

Curvas y superficies en la arquitectura

Ramón J. Zoido Zamora
rj.zoido@upm.es

RESUMEN

Las invenciones de muchos grandes arquitectos están implícitamente reguladas por la geometría pero en las obras de algunos de ellos el predominio de ésta es muy explícito y notorio. Particularmente el estudio de las curvas y superficies dentro de la Geometría Diferencial nos puede facilitar la comprensión de algunos elementos singulares de un cierto tipo de arquitectura o de ciertas artes aplicadas y nos puede servir no solo para entender y analizar estos elementos sino también para poder generalizarlos estableciendo modelos que pueden ser utilizados como nuevos objetos arquitectónicos. Aquí vamos a esbozar este análisis y generalización sobre hallazgos e innovaciones de dos arquitectos cuyas obras manifiestan de forma patente sus fundamentos geométricos.

Palabras claves:

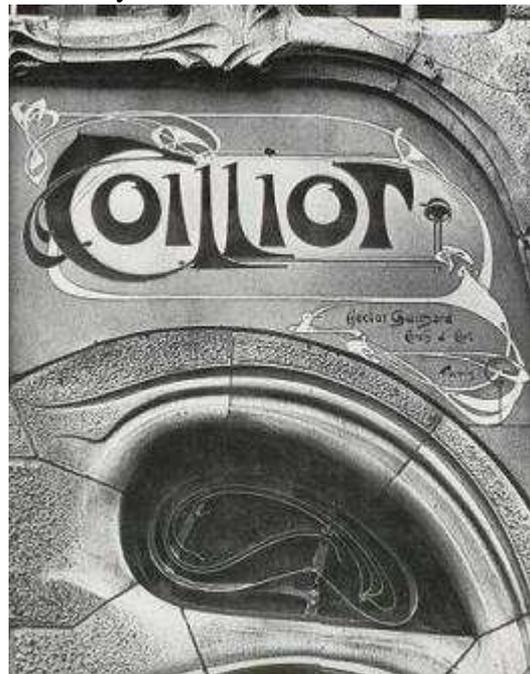
Curvas, Superficies. Geometría diferencial.

1.- LAS SINUSOIDES CILÍNDRICAS Y LAS SUPERFICIES DE GUIMARD



Hector Guimard (Lyon, 1867 - Nueva York, 1942) es el representante más significativo y personal del *Art Nouveau* francés. Si bien es verdad que siempre se valoraron los elementos decorativos de sus obras, este arquitecto innovador, curioso, brillante y sorprendente fue olvidado después de su muerte y redescubierto a partir de la segunda mitad del siglo pasado. Como no es nuestro interés entrar a valorar ahora lo estrictamente arquitectónico de sus trabajos, hemos seleccionado solamente dos fragmentos significativos de algunas de sus obras más representativas para mostrar su personalidad y el contexto estilístico en el que se

desarrollaron. Uno de ellos es el fascinante diseño de la puerta principal del *Castel Bérangeur*, en París, obra terminada en 1898 y la primera que le dio fama aunque una fama no exenta de polémica. La segunda pertenece a la *maison Coilliot* en Lille, acabada en 1900 sobre la que puede observarse también el diseño de las letras con una geometría peculiar que después se convertirá también en representativa de un estilo.



Pero la obra que hizo famoso el nombre de Guimard fue el diseño completo y la decoración de las entradas y edículos del metro de París. Desde 1890 se habían presentado numerosas ideas a la Société Centrale des Architectes, pero fueron finalmente estos diseños de Guimard completamente innovadores y personalísimos los que fueron aceptados. Guimard diseñó íntegramente estas entradas con una decoración distinta para cada estación: líneas curvas, tallos nervados, motivos florales, mástiles, faros flexibles y en general una exuberante explosión de formas que supuso el triunfo del llamado "ornamento estructural". Estos accesos que se convertirían en símbolo del "estilo Guimard", se convertirán también, de alguna manera, en símbolo del París de final de siglo y de la *Belle Époque* o de su preludio. Estas entradas, muchas de ellas perdidas, fueron en su día muy admiradas por la mayor parte de los artistas innovadores y vanguardistas.

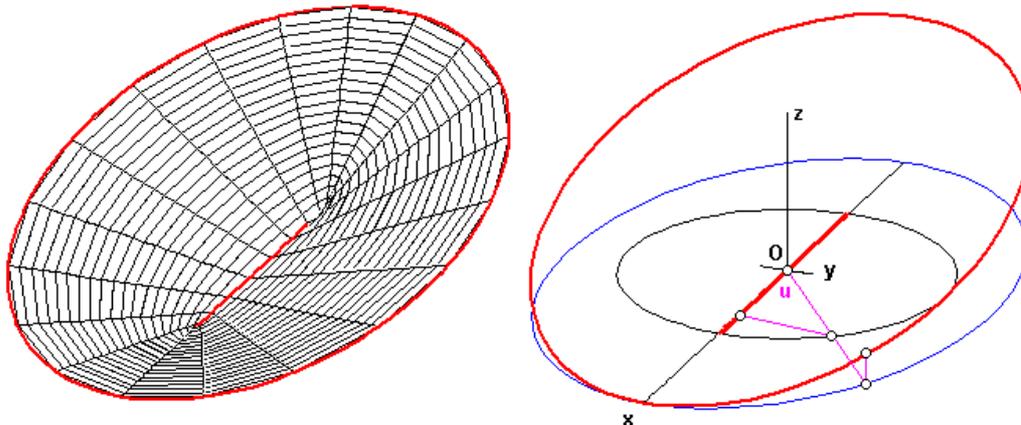


Entre las entradas de Guimard que, más o menos, de una u otra manera han sobrevivido, hay básicamente 11 tipos distintos de los que tres son pabellones cubiertos. Teniendo en cuenta que el tejado del edículo de *Châtelet* fue reconstruido en el 2000 siguiendo otro modelo, destacamos aquí solamente dos tipos de accesos cubiertos: *Abbesses* y *Porte Dauphine*. Este último, que es monumento histórico desde 1978, posee la cubierta invertida que puede ser objeto de análisis y generalización.

Se puede reconstruir circunstancialmente la cubierta invertida de la *Porte Dauphine* con mejor o peor fortuna pero lo importante no es tratar de imitarla sino captar su estructura básica y analizar cuales son las características fundamentales de tal superficie. El resultado del primer análisis nos muestra que puede asimilarse a una

superficie reglada generada con dos directrices una de las cuales es un segmento rectilíneo y la otra una curva que podemos situar en un cilindro recto de sección elíptica de manera que una de las generatrices que une un extremo de la directriz recta se alinee con ella, en tanto la directriz del extremo opuesto marque una línea de cumbre. Todo ello es consecuencia de su funcionalidad ya que es un recipiente que dispone de una lima-hoya corrida para permitir la salida de las aguas.

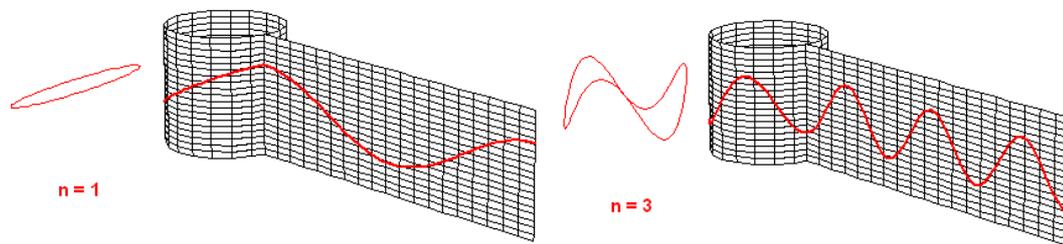
Siendo el recorte superior un aspecto ornamental circunstancial. La génesis de tal depósito se muestra en la siguiente imagen donde se ha tomado un segmento situado en el eje **OX** como directriz. Mientras un extremo de cada generatriz sigue sobre el segmento un movimiento sinusoidal rectilíneo $(3 \cos u, 0, 0)$ el otro extremo debe recorrer un movimiento de proyección elíptica o circular sobre la segunda directriz trazada sobre un cilindro que puede ser simplemente una sección plana. Se trata ahora de ajustar esta segunda directriz de manera que la generatriz en un extremo se alinee con el segmento directriz para formar la línea de desagüe en tanto la opuesta forme la



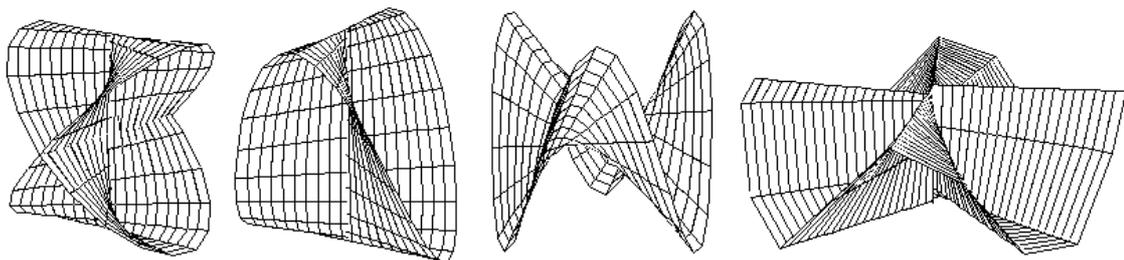
cumbre: $(6 \cos u, 4 \sen u, 1.5 (1 + \sen (u - \pi/2)))$. Aquí se ha realizado la parametrización con una circunferencia auxiliar cuyo diámetro sea justamente el segmento directriz, en base al ángulo "u" recorrido por la proyección de la generatriz sobre el plano **XOY**. En estas condiciones, la parametrización de esta "superficie de Guimard" resulta ser:

$$((3 + 3 v) \cos u, 4 v \sen u, 1.5 v (1 + \sen (u - \pi/2))).$$

Para tratar de generalizar este modelo vamos ahora a describir las curvas sinusoidales que se pueden trazar sobre un cilindro cuya sección normal a sus generatrices puede ser elíptica pero que aquí por simplicidad hemos tomado circular. Denominamos a estas curvas "*sinusoides cilíndricas*" y son consecuencia simplemente del arrollamiento de una curva seno o coseno sobre un cilindro. Su representación paramétrica es muy elemental y no requiere muchas explicaciones adicionales: $(\cos u, \text{sen } u, a \text{sen } n u)$. El orden de la senoide " n " es el número de máximos que presenta la curva. En la imagen se muestran como ejemplos las sinusoides cilíndricas de ordenes **1** y **3** para $a = 0.5$.



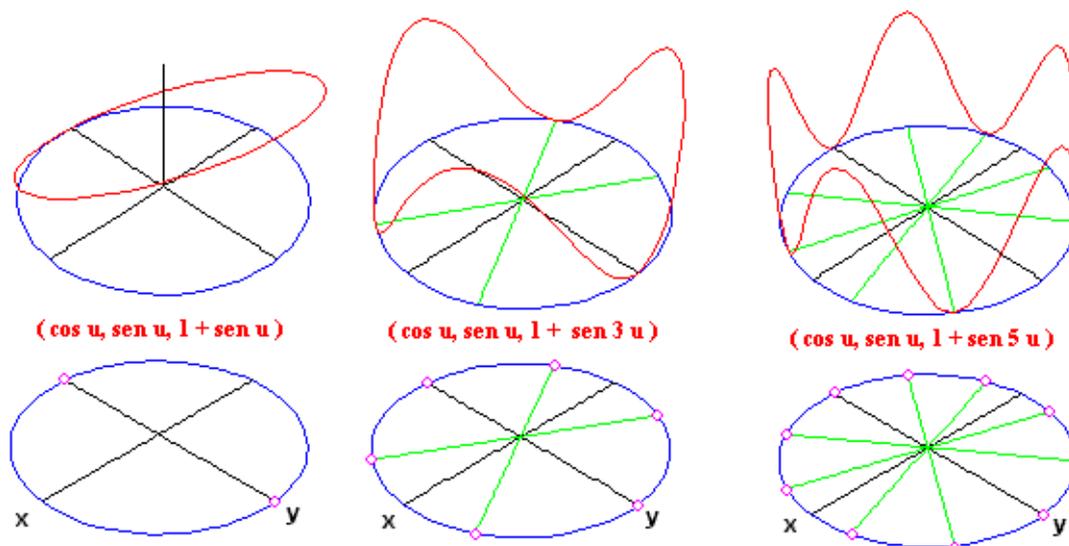
Estas curvas, por otra parte, permiten generar diferentes superficies muy interesantes y algunas muy notorias. Aquí se muestran algunos ejemplos de conoides utilizando como directriz curva diferentes sinusoides cilíndricas $n = 1, 2, 3$ y 4 ; uno de ellos es un conoide *de Plücker* pero varios presentan *pinzamientos* o singularidades *de Whitney*. De los conoides se hablará aquí posteriormente así que tendremos ocasión de



recordar las características de este tipo de superficies. Estos pinzamientos de las superficies, puntos singulares aislados o "*pinzas*" de distintos órdenes, se encuentran o se producen sobre las superficies, dicho sea de paso, con infinidad de variantes. Es decir la superficie misma se puede extender alrededor de la pinza de múltiples maneras lo que indica que es la estructura de la forma y no la forma misma lo esencial de la

singularidad. Las superficies generadas en estos ejemplos sugieren las posibilidades potenciales de estas singularidades en el campo del diseño con valores simbólicos o plásticos muy notables. Con estas curvas podemos generar modelos de apariencia muy sencilla que resultan tan intrigantes como puede serlo una cinta de Möebius.

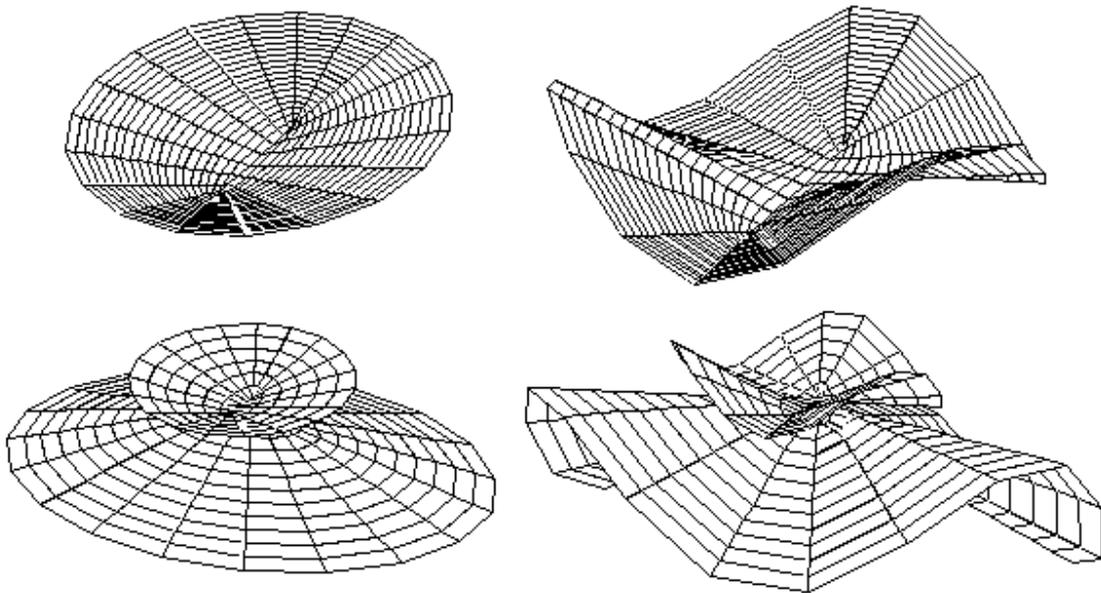
Antes de generalizar el modelo de Guimard resulta imprescindible situar perfectamente los puntos de mínimos de las sinusoides cilíndricas descritas por la parametrización $\underline{r} = \{ \cos u, \text{sen } u, \text{sen } n u \}$ sobre su proyección circular con el fin de introducir la corrección necesaria que alinee el segmento directriz con una de las generatrices formando la lima-hoya de desagüe como ocurre en la superficie de la Porte Dauphine. El cálculo de la situación exacta de estos máximos y mínimos puede simplificarse, si se quiere, buscando sobre la curva alabeada los puntos de torsión nula, lo que implica anular el producto mixto de las tres primeras derivadas de la función vectorial \underline{r} que nos sirve de representación paramétrica. El resultado del cálculo es el esperado ya que coinciden con las soluciones de las ecuaciones $\cos nu = 0$. En la figura se muestran estas posiciones para $n = 1, 3$ y 5 .



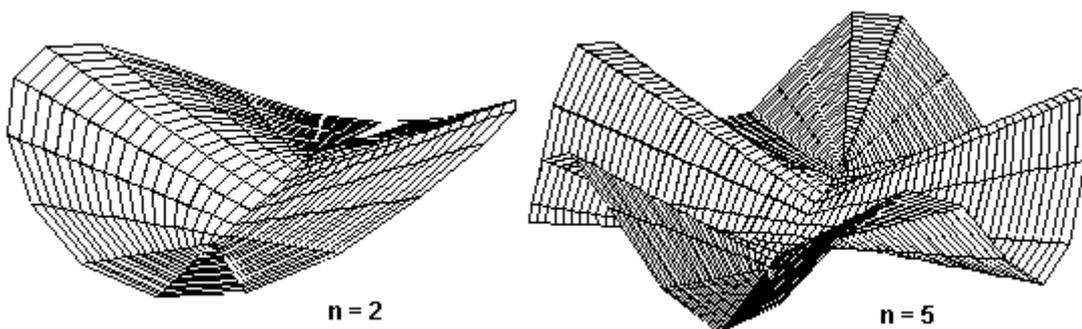
Situado el segmento directriz sobre el eje **OX** podemos ahora corregir la posición correcta de la senoide cilíndrica para alinear el segmento con una de las generatrices y obtener una parametrización adecuada de la superficie de Guimard que

nos sirva para describir vectorialmente las características de forma de tal superficie. Aquí se muestra este proceso de corrección para $n = 1$ y $n = 3$ junto a un fragmento más amplio del cual la superficie de Guimard es la fracción superior; las parametrizaciones resultantes son respectivamente:

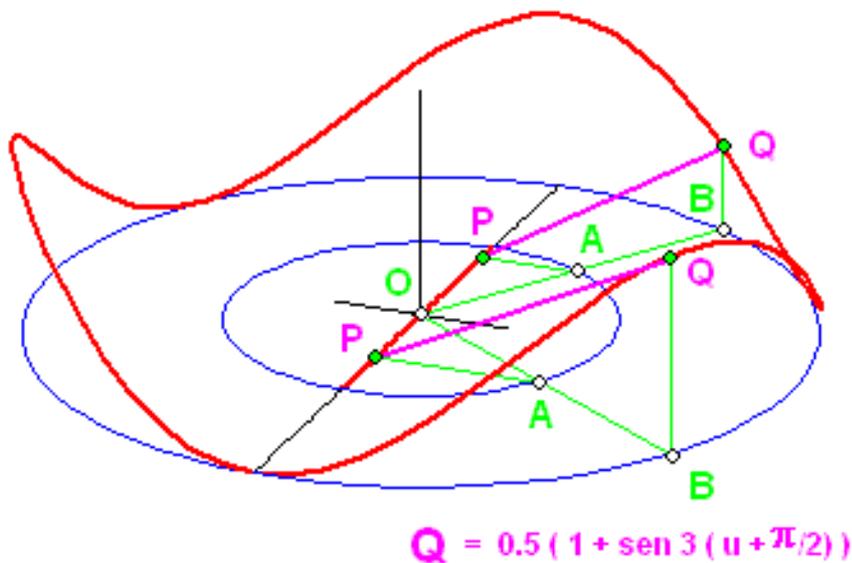
$$\left((1 + v) \cos u, 2 v \sin u, 0.5 v (1 + \sin (u - \pi/2)) \right) \quad \text{y} \quad \left((1 + v) \cos u, 2 v \sin u, 0.5 v (1 + \sin 3 (u + \pi/2)) \right)$$



Este análisis y la corrección correspondiente en función de la posición de uno de sus mínimos puede hacerse ahora de la misma manera sobre la senoide cilíndrica para cualesquiera valores enteros de n proporcionando variantes de la superficie de Guimard en la que para valores de n pares, la lima-hoya generada por el segmento directriz más dos de las generatrices, atraviesan de parte a parte la superficie en tanto los valores de n impares son los que en realidad permiten generalizar el modelo de la *Porte Dauphine*



con líneas impares de desagües. Estrictamente las superficies de Guimard descritas se deben corresponder, por lo tanto, con valores de n impares. Se representan complementariamente las primeras generalizaciones para $n = 2$ y 5 en las siguientes imágenes habiendo ya incluido una pequeña pendiente hacia el exterior de las correspondientes lima-hoyas que resulta imperceptible en las figuras y que, respecto a su representación paramétrica, no requiere más que una pequeña traslación de la senoide directriz.



Con todo lo dicho, el replanteo de tales superficies resulta sencillo. Se establece en el plano de planta, por una parte, el segmento directriz y la correspondiente circunferencia auxiliar con centro "O" en el punto medio del segmento y, por otra, la proyección de la senoide correspondiente sea una circunferencia concéntrica – el caso representado - o, en su caso, una elipse. Cualquier semirrecta con centro el origen "O" que corte a ambas circunferencias en "A" y "B" determinan respectivamente los puntos "P" y "Q" que definen la generatriz correspondiente. El punto "P" es la proyección simple en el plano de planta del punto "A" sobre el segmento y el "Q" se obtiene por elevación del correspondiente valor de la senoide cilíndrica desde "B". La figura corresponde al caso $n = 3$.

2.- LOS CONOIDES Y LAS SUPERFICIES PLEGADAS DE CALATRAVA

Entramos ahora en la Arquitectura de Santiago Calatrava. No parece necesario extendernos demasiado en la presentación de este arquitecto valenciano que cursó sus estudios en la Politécnica de Valencia y se doctoró posteriormente como ingeniero civil en el Instituto Federal de Tecnología de Zurich con una tesis cuyo título "Acerca de la Plegabilidad de las Estructuras" resulta muy significativo. Es tal vez uno de los arquitectos actuales españoles más conocido y admirado internacionalmente y seguramente uno de los arquitectos en los que su preparación en el campo de la geometría resulta más evidente.



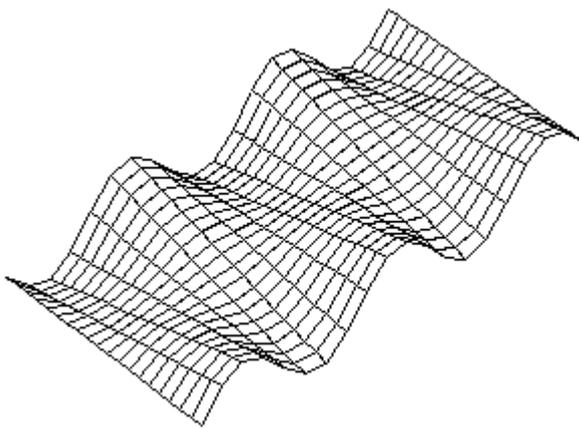
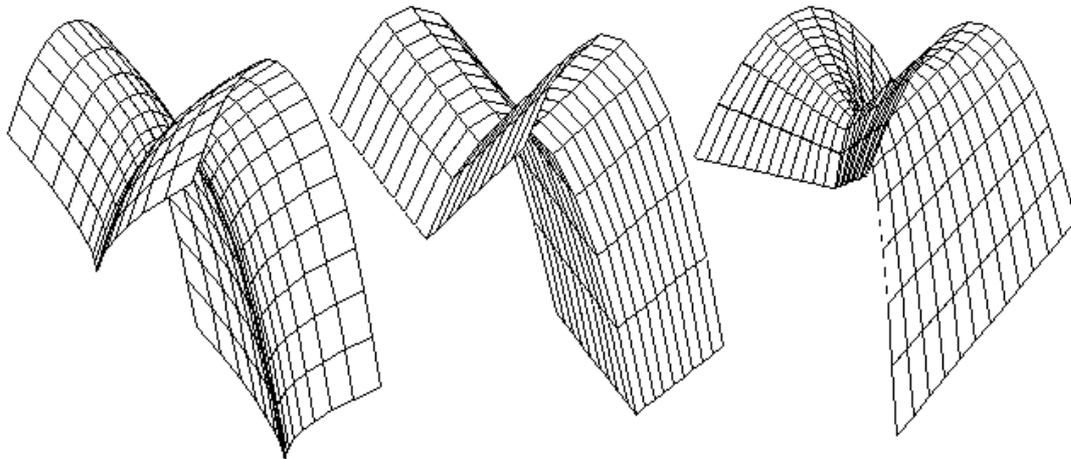
Merece la pena recordar la relación de su obra menos conocida como son sus esculturas con su arquitectura posterior y subrayar la relación de ambas con la generación de superficies y con la geometría. En una de las figuras hemos elegido uno de sus

"pájaros", esculturas realizadas desde mediados de los años 80. En la otra mostramos la estación del aeropuerto de Lyon-St Exupéri, obra terminada en 1994 y el auditorio de



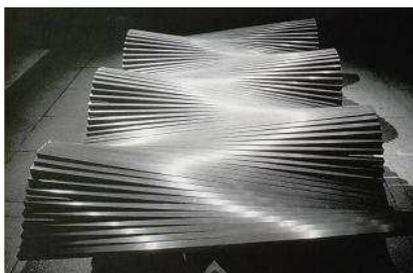
Santa Cruz de Tenerife comenzado en 1991 y terminado en el 2003. Casi toda la obra significativa de este arquitecto gira alrededor de exploraciones previas en el campo de las curvas y las superficies.

Podemos generar algunas variantes básicas –independientes del fragmento o recorte del mismo– de este tipo de superficies sobre una directriz o "espina" parabólica. En la figura se presentan algunos ejemplos; a la izquierda, trivialmente, como una superficie de traslación y a la derecha dos alternativas regladas, una con fragmentos cilíndricos –centro– y la otra formada por generatrices vinculadas a rectas que dependen de direcciones asociadas a la propia directriz.

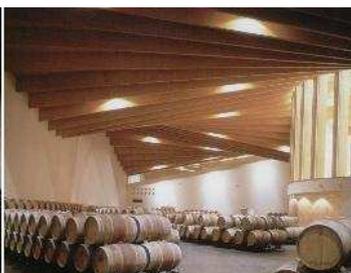


Finalmente, otros ejemplos enlazan directamente sus esculturas con sus edificaciones posteriores. Esa superficie de "sinusoides contrapuestas" resulta ser un conoide muy elemental y sencillo de generar y está presente en varias exploraciones del arquitecto. Tendremos ocasión de

volver a encontrarnos con ella. La podemos relacionar directamente con la cubierta del proyecto de las bodegas Ysios en La Rioja. No podemos dejar de hacer referencia a que



escultura - CALATRAVA



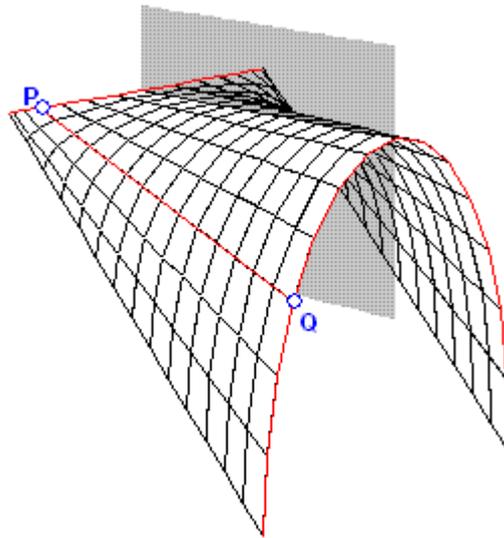
bodegas Ysios - CALATRAVA



escuelas Sagrada Familia - GAUDI

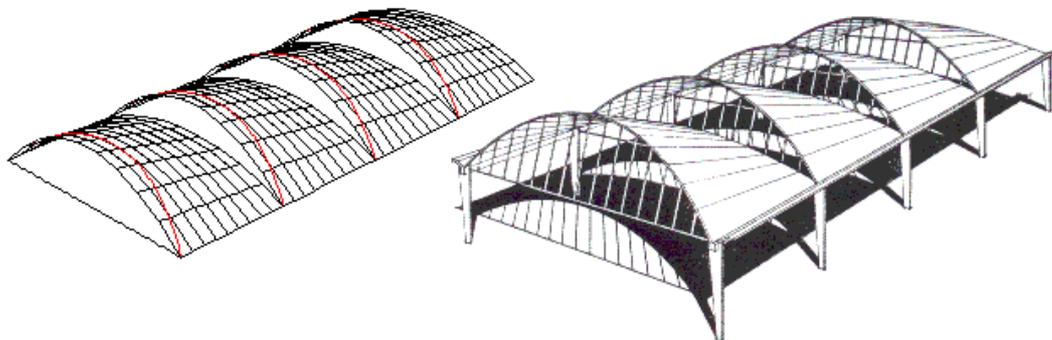
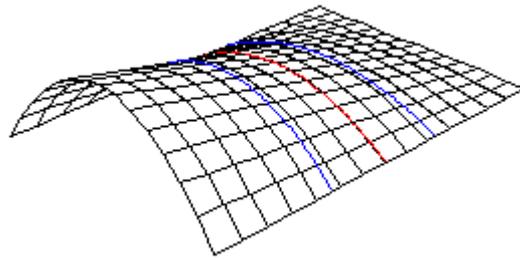
esta geometría de las sinusoides contrapuestas fue ya experimentada, aunque más modestamente, por Gaudi en las escuelas de la Sagrada Familia de 1909, pequeño edificio que fascinó a Le Corbusier en su visita a Barcelona de 1928.

Para un arquitecto, tal vez la característica más importante de las superficies regladas es reconocer si es de doble curvatura ("*anticlásticas*" o de puntos hiperbólicos) o bien de curvatura simple, denominadas también de "*curvatura nula*" haciendo referencia al valor nulo que toma la curvatura de Gauss en todos sus puntos. En el



ámbito de la Geometría Diferencial nosotros conocemos a estas últimas como superficies "desarrollables" en tanto las primeras, no desarrollables, las venimos denominando "alabeadas". Aunque trivialmente todas las superficies no planas se alabean, el término "alabeadas" tiene una cierta lógica como veremos. Esta distinción trasciende la pura clasificación académica. Después es también importante, entre las alabeadas, reconocer cuales de todas sus generatrices se comportan localmente como si de una desarrollable se tratara pero entrar en este tema nos alejaría tal vez de la cuestión que aquí tratamos. En superficies descritas por parametrizaciones es muy conveniente disponer de su forma "*propia*" o "reglada" privativa de estas superficies. Afortunadamente, los procedimientos de construcción o generación de estas superficies a través de la elección de una curva directriz y de imponer las condiciones para expresar la dirección de las generatrices nos ofrecen directamente la superficie en su forma propia. En estas condiciones el cálculo necesario para saber si una superficie es o no desarrollable es completamente elemental y lo mismo reconocer las generatrices "cilíndricas" o de puntos parabólicos de las superficies no desarrollables.

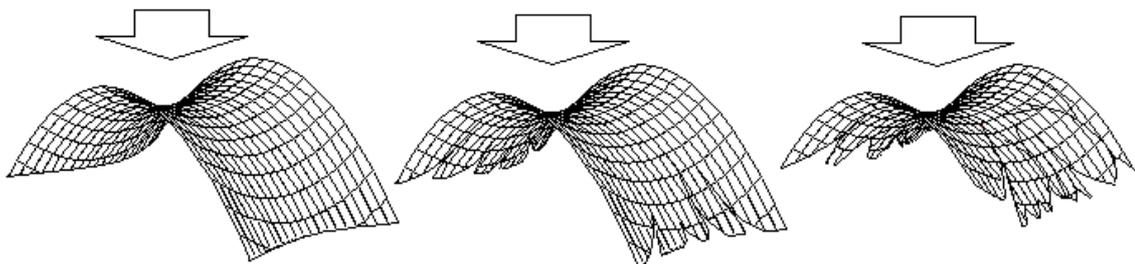
Dentro del campo del diseño, entre las superficies regladas, destacan de manera notable los conoides y cilindroides, superficies en las que una de sus tres directrices se convierte en un plano director; es decir: son superficies generadas por rectas que se apoyan en dos líneas directrices permaneciendo paralelas a un plano. En la figura, cada una de las generatrices **P-Q** deberá ser paralela a un plano que es el llamado plano director. Cuando una de las directrices es una recta es cuando denominamos a la superficie un "conoide" como son los mostrados en las figuras: unas superficies omnipresentes en la arquitectura y también en multitud de útiles de la vida diaria que tal vez nos hayan podido pasar desapercibidos. Una familia de conoides especialmente interesante en todas las ramas de la ingeniería y la arquitectura lo constituyen los fragmentos de conoides rectos generados con una curva plana y una recta en un plano paralelo a ella. Este es, con alguna variante, el primer modelo experimental que utilizó Félix Candela en la fábrica Fernández en 1950 pero existen infinidad de ejemplos de este tipo de conoides desde los puramente decorativos a los diseños industriales junto a una gran cantidad de cubiertas y paneles de recubrimiento arquitectónico. Algunos conoides rectos y oblicuos constituyen importantes superficies regladas clásicas como la "*cuña de Wallis*" el "*helicoide recto*" o el mismo paraboloides hiperbólico.



Es sencillo demostrar que un conoide que no degenera en un plano es necesariamente una superficie no desarrollable y por lo tanto de doble curvatura.

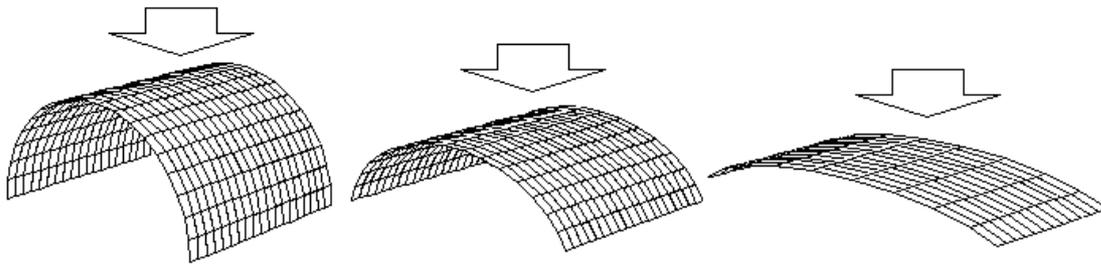
Consideramos las superficies flexibles pero inextensibles; esto es: los cambios de forma de cualquier superficie sometida a esfuerzos no pueden convertirla en otra superficie si existen extensiones o contracciones de sus secciones constitutivas. Este tipo de deformación es posible en una pelota de hule o goma pero no lo es en las superficies que aquí consideramos.

El caso es que entre las regladas, una superficie no desarrollable supuesta flexible pero inextensible no puede cambiar de forma ya que este cambio implicaría alargamientos y acortamientos de las líneas que nos sirvan de referencia; es decir: en las superficies alabeadas o de doble curvatura la geometría permanece inmutable. Para deformar una superficie de doble curvatura por presión superior es necesario destruir el modelo y lo mismo ocurriría con determinadas tracciones que tiendan a estirarlo.



En las superficies desarrollables puede haber sin embargo cambio de forma bajo presión sobre el modelo sin alargamiento ni acortamiento de cualquier tipo de curvas que tracemos sobre ellas es decir: sin cambio de longitud y lo mismo ocurriría con las tracciones. Es decir: en estas transformaciones estaríamos en un proceso general de flexión matemática. La flexión matemática es resultado de aplicaciones isométricas entre superficies aunque no todas las transformaciones isométricas son necesariamente el resultado de una flexión. La flexión de la superficie es mucho más restrictiva ya que implica la continuidad de todos los estados intermedios de una transformación, en tanto la isometría solamente atiende a los estados inicial y final. La aplicación isométrica entre superficies es una correspondencia biunívoca que conserva idéntica la longitud de cualquier arco de curva regular trazado en una de ellas. Es conveniente precisar que este

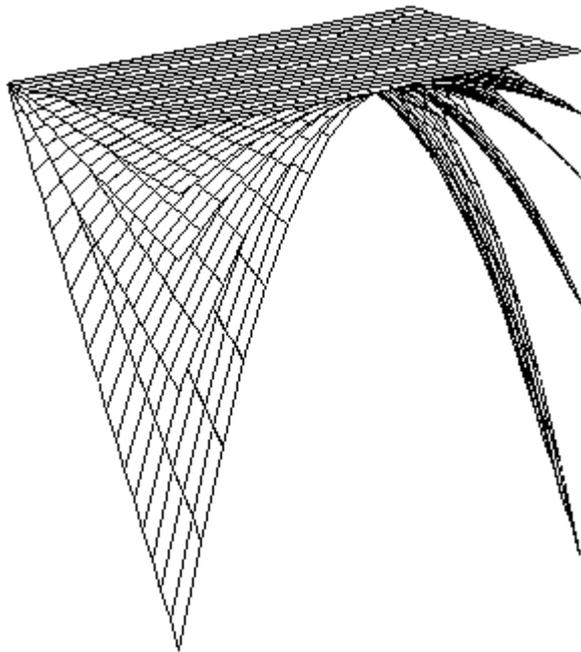
tipo de aplicaciones deben contemplarse siempre entre fragmentos de superficie y no entre superficies “en su totalidad”. Esto nos permite obviar algunas de las propiedades de la aplicación misma y la consiguiente literatura matemática derivada, que podría a veces confundir más que aclarar el hecho esencial de la conservación de la métrica entre ambas. En una transformación entre dos fragmentos de distintas superficies, sean regladas o no lo sean, la flexión matemática general se verifica si se puede definir entre ellas una isometría. En una deformación de este tipo, las longitudes de los arcos de las curvas trazadas, así como los ángulos entre estas curvas, permanecerán fijos, y también será invariable el área de las regiones correspondientes.



Esta importante diferencia entre superficies alabeadas o de doble curvatura y superficies desarrollables o de curvatura nula podíamos explicarlo a través de una analogía al considerar, por ejemplo un triángulo y un cuadrado tales que sus vértices permitan el giro de sus lados adyacentes. En estas condiciones el cuadrado puede cambiar de forma manteniendo la longitud de sus lados en tanto el triángulo es una figura indeformable y la articulación de sus vértices no permite cambio de forma si no hay cambio en la longitud de sus lados.

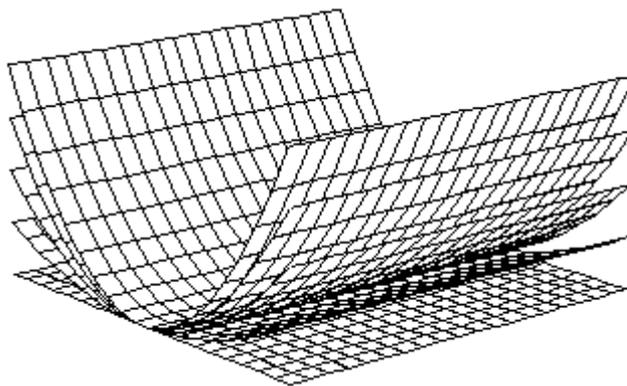
Lo siguiente es que todas las superficies desarrollables son isométricas con el plano. Es una peculiaridad básica privativa de estas superficies que son, en realidad, simples envolventes de un haz de planos, no paralelos ni con una recta común. Si consideramos, por ejemplo, una familia de planos con una dirección común obtendremos como envolvente un cilindro; si tienen un punto común, obtendremos un cono, y si consideramos la familia de planos osculadores de una curva alabeada cualquiera obtendremos una superficie de desarrollo tangencial. Todas estas superficies pueden extenderse en un plano y, según lo dicho anteriormente, este proceso se puede realizar por flexión matemática.

Una de las consecuencias simples, pero importante, es que de todas las superficies posibles, solamente las desarrollables pueden transformarse por simple flexión en un plano. Recíprocamente, ninguna superficie inextensible que no sea desarrollable (sea reglada o no) puede transformarse por flexión en un plano sin romperse. Y puesto que los conoides son todos ellos superficies alabeadas, no es posible transformar un conoide en un plano mediante cualquier sistema de tracciones o flexiones.



Esto no excluye la posibilidad de generar paramétricamente familias de fragmentos de superficies dependientes de forma continua de un tercer parámetro que incluyen el plano –o un fragmento del mismo– aunque este proceso no sea posible elásticamente ni quede definido por una flexión matemática. En la imagen se muestra, por ejemplo, la familia de conoides de doble curvatura:

$$\underline{\mathbf{r}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{a}) = \{ \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{a} \mathbf{v} \mathbf{u}^2 \} \quad \text{para } \mathbf{a} < \mathbf{0},$$



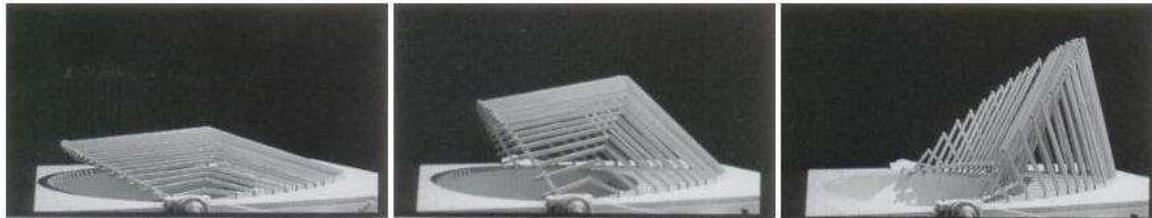
y la familia de cilindros:

$$\underline{\mathbf{r}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{a}) = \{ \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{a} \mathbf{u}^2 \} \quad \text{para } \mathbf{a} > \mathbf{0},$$

ambas contienen el plano ($\mathbf{a} = \mathbf{0}$) sin ningún tipo de anomalías.

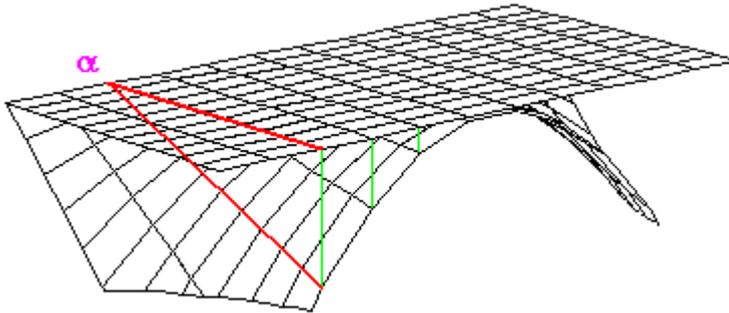


Para entrar ahora en el tema de nuestro interés dentro de la obra de Santiago Calatrava podemos contemplar, en primer lugar, la fuente de la plaza central de Alcoy en Alicante. Esta es una configuración que permite la transformación de superficies con plano director. En la siguiente figura una maqueta muestra las posiciones más relevantes de la secuencia del movimiento y la consiguiente sucesión de los pares de cilindroides que pueden convertirse en dos fragmentos de un mismo plano que es el que permite la cubrición y protección total del recinto de la fuente.



Es un ejemplo de las que podemos denominar "*superficies plegables*", una ingeniosa combinación que Calatrava ha explotado ampliamente como veremos. Las generatrices se mueven en el plano director de la sucesión del par de "superficies" que se interceptan en una curva charnela. Este ejemplo nos sirve para ilustrar el que podíamos denominar "*género estructural*" que requiere conocimientos de la geometría, de la mecánica y del comportamiento estructural y que analizaremos más tarde con detalle. Aquí se trata del movimiento en mayor o menor escala de estructuras arquitectónicas utilizando superficies regladas previa sustitución de las mismas por sus sistemas de generatrices que se materializan en la construcción como barras de secciones constantes o variables. Los distintos movimientos que podemos provocar en este sistema de generatrices nos permiten describir de manera aparente o, si se quiere, de forma discreta, diferentes superficies y esta transformación entre "superficies" debida al movimiento de las generatrices parece poner en cuestión aspectos básicos de la

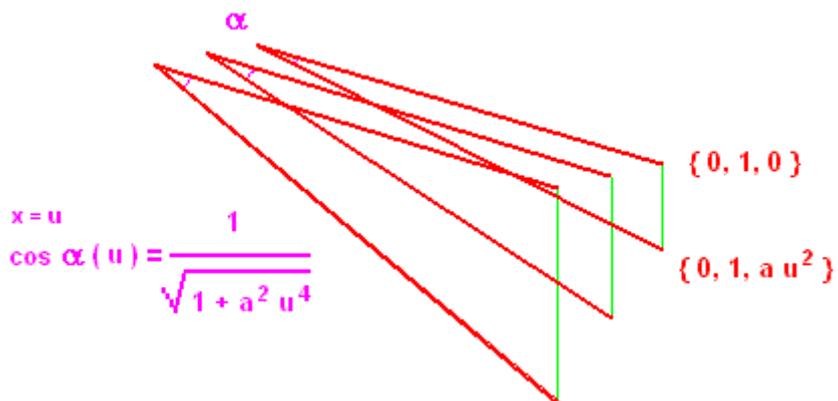
Geometría Diferencial como son el de las transformaciones de las superficies en un plano por flexión.



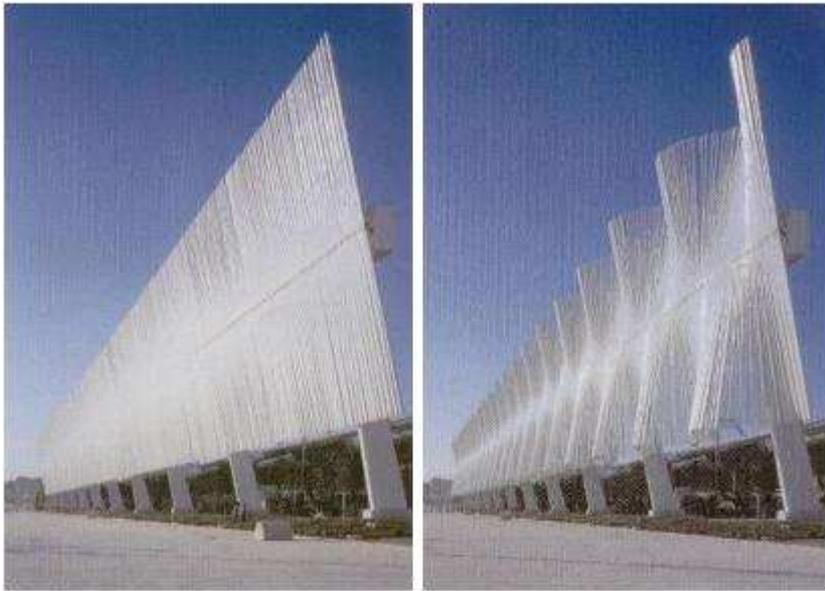
Este hallazgo supone la superación de una imposibilidad. Lo vemos sobre la familia de conoides descritos anteriormente que se transforman uno en otro

en un proceso inviable en superficies inextensibles e imposible desde el punto de vista matemático dentro de un proceso de flexión o conservación de las longitudes. En la figura de la derecha, el conoide inferior no puede convertirse en un plano pero si su substitución por un sistema de generatrices que puedan girar en su punto de contacto articulado con la directriz rectilínea.

Por otra parte estas generatrices pueden "sustituir" aparentemente a la superficie de manera tan precisa como nos permita la



independencia de cada una de ellas. El conoide queda así reemplazado por un conjunto de generatrices tan próximas unas a otras como deseemos y que al girar un ángulo adecuado que depende de su posición pueden transformar el conoide en un plano de manera sencilla y natural. Algo simple y genial al mismo tiempo. Esto no es más que llevar a la práctica constructiva el propio concepto matemático de superficie reglada como el lugar geométrico de una recta en el espacio que se mueve con determinada regularidad y donde prescindimos simplemente del aspecto continuo que aquí es solamente una apariencia. Apariencia, escenografía o quizás magia.



Aquí nos volvemos a encontrar con la familia de conoides "*de ondas contrapuestas*" de las que ya hemos hablado. Calatrava que ya la había explorado en diferentes esculturas, algunas de ellas animadas, transformó esta simple idea en una

gigantesca escultura móvil de 250 m de longitud y 20 m de altura que denominó "Muro de las Naciones" diseñado para el Complejo Olímpico de Atenas. Las generatrices tubulares de acero substituyen a cada una de las superficies transformadas entre las que se incluye naturalmente el plano. Asociado a la directriz rectilínea central, un dispositivo permite el giro de las generatrices. La sencillez de la idea no resta mérito a la construcción y puesta a punto de un objeto que puede tener algo de símbolo mágico.

Esta vinculación entre la generación de curvas y superficies y las construcciones arquitectónicas constituye un campo fascinante que liga el Arte, la Construcción y las Matemáticas y que ha dado lugar a diseños y proyectos muy significativos. El resultado final en gran escala de todo lo dicho anteriormente podría ser el de la extraordinaria pantalla solar plegable del museo Milwaukee, a orillas del lago Michigan, del propio Calatrava, que en su posición desplegada parece imitar el vuelo de un pájaro. Los pájaros y la apariencia del vuelo son otro de los motivos recurrentes de este arquitecto. En la cubierta móvil, 36 placas de acero cuya longitud varía entre los 8 m y los 32 m articuladas al mástil central substituyen a la familia de conoides configurando simbólicamente las gigantes alas de un pájaro. El espinazo o mástil es la directriz invariable de la transformación. Toda una tecnología adicional hace posible este "*brise-soleil*" que cuando la velocidad del viento es superior a un determinado valor debe cerrarse automáticamente.



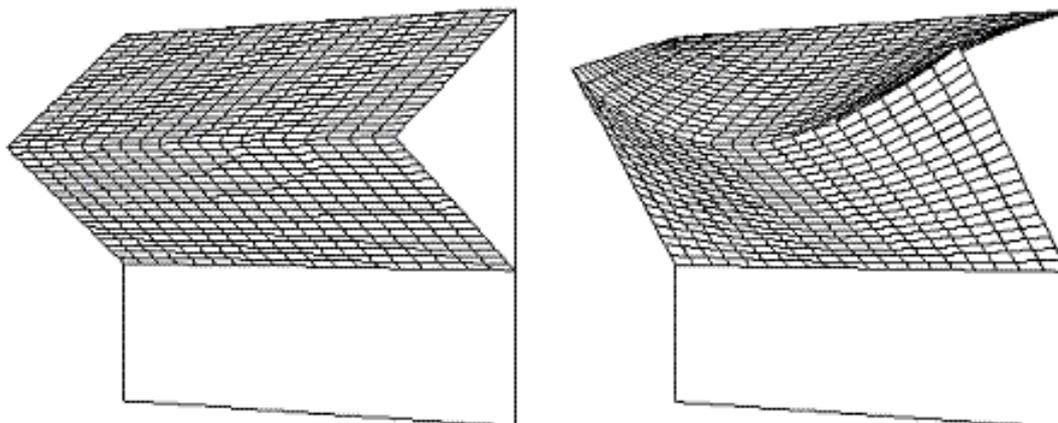
Las estructuras plegadas aparecen en la tesis doctoral de Calatrava y en sus cuadernos de dibujo y notas en los años 80. Estas ideas se materializan por primera vez en el diseño de las puertas de la factoría Ernsting en Alemania, obra realizada entre 1983 y 1985. Este es, entre sus proyectos iniciales, representativo de lo que hemos denominado "género estructural" y los principios explorados en este proyecto serán después desarrollados en mayor escala por el propio Calatrava como ya hemos visto. Por otra parte este diseño de las puertas Ernsting presenta con mucha naturalidad, sin



artificio, con sencillez y, si se quiere, hasta con modestia, la gran novedad de sus

estructuras plegables. Estas son las razones que lo convierten, en mi opinión, en uno de sus diseños más apreciables dentro de este estilo.

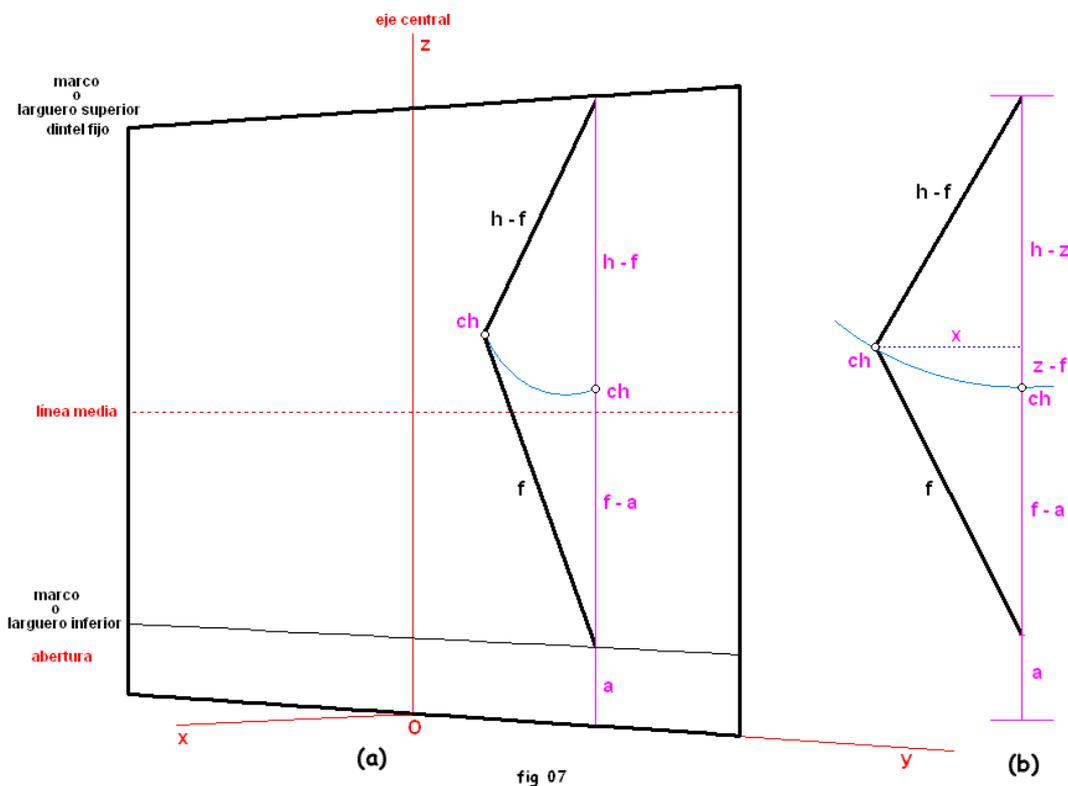
El proyecto al que hacemos referencia consistió en recubrir con una fachada envolvente un edificio ya construido como almacén. Aparte e independientemente del interés artístico o puramente arquitectónico de la solución adoptada y de los materiales empleados, el rasgo más sobresaliente en lo que respecta a su interés geométrico es el de las tres grandes puertas del muelle de carga de la fachada sur constituida por laminas de aluminio cada una de ellas articulada en tres partes: la parte superior e inferior sobre largueros que se deslizan sobre los carriles laterales y la intermedia que actúa a modo de charnela. La fachada sur de la factoría con la secuencia de la apertura de las puertas junto a los detalles de las lamas articuladas pueden verse en la imagen.



La novedad en el diseño, ya se ha visto, consiste en que la articulación media no pertenece a una recta inicialmente contenida en el plano de la puerta cerrada lo que proporcionaría simplemente dos planos desplegados en el proceso de apertura, lo que sería característica completamente habitual (diseño de la izquierda en la imagen) sino que conforma inicialmente una curva en este mismo plano lo que proporciona en cada una de sus posiciones de apertura dos conoides (en la imagen, a la derecha). Si desde el punto de vista arquitectónico la solución es sumamente ingeniosa y representa toda una novedad, desde el punto de vista de la geometría diferencial constituye, como ya hemos visto, toda una provocación ya que, a cierta distancia, podemos visualizar una construcción en la que pueden verse una sucesión de pares de conoides rectos, el

inferior y el superior, que se transforman en un plano – que es el de la puerta cerrada –, lo que aparentemente contradice todo lo explicado anteriormente.

Consideremos la puerta de vano rectangular. Al eje de simetría vertical –entre jambas– lo denominamos *eje central* y a la línea intermedia entre el umbral y el dintel o cabezal, *línea media*. Colocamos los ejes coordenados de manera que el vano permanezca en el plano **YOZ** con el eje **OY** a lo largo del umbral y el eje **OZ** en el eje central.



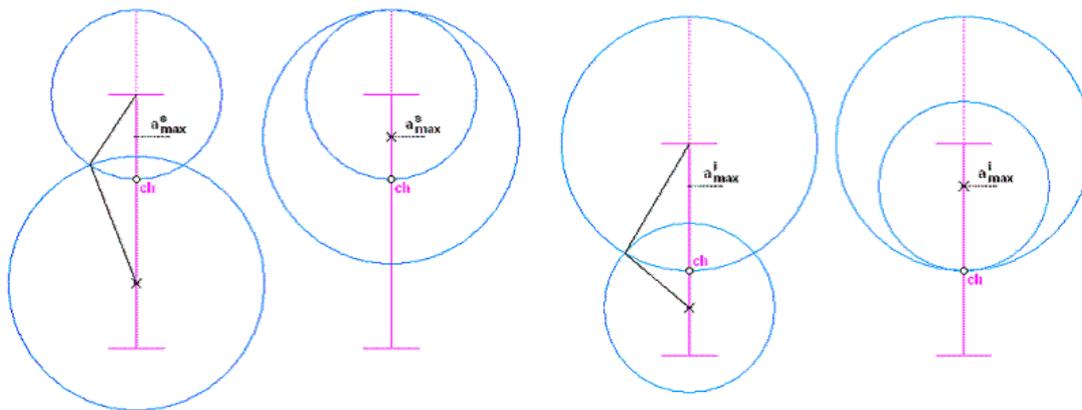
Como se ha dicho, el mecanismo consiste básicamente en dos varillas o lamas articuladas en uno de sus extremos al cabecero fijo y al umbral móvil respectivamente y entre sí en sus extremos libres por una charnela de manera que al abrirse la puerta, el punto de charnela describe un arco y es el diseño de la línea de charnela en la puerta cerrada la que determina la transformación de los planos superior e inferior en sendos conoides de plano director **XOZ** cuyas generatrices se conservan normales al eje **OY**.

Elegida cualquier curva continua $z = f(y)$ –simétrica respecto al eje central y de aspecto semejante a la curva de la fábrica de Coesfeld, si se quiere– que será la curva charnela de las articulaciones medias inicialmente contenida en el plano de la puerta, el sistema de ecuaciones correspondiente nos permitirá obtener la curva charnela para cada valor $z = f$ e $y = u$, siendo "a" la altura de abertura de la puerta y "h" la altura total del hueco. La parametrización puede venir expresada por:

$$\underline{r}(u, a) = \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{(2f - a) a (a - 2h) (2f - 2h + a)}{(a - h)^2}}, u, \frac{2f h - a^2}{2(h - a)} \right),$$

que constituirá una parametrización de la *superficie de charnelas de Calatrava*.

Existe una limitación básica en la apertura de la puerta, determinada por el menor de dos valores –uno para la "hoja" inferior y otro para la superior– que hacen imposible su progreso según se refleja en las figuras. Complementariamente, pueden existir otras restricciones de tipo estético o formal que limiten, por ejemplo, la posición de las lamas inferiores y superiores pero estos son factores en los que no entramos aquí.



El parámetro "a" deberá variar entre cero y el menor de ambos valores a_{max} . Para que estas limitaciones no reduzcan excesivamente el uso de la puerta, la curva charnela inicial debe trazarse en las proximidades de la línea media. Esto se pondrá de manifiesto en ejemplos posteriores

Para cada valor del parámetro "a", apertura de la puerta, los conjuntos de conoides superior e inferior pueden venir representados por las parametrizaciones:

$$\underline{\mathbf{r}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{a}) = \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \sqrt{\frac{(2\mathbf{f} - \mathbf{a}) \mathbf{a} (\mathbf{a} - 2\mathbf{h}) (2\mathbf{f} - 2\mathbf{h} + \mathbf{a})}{(\mathbf{a} - \mathbf{h})^2}}, \mathbf{u}, \mathbf{h} + \mathbf{v} \left(\frac{2\mathbf{f}\mathbf{h} - \mathbf{a}^2}{2(\mathbf{h} - \mathbf{a})} - \mathbf{h} \right) \right)$$

$$\underline{\mathbf{r}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{a}) = \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \sqrt{\frac{(2\mathbf{f} - \mathbf{a}) \mathbf{a} (\mathbf{a} - 2\mathbf{h}) (2\mathbf{f} - 2\mathbf{h} + \mathbf{a})}{(\mathbf{a} - \mathbf{h})^2}}, \mathbf{u}, \mathbf{a} + \mathbf{v} \left(\frac{2\mathbf{f}\mathbf{h} - \mathbf{a}^2}{2(\mathbf{h} - \mathbf{a})} - \mathbf{a} \right) \right)$$

que para $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ se transforman en el plano. Las líneas coordenadas de ambas series de conoides entre los valores de $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\max}$ se conservan ortogonales.

Finalmente, en las figuras siguientes mostramos diferentes ejemplos representativos sobre una puerta de altura $\mathbf{h} = \mathbf{4}$ m y ancho $\mathbf{6}$ m para diferentes funciones de la curva charnela inicial –curva plana, puerta cerrada– que muestra las posibilidades expresivas del modelo. En todos los casos hemos respetado la continuidad de la curva en el intervalo $[-\mathbf{3}, \mathbf{3}]$.

En el ejemplo 1º la curva charnela inicial es una parábola suave de aspecto semejante a la original de Calatrava y en el 2º es una parábola mucho más curvada. Pueden compararse los valores máximos de apertura que habilitan en mayor o menor medida el modelo. En el ejemplo 3º se utiliza una curva charnela de tipo senoidal de dos ondas.

Ya se ha dicho que para una suficiente apertura de la puerta, y la consecuente utilidad del modelo, la curva inicial debe de tener valores próximos a los de la *línea media* mientras que, por otro lado, criterios de tipo puramente estético nos inclinan a la elección de curvas simétricas – pares – respecto al *eje central*. La elección de la curva charnela del ejemplo 4º no tienen en cuenta estos criterios y se muestran diferentes posiciones del par de conoides hasta su apertura máxima; la altura útil de vano se reduce aquí a la mitad de la altura total de la puerta. En el ejemplo 5º se utiliza como charnela una línea quebrada con un vértice en el eje central; pueden observarse algunas de las posiciones representativas entre la apertura cero y máxima.

En las figuras que ilustran estos ejemplos, además de señalar la altura de apertura máxima se muestra, en primer lugar, la superficie de charnelas cuyas curvas coordenadas "a" o curvas $u = y = cte$ son, trivialmente, arcos de circunferencia, lo que hace que su estructura tenga cierto interés geométrico. Después se presentan la posición inicial – de la puerta cerrada – y la de apertura máxima, estableciendo unas cuantas posiciones significativas entre ambas. Los dos conjuntos de conoides en función del parámetro "a" para cada "h" y "f" resultan interesantes desde el punto de vista geométrico pero la secuencia de la aparente "deformación" entre todos ellos hasta la posición plana tiene algo de magia escénica.

