuaciones diferenciales reducibles a homogéneas	438
Ejemplos resueltos	439
Ejercicios	442
7.3.3. Ecuaciones diferenciales exactas	442
Ejemplos resueltos	445
Ejercicios	447
7.3.4. Factores integrantes	447
Factores integrantes que dependen exclusivamente de la variable x o de y .	448
Ejemplos resueltos	449
Ejercicios	451
7.3.5. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden	452
Métodos de resolución	453
Método 1º: Factor integrante	453
Método 2º: Cambio de variable	453
Método 3º: Variación de las constantes	454
Ejemplos resueltos	456
Ejercicios	455
7.3.6. Algunas ecuaciones diferenciales especiales	459
Ecuación de Bernoulli	459
Ecuación de Ricatti	460
Ecuación de Lagrange	462
Ecuación de Clairaut	463
Ejemplos resueltos	463
Ejercicios:	466
7.3.7. Trayectorias ortogonales	466
Ejemplos resueltos	468
Ejercicios	469
7.3.8. Envolvente de un haz de curvas	470
Ejemplos resueltos	472
Ejercicios	473
7.3.9. Soluciones singulares	473
Ejemplos resueltos	473
Ejercicios	475
7.3.10. Aplicaciones	475
Circuitos eléctricos	475
La curva tratriz	476
Ejemplos resueltos	477
Ejercicios	478
7.4. EJERCICIOS	478
CAPÍTULO 8. Existencia y unicidad de soluciones	481
8.1. PROBLEMA DE CAUCHY. TEOREMAS PREVIOS	482
8.1.1. Problema de Cauchy	482
8.1.2. Aplicaciones contractivas. Teorema del punto fijo.	484
8.1.3. Funciones equicontinuas. Teorema de Ascoli-Arzelà	486
8.1.4. Condición de Lipschitz.	489
Ejemplos resueltos	492
Ejercicios	495

8.2. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN. SOLUCIÓN GLOBAL	496
8.2.1. Teorema de existencia global. Teorema de Cauchy-Peano	496
8.2.2. Teorema de existencia y unicidad global. Teorema de Picard-Lindelöf	599
8.2.3. Iterantes de Picard	502
Ejemplos resueltos	504
Ejercicios	508
8.3. PROBLEMA DE CAUCHY. SOLUCIÓN LOCAL	510
8.3.1. Teorema de existencia y unicidad local de soluciones	510
8.3.2. Teorema de existencia local de soluciones	514
8.3.3. Prolongación de soluciones	515
Ejemplos resueltos	517
Ejercicios	528
8.4. EJERCICIOS	530
 CAPÍTULO 9. Ecuaciones diferenciales de orden superior. Transformada de Laplace	 535
 9.1. ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR Y SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES	 537
9.1.1. Ejemplos	537
9.1.2. Conceptos previos	541
9.1.3. Reducción de ecuaciones diferenciales a sistemas de ecuaciones	543
Ejemplos resueltos	545
Ejercicios	547
9.2. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LAS SOLUCIONES	547
9.2.1. Teoremas de existencia y unicidad para sistemas	548
9.2.2. Teoremas de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales de orden n	549
Ejemplos resueltos	550
Ejercicios	551
9.3. MÉTODOS DE REDUCCIÓN DE ORDEN EN CASOS PARTICULARES	552
9.3.1. Ecuaciones en las que falta la función incógnita	552
La catenaria	553
9.3.2. Ecuaciones en las que falta la variable independiente.	554
El movimiento armónico simple	554
Movimiento de un cohete. Velocidad de escape	555
Ecuación de Van der Pol	556
9.3.3. Reducción de orden en sistemas autónomos.	557
Ecuaciones de rapaz y presa de Lotka-Volterra	558
La barca en el río	558
Ejemplos resueltos	559
Ejercicios.	561
9.4. TRANSFORMADA DE LAPLACE	561
9.4.1. Definición, condiciones de existencia y primeras propiedades	562

Primeras propiedades:	565
Transformada de Laplace de algunas funciones	566
Ejemplos resueltos	567
Ejercicios	569
9.4.2. La función de Heaviside y la delta de Dirac	569
Ejemplos resueltos	572
Ejercicios	573
9.4.3. Teoremas de traslación y transformada de una función periódica	574
Teoremas de traslación	574
Transformada de una función periódica	575
Ejemplos resueltos	576
Ejercicios	578
9.4.4. Transformadas de derivadas e integrales	578
Transformada de una derivada	579
Transformada de una integral	580
Ejemplos resueltos	584
Ejercicios	585
9.4.5. La convolución	585
Propiedades de la convolución	587
Ejemplos resueltos	588
Ejercicios	589
9.4.6. La transformada inversa	589
Transformadas inversas de funciones racionales	590
Ejemplos resueltos	593
Ejercicios	595
9.4.7. Aplicaciones	595
1. Resolución de ecuaciones diferenciales lineales	595
2. Resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales	597
3. Resolución de ecuaciones integrales	598
4. La curva tautócrona	598
Ejemplos resueltos	601
Ejercicios	605
9.5. EJERCICIOS	605

CAPÍTULO 10. Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior **607**

10.1. CONCEPTOS PREVIOS.	609
10.1.1. El operador diferencial D	610
10.1.2. El operador lineal L	611
10.1.3. Operadores con coeficientes constantes.	613
10.1.4. Teorema de existencia y unicidad	614
Ejemplos resueltos	615
Ejercicios	616
10.2. ESTRUCTURA DE LAS SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR	617
10.2.1. Dependencia e independencia lineal. Wronskiano	617

10.2.2. Estructura de las soluciones de la ecuación homogénea	619
10.2.3. Estructura de las soluciones de la ecuación completa	627
Ejemplos resueltos	629
Ejercicios	631
10.3. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES HOMOGÉNEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES	632
10.3.1. Ecuación característica. Autovalores	632
10.3.2. Discusión de las soluciones	633
Ejemplos resueltos	636
Ejercicios	638
10.4. MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES	639
10.4.1. Reducción de orden de una ecuación diferencial lineal homogénea. Método de D'Alembert	639
10.4.2. Método de variación de las constantes	640
Ejemplos resueltos	643
Ejercicios	645
10.4.3. Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes constantes	646
Método del anulador	646
Método de los coeficientes indeterminados	647
Ejemplos resueltos	649
Ejercicios	653
10.4.4. Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes no constantes	654
Ecuación de Euler-Cauchy	655
Cambios de variable	657
Ejemplos resueltos	658
Ejercicios	660
10.5. DESARROLLOS EN SERIES DE POTENCIAS	661
10.5.1. Soluciones en torno a puntos ordinarios	662
10.5.2. Soluciones en torno a puntos singulares	666
Ejemplos resueltos	672
Ejercicios	676
10.6. APLICACIONES	677
10.6.1. Movimiento oscilatorio armónico	677
Vibraciones armónicas simples no amortiguadas	677
Vibraciones amortiguadas	678
Vibraciones forzadas	679
Vibraciones libres forzadas. Resonancia.	680
10.6.2. Circuitos eléctricos	682
10.6.3. Las leyes de Kepler	684
Ejemplos resueltos	688
Ejercicios	690
10.7. EJERCICIOS	691

CAPÍTULO 11. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden	695
11.1. SISTEMAS LINEALES DE ECUACIONES DIFERENCIALES.	696
11.1.1. Conceptos previos	697
11.1.2. Teoremas de existencia y unicidad.	700
Ejemplos resueltos	702
Ejercicios	704
11.2. SISTEMAS LINEALES DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN	705
11.2.1. Dependencia e independencia lineal.	705
11.2.2. Estructura de las soluciones del sistema homogéneo	706
11.2.3. Matriz fundamental	713
Propiedades de la matriz fundamental	714
11.2.4. Estructura de las soluciones del sistema no homogéneo	715
Ejemplos resueltos	718
Ejercicios	720
11.3. SISTEMAS LINEALES HOMOGÉNEOS CON COEFICIENTES CONSTANTES	721
11.3.1. Resolución por eliminación mediante el operador diferencial D	722
Ejemplos resueltos	723
11.3.2. Resolución buscando soluciones exponenciales. Método de Euler	725
Ejemplos resueltos	728
11.3.3. Ecuación característica. Autovalores y autovectores	731
Ejemplos resueltos	743
Ejercicios	745
11.4. EXPONENCIAL DE UNA MATRIZ	746
11.4.1. Propiedades de la exponencial de una matriz	748
11.4.2. Cálculo de la función matricial	749
11.4.3. Estudio del caso general	750
Ejemplos resueltos	751
Ejercicios	755
11.5. SISTEMAS LINEALES NO HOMOGÉNEOS	756
11.5.1. Método de variación de las constantes	756
11.5.2. Sistemas lineales no homogéneos con coeficientes constantes	758
Reducción a una ecuación diferencial mediante el operador diferencial D	759
Método de coeficientes indeterminados	760
Ejemplos resueltos	761
Ejercicios	766

11.6. EJERCICIOS 766

CAPÍTULO 12: Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales 775

12.1. CONCEPTOS PREVIOS: GENERALIDADES 778

- 12.1.1. Soluciones y trayectorias en un sistema de ecuaciones diferenciales 778
- 12.1.2. Diagrama de fases 781
- 12.1.3. Puntos críticos 784
- 12.1.4. Órbitas cíclicas 787
- 12.1.5. Estabilidad de Liapunov y estabilidad orbital 789
- 12.1.6. Dinámica en un sistema lineal homogéneo de dimensión $n = 1$. 792
- 12.1.7. Dinámica en un sistema lineal homogéneo de dimensión $n = 2$. 993
- Ejemplos resueltos** 799
- Ejercicios 802

12.2. COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE UN SISTEMA LINEAL HOMOGÉNEO 803

- 12.2.1. Comportamiento dinámico de una ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes de orden superior 807
- Ejemplos resueltos** 808
- Ejercicios 810

12.3. SISTEMAS CASI-LINEALES 812

- Ejemplos resueltos** 816
- Ejercicios 820

12.4. SISTEMAS BIDIMENSIONALES AUTÓNOMOS 821

- 12.4.1. Teorema de Poincaré - Bendixson 821
- 12.4.2. Dinámica del péndulo 822
- 12.4.3. Dinámica de poblaciones: sistemas de Lotka-Volterra 828
- Ejemplos resueltos** 833
- Ejercicios 835

12.5. ESTABILIDAD EN SISTEMAS HAMILTONIANOS O CONSERVATIVOS, EN SISTEMAS DISIPATIVOS Y EN SISTEMAS GRADIENTE. 836

- 12.5.1. Sistemas conservativos y funciones de Hamilton 836
- 12.5.2. Sistemas disipativos y funciones de Lyapunov 840
- 12.5.3. Sistemas gradiente 841
- Ejemplos resueltos** 843
- Ejercicios 845

12.6. DINÁMICAS CAÓTICAS 846

- 12.6.1. El sistema de Lorenz 846
- Ejercicios 853

12.7. EJERCICIOS 853

RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES 869

HISTORIA DE LA RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS. 875

Solución numérica antes de los ordenadores 876

Solución numérica después de los ordenadores 881

CAPÍTULO 13. Métodos numéricos de un paso 883

13.1. EL MÉTODO DE EULER 886

Ejemplos resueltos 890

Ejercicios 895

13.2. ESTUDIO GENERAL DE LOS MÉTODOS DE UN PASO 896

13.2.1. Control del error: error de redondeo, error de truncamiento, error local y error global 897

Cálculo del orden del error de truncamiento para el método de Euler: 900

13.2.2. Convergencia, consistencia y estabilidad de los métodos de un paso 903

Ejemplos resueltos 905

Ejercicios 910

13.3. MÉTODOS DE TAYLOR 912

Ejemplos resueltos 914

Ejercicios 918

13.4. MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA 920

13.4.1. Métodos de Runge-Kutta de dos etapas o métodos de Euler modificados 924

13.4.2. Métodos de Runge-Kutta de tres etapas 928

13.4.3. Métodos de Runge-Kutta cuatro 930

Ejemplos resueltos 935

Ejercicios 937

13.5. ESTIMACIÓN DEL ERROR EN CADA PASO 938

La extrapolación de Richardson 939

Pares encajados de Runge-Kutta 942

Ejemplos resueltos 948

Ejercicios 949

13.6. ESTABILIDAD ABSOLUTA EN LOS MÉTODOS DE UN PASO 950

Ejemplos resueltos 955

Ejercicios 960

13.7. APÉNDICE: ECUACIONES EN DIFERENCIAS 961

Ejemplos resueltos 966

Ejercicios 969

13.7. EJERCICIOS	971
CAPÍTULO 14. Métodos numéricos lineales multipaso	983
14.1. DEFINICIÓN	984
Ejemplos resueltos	986
Ejercicios	987
14.2. MÉTODOS DE ADAMS	987
14.2.1. Métodos de Adams-Bashforth	991
14.2.2. Métodos de Adams-Moulton	996
Ejemplos resueltos	1004
Ejercicios	1011
14.3. CONVERGENCIA, CONSISTENCIA Y ESTABILIDAD	1015
14.3.1. Definición de convergencia	1015
Ejemplos resueltos	1017
14.3.2. Orden de consistencia y error de truncamiento	1018
14.3.3. Constante de error	1020
Ejemplos resueltos	1025
14.3.4. Polinomios de estabilidad	1027
14.3.5. Estabilidad. Condiciones de raíz	1029
14.3.6. Condición de raíz fuerte	1033
Ejemplos resueltos	1035
14.3.7. Relaciones entre convergencia, consistencia y estabilidad	1039
14.3.8. Orden máximo de convergencia: Primera barrera de Dahlquist	1041
Ejemplos resueltos	1042
14.3.9. Métodos multipaso vectoriales	1046
Ejemplos resueltos	1047
Ejercicios	1048
14.4. ESTABILIDAD ABSOLUTA Y ESTABILIDAD RELATIVA	1050
14.4.1. Estabilidad absoluta	1052
14.4.2. Estabilidad relativa	1059
14.4.3. Estabilidad absoluta de los métodos lineales multipaso en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias	1061
Ejemplos resueltos	1063
Ejercicios	1070
14.5. OTROS MÉTODOS DE K PASOS	1071
14.5.1. Nyström y Milne-Simpson	1071
14.5.2. Método predictor-corrector	1072
14.5.3. Métodos multipaso de tamaño de paso variable	1078
14.5.4. Problemas "stiff"	1080
Ejemplos resueltos	1081
Ejercicios	1088
14.6. EJERCICIOS	1089

BIBLIOGRAFÍA	1097
BIBLIOGRAFÍA DE CONSULTA RECOMENDADA	1097
Bibliografía de variable compleja	1097
Bibliografía de ecuaciones diferenciales	1098
Bibliografía de métodos numéricos para ecuaciones diferenciales ordinarias	1099
REFERENCIAS	1100

NO COPIAR,
© DE LOS
AUTORES

Prólogo

En este libro los autores y autoras hemos pretendido desarrollar los contenidos de un curso clásico de Análisis Matemático: Variable Compleja, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Métodos Numéricos para las ecuaciones diferenciales. Está dirigido de manera especial a estudiantes de ingeniería y por tanto los contenidos se han seleccionado teniendo muy presentes las posibles aplicaciones. Nuestro deseo es que esta obra sea de utilidad tanto para estudiantes de escuelas técnicas como para el profesorado que imparte las correspondientes asignaturas.

Se ha procurado que el texto tenga una estructura clara y sencilla. Por esta razón se han eliminado las demostraciones de algunos resultados que, quizás, por su excesiva abstracción o sus dificultades técnicas, pudieran complicar la comprensión, en lugar de ayudar a mejorarla.

Se ha intentado mantener un orden coherente en la presentación y desarrollo de los distintos conceptos que se van introduciendo, incorporando al final de cada apartado algunos ejemplos totalmente resueltos que pueden contribuir en gran medida a su comprensión y asimilación. Al final de cada apartado y de cada capítulo se adjuntan ejercicios y problemas, y en las ocasiones que se ha considerado adecuado, se han añadido las soluciones.

El equipo formado por los autores y las autoras del libro lleva numerosos años explicando los contenidos del texto a alumnado de distintas ramas de ingeniería: caminos, informática, telecomunicaciones... A partir de la propia

experiencia se observó que existen magníficos textos de ecuaciones diferenciales ordinarias, que sin embargo proporcionan un tratamiento demasiado elemental, en opinión de los autores, al estudio de los procedimientos de resolución numérica de ecuaciones diferenciales. Igualmente, existen estupendos textos de métodos numéricos, pero que no abordan el estudio general de las ecuaciones diferenciales ordinarias, y de forma similar sucede con la teoría de las funciones complejas, donde se encuentran espléndidos textos de variable compleja, pero que no tratan ni las ecuaciones diferenciales ordinarias, ni los métodos para la resolución numérica de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Aunque existía bastante bibliografía de consulta, no conocíamos ninguna obra en el mercado que reuniera todos los aspectos que necesitábamos que tuviese el libro de texto. Desde un punto de vista docente es muy importante que una materia de este tipo se encuentre recogida en un único texto, de forma que el profesorado pueda utilizarlo como guía y recomendarlo a los alumnos. En este libro se ha pretendido recopilar los contenidos básicos de las materias anteriores de manera que su estructura reúna con el nivel de rigor requerido, ni demasiado riguroso, más adecuado para el alumnado de matemáticas, ni carente de rigor, de manera que los estudiantes de ingeniería, a los que va especialmente dirigido, encuentren lo necesario para servirles de guía y les permita comprender y asimilar la materia desarrollada.

El texto se puede considerar formado por tres secciones diferenciadas, que abordan, en este orden, el estudio de las funciones de variable compleja, el estudio general de la teoría de ecuaciones diferenciales y el tratamiento numérico de las ecuaciones diferenciales. En cada una de ellos se ha añadido

una introducción histórica, con el fin de introducir en las distintas materias que se van a estudiar a través de un recorrido por el tiempo, en el que se muestra su origen, evolución y desarrollo posterior. Pensamos que conocer la evolución histórica de las matemáticas, la forma de trabajar del matemático profesional y la contribución de éste, así como las dificultades, las razones o los procedimientos de los que han surgido los conceptos y las ideas, mejora el aprendizaje.

La primera sección aborda el estudio de la teoría de funciones de una variable compleja. Se ha dividido en seis capítulos, que van precedidos por una introducción histórica. En ella se ha pretendido presentar de forma resumida la aparición de los números complejos, su utilización en los comienzos como solución de distintos problemas planteados, pero pensando en los números complejos como entes extraños e imaginarios, y su sucesiva formalización hasta llegar a su aceptación por parte de la comunidad científica como disciplina dotada de una base sólida y coherente, eliminando definitivamente el carácter misterioso que tenían en un principio dichos números.

El primer capítulo es esencialmente una revisión de los números complejos, concepto y propiedades, ya conocidos de cursos anteriores, tanto por las asignaturas de primer curso de ingeniería como en el bachillerato: se introducen los números complejos, sus operaciones, propiedades y estructura. Quizás se añade a lo que usualmente conocen, la notación exponencial. Se define el plano complejo, se representan conjuntos en él, se concretan algunas definiciones topológicas y se define la esfera de Riemann, que permite introducir el punto de infinito en el plano complejo, insistiendo en la diferencia

en el concepto de infinito en la recta real, que es un conjunto totalmente ordenado con $-\infty$ y $+\infty$, y el concepto de infinito en el plano complejo.

En el segundo capítulo se definen las funciones complejas. Se extienden al plano complejo las funciones reales ya conocidas, y se define la derivada de una función compleja, de importancia fundamental dentro de la teoría, poniendo especial atención en presentar las diferencias existentes entre la derivada de las funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} , las funciones de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en \mathbb{R} y la derivada compleja. Se introduce el concepto de holomorfía. Se podría haber definido función holomorfa en un punto como función derivable en dicho punto, pero entonces se perderían muchas de sus buenas propiedades, por lo que la experiencia en su docencia, nos ha llevado a definir que una función es holomorfa en un punto z_0 si es una función derivable en todos los puntos de un entorno de z_0 . Este hecho supone que dichas funciones adquieran propiedades muy diferentes a las de las funciones derivables en el cuerpo de los números reales o las definidas en el plano real.

Se apunta ya el interés en señalar de manera especial a las funciones holomorfas, pues como se demostrará en capítulos posteriores las funciones holomorfas van a tener muy buenas propiedades. Por el hecho de ser una función holomorfa en un abierto, va a ser analítica, es decir desarrollable en serie de potencias en los puntos de ese abierto; va a ser infinitamente derivable en su dominio de holomorfía; y va a ser integrable, y las integrales a lo largo de curvas cerradas en recintos donde la función sea holomorfa, valen cero, y si la curva no es cerrada, la integral no depende del camino. Se puede decir que derivación, series, integración... se entretajan para construir estas funciones, cuyas propiedades se desarrollan en los siguientes capítulos. El capítulo

termina con la introducción de las funciones de dos variables reales armónicas, estudiando su relación con las funciones holomorfas.

El tercer capítulo está dedicado al desarrollo en serie de las funciones complejas. Además de tratar con el desarrollo en serie de potencias, se estudian las series de Laurent. Se podría haber dejado el tratamiento de las series de Laurent para cuando se conocen los valores de sus coeficientes mediante fórmulas integrales, pero la experiencia en impartir esta enseñanza nos ha llevado a considerar que presentarlas en este momento simplifica su comprensión. Se introducen las funciones analíticas en un punto z_0 como funciones desarrollables en series de potencias en un entorno de z_0 , y se estudian sus propiedades, como por ejemplo, el hecho de que una función analítica es indefinidamente derivable. Finalmente se introducen las series dobles o series de Laurent, que permiten desarrollar funciones que presenten algún tipo de singularidad en series de potencias positivas y negativas.

En los capítulos cuarto y quinto se estudia la integral de una función compleja a lo largo de una curva situada en el plano complejo y se prueban sus propiedades. Se presenta el teorema de Cauchy y sus consecuencias, remarcando de manera especial la fórmula integral de Cauchy, que permite expresar el valor de una función en el interior de un recinto cerrado a través de los valores que toma la función en la frontera del recinto, y que autoriza a asegurar que toda función holomorfa es desarrollable en serie de potencias, es decir, es analítica, y por tanto infinitamente derivable. Se tiene demostrado entonces que los conceptos de holomorfía y analiticidad son equivalentes.

Se considera a continuación la situación en la que la función que se quiere integrar tenga singularidades aisladas. Se estudian los distintos tipos de

singularidades que puede presentar una función a través de los correspondientes desarrollos de Laurent. Se introduce el concepto de residuo de una función en un punto, y se muestra la forma de obtener el valor de la integral de la función a través del teorema de los residuos, que se aplica también para la obtención de integrales de funciones reales y de integrales impropias.

En el sexto capítulo se consideran las funciones complejas como transformaciones geométricas, pues una función compleja transforma un subconjunto del plano complejo en otro subconjunto del plano complejo que es precisamente la imagen a través de la función del conjunto inicial. Se dedica una especial atención al tratamiento de las transformaciones de Möbius por sus especiales propiedades.

Los capítulos siete al doce constituyen lo que los autores consideran como la segunda sección. En ellos se aborda el estudio de la teoría general de las ecuaciones diferenciales ordinarias y van precedidos por una introducción histórica, comenzando por el siglo XVI, donde se analizan los distintos logros que se han ido obteniendo de forma sucesiva, así como los problemas que los generaron. De esta forma se puede conocer el origen y la evolución de los distintos tipos de ecuaciones diferenciales que se van a estudiar, así como de los métodos que se van a aplicar o de los resultados que se van a poder aplicar al estudiar los distintos temas que se presentan a continuación.

El objetivo fundamental del capítulo siete es introducir las ecuaciones diferenciales en el mundo físico acercando éstas a las aplicaciones. Se tratan diferentes problemas concretos que se pueden explicar a partir de comportamientos regidos por ecuaciones diferenciales. De esta forma se da

una primera aproximación, que a lo largo de los siguientes capítulos se irá desarrollando, de cómo las ecuaciones diferenciales pueden proporcionar modelos para estudiar casos tan diferentes como la dinámica de poblaciones o como el crecimiento y desintegración de las reacciones químicas. También, siguiendo el desarrollo histórico de las matemáticas, se tratan distintas maneras de resolver algunas ecuaciones diferenciales conocidas, tal y como se trabajaban en el siglo XVII.

Una de las cuestiones fundamentales en el tratamiento de las ecuaciones diferenciales es el estudio de las condiciones por las que se puede asegurar la existencia de solución, o que ésta sea única, sin tener que resolverla previamente. Una ecuación diferencial en general no tiene por qué tener solución y aunque la tenga, ésta no tiene por qué ser única. En el capítulo ocho se introducen los problemas de valor inicial, o problemas de Cauchy, y se tratan las condiciones que garantizan la existencia y la unicidad de solución, que se conocen como teoremas de existencia y unicidad.

Al escribir este capítulo nos hemos encontrado con las dificultades siguientes. Por un lado queríamos que supieran que, siguiendo el desarrollo histórico de las matemáticas, en un principio no se imaginaba que una ecuación procedente de un problema físico pudiera no tener solución, o que ésta no fuera única, y que fue en el curso de Análisis que impartió Cauchy, cuando se planteó este problema, lo que supone una nueva etapa en las matemáticas. Ser conscientes de que toda ecuación diferencial no tiene por qué tener solución y aunque la tenga, ésta no tiene por qué ser única, supone un gran paso en la historia. Tratarlas, por ello, con el requerido cuidado, es importante. Pero por otro, éstos teoremas son complicados y sus

demostraciones sobrepasan en muchas ocasiones el nivel de este libro. Se ha valorado el grado de dificultad que presentan y se han incluido aquéllas que por el propio razonamiento que siguen puedan aportar una claridad adicional. D. Alberto Dou fue profesor tanto de la escuela de ingenieros de caminos como de la facultad de matemáticas, impartiendo en ambos lugares, la asignatura de ecuaciones diferenciales, y le hemos oído comentar que estos teoremas y su desarrollo minucioso parecía adecuado en un determinado momento para los matemáticos, y que sin embargo, resultan ser tremendamente prácticos para los ingenieros que iban a resolver las ecuaciones diferenciales que les aparecieran usando el ordenador y los métodos numéricos, obteniendo una solución, que podía no tener ningún sentido si antes no habían garantizado la existencia y unicidad de las soluciones.

El interés de los teoremas de existencia y unicidad estriba en que en muchas ocasiones, al resolver un problema cuyo modelo es una ecuación diferencial, no es preciso encontrar la solución exacta de la ecuación y basta encontrar valores aproximados de ella, lo que se puede conseguir aplicando alguna fórmula numérica como las que se presentan en los capítulos trece y catorce. Pero para que los valores obtenidos a partir de dichas fórmulas sean aceptables es preciso conocer a priori que el problema en cuestión tiene una única solución.

En el capítulo nueve se trabaja la relación entre los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden y las ecuaciones diferenciales de orden superior, particularizando los teoremas de existencia y unicidad a estos casos. Se introduce la transformada de Laplace como herramienta para transformar una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales

en una ecuación algebraica o un sistema de ecuaciones algebraicas, y se estudian sus propiedades. Se estudian, de nuevo, un buen número de aplicaciones particulares.

El capítulo diez se ocupa de las ecuaciones diferenciales lineales de orden superior, y el capítulo once de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. El orden para impartir estos capítulos es discutible. Ya se ha visto, en el capítulo anterior, la relación existente entre un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden y una ecuación diferencial lineal de orden n , y la posibilidad de convertir las unas en los otros. El estudio de la estructura algebraica de las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales, estructura de espacio vectorial para las que son homogéneas, y de espacio afín, para las no homogéneas, proporciona una idea de cuáles deben ser los procedimientos para buscar las soluciones. Quizás un orden más matemático sería estudiar antes los sistemas, pero las ecuaciones de orden superior resultan más sencillas, por lo que se ha decidido trabajarlas antes, y poder así añadir en el capítulo once cuestiones como la exponencial de una matriz, específicas de los sistemas lineales.

El capítulo doce es una iniciación a los sistemas dinámicos. Los modelos matemáticos simplifican la realidad para poder estudiarla, y una de esas simplificaciones es la linealización, lo que implica considerar que el proceso es lineal. Existe para ello una razón importante. En las ecuaciones diferenciales no lineales aparecen grandes complicaciones. Con el uso de los ordenadores se ha visto que ecuaciones diferenciales no lineales, que verifican los teoremas de existencia y unicidad, pueden producir caos, es decir, que si existe un pequeño error en la obtención de las condiciones iniciales, pueda dar lugar al cabo de un

cierto tiempo, a que la nueva solución que se obtenga se aleje demasiado de la anterior, con lo que el fenómeno resulte impredecible. Después de explicar durante muchos años en cursos de doctorado y tercer ciclo estos hechos se ha intentado dar unas orientaciones sencillas en este capítulo donde quizás queden abiertas las puertas de manera que el estudiante interesado pueda sentirse invitado a seguir trabajando, pues ya sabe que no conoce todo sobre ecuaciones diferenciales sino que existen muchos problemas abiertos de gran interés y belleza que merecen el esfuerzo de ser estudiados.

La tercera sección la constituyen los métodos numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales. Comienza, como las secciones anteriores, con una breve introducción histórica. Es interesante saber que estos métodos ya existían antes del uso de los ordenadores, y cómo se aplicaban a resolver sobre todo problemas de balística, por lo que muchas veces sus resultados se mantenían en secreto. Con la aparición de los ordenadores se han podido analizar las soluciones obtenidas, comprobar qué métodos tenían mejores propiedades, y confeccionar aquellos que tienen una relación calidad-coste óptima.

Los distintos métodos numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales se agrupan en dos grandes grupos: los métodos de un paso y los métodos lineales multipaso. Su estudio se realiza en los capítulos trece y catorce.

En el capítulo trece se estudian los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales de un solo paso como el método de Euler, los métodos de Taylor, los métodos de Runge – Kutta o los pares encajados de Runge – Kutta. Una vez conocidos estos métodos, sus ventajas y sus

inconvenientes, se hace un estudio general de los métodos de un paso para poder analizar los distintos tipos de errores, el error global, el error de truncamiento y el error local, así como los conceptos de convergencia y consistencia. Se estudia a continuación la estabilidad absoluta de las distintas fórmulas, y también se comenta brevemente la extrapolación de Richardson.

En el capítulo catorce se estudian los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales lineales multipaso, especialmente los métodos de Adams-Bashforth y los métodos de Adams-Moulton, siendo los primeros métodos explícitos y los segundos, implícitos. Termina el capítulo con un estudio detenido de los conceptos de convergencia, consistencia, orden de consistencia y estabilidad, así como algunos tipos distintos de estabilidad, como la estabilidad absoluta y la relativa de las fórmulas lineales multipaso.

Termina el texto con una bibliografía separada en las tres secciones que lo forman.

Esto es todo, los autores desean que el libro resulte de su agrado y sea de utilidad.

Los autores