

# Génesis y desarrollo del Cálculo Fraccional

José Manuel Sánchez Muñoz



22 de marzo de 2011

## Resumen

Este artículo muestra en que situación histórica se produjo el nacimiento del Cálculo Fraccional, y como fue evolucionando desde Leibniz, pasando por los formalistas del s.XIX, hasta la actualidad, dando cuenta de los avances logrados por distintas corrientes durante el s.XX.

## 1. Nacimiento y primeros intentos por definirlo

En cuanto al nacimiento del Cálculo Fraccional, todos los historiadores matemáticos están de acuerdo en la datación de la fecha y como se produjo. Este hecho tuvo lugar tras una publicación de Leibniz en donde introducía la notación del Cálculo Diferencial, en particular de la expresión conocida hoy día como  $\frac{d^n y}{dx^n}$  que hace referencia a la derivada de orden  $n$  de la función  $y$ , con  $n \in \mathbb{N}$ . ¿Pero tenía sentido hacer extensible los valores de  $n$  al conjunto de los números racionales, irracionales, o complejos en dicha expresión?

La primera persona de la que se tiene certeza que se planteó este problema fue G.A.L'Hôpital, que el 30 de Septiembre de 1695 escribiría una carta a Leibniz argumentando una cuestión con respecto a la notación para la  $n$ -ésima derivada de la función:

*¿Qué sucedería si  $n$  fuera  $\frac{1}{2}$ ?*

a lo que Leibniz replicó:

*... esto conduciría a una paradoja, de la que algún día se extraerán consecuencias útiles.*

En 1697, el mismo Leibniz, hacía referencia al producto infinito de Wallis para  $\pi$ <sup>1</sup> afirmando que podría haber hecho uso del Cálculo Diferencial para obtener el mismo resultado, utilizando la notación  $d^{\frac{1}{2}}$  para expresar una derivada de orden  $\frac{1}{2}$ .

En 1730, L.Euler hizo referencia a interpolaciones entre órdenes enteros de una derivada. En 1812, P.S.Laplace definió una derivada fraccional, pero la primera discusión de una derivada de este tipo apareció en 1819 en dos páginas de las 700 que constituyen el texto de Cálculo de S.F.Lacroix, quien aparentemente consideró este tema como un mero ejercicio matemático.

Lacroix partió de  $y = x^m$  con  $m \in \mathbb{N}^+$ , y calculó la  $n$ -ésima derivada:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}$$

usando  $\Gamma$ <sup>2</sup>, el símbolo de Legendre para factorial generalizado (función gamma), obteniendo:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}$$

y reemplazando  $n$  por  $\frac{1}{2}$ , y  $m$  por cualquier real positivo  $a$ , de la manera tradicional en la que los formalistas clásicos de este periodo lo hacían, Lacroix obtuvo:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} y}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+\frac{1}{2})} x^{a-\frac{1}{2}}$$

que expresa la  $\frac{1}{2}$  derivada de  $y = x^a$ . También expresó este último resultado para  $y = x$ :

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} y}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{\frac{1}{2}} = \frac{1! x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}}$$

En 1822, J.B.J.Fourier sería el siguiente en hacer mención a las derivadas fraccionales, pero de la misma forma que hicieron anteriormente Euler, Laplace y Lacroix, no aportó ninguna aplicación.

La primera aplicación surgió de la mano del matemático Niels Henrik Abel, en 1823, cuando aplicó el Cálculo Fraccional en la solución de una integral

<sup>1</sup>En 1655 el matemático inglés John Wallis expresaba  $\pi$  como un producto infinito denominado actualmente Producto de Wallis:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)(2n)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots$$

<sup>2</sup>A.M.Legrende ideó la notación de la Función Gamma, denotada como  $\Gamma(z)$ , como extensión del concepto de factorial para los números complejos. Si la parte real del número complejo  $z$  es positiva, entonces la integral

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

converge absolutamente, esta integral puede ser extendida a todo el plano complejo, exceptuando a los enteros negativos y al cero. Si  $n$  es un entero positivo, entonces

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

lo que nos muestra una relación de esta función con el factorial. De hecho, la función Gamma generaliza el factorial para cualquier valor complejo de  $n$ .

que surgió en la formulación del problema de la tautócrona. Este problema llamado a veces el problema de la isocrona, consiste en encontrar la forma de la curva sobre un plano vertical, de tal forma que un objeto, al deslizarse por ella sin rozamiento alguno, llegue al final de su recorrido en un tiempo que es independiente del lugar en que comience el movimiento, es decir dos objetos situados en la curva, uno situado a más altura que el otro, recorren la curva en el mismo tiempo.

A buen seguro, la “elegancia” de la solución de Abel para este problema, llamó la atención de J.Lioville, a quien probablemente le debemos históricamente la primera definición formal lógica del concepto de derivada fraccional, desarrollado en la publicación de sus tres largas memorias en 1832 y alguna más en 1855.

El punto de partida de Lioville fue un resultado conocido para derivadas de orden entero positivo, que extendió en forma natural para órdenes arbitrarios:

$$\frac{d^m}{dx^m} e^{ax} = a^m e^{ax}$$

haciéndola extensible para  $\nu > 0$ :

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu} e^{ax} = a^\nu e^{ax}$$

desarrolló  $f(x)$  como expresión de la serie:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x}$$

y manejó la  $\nu$ -ésima derivada de  $f(x)$  como:

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^\nu e^{a_n x}$$

conocida esta última expresión como *Primera definición de Lioville*.

Esta *Primera definición de Lioville* tiene la principal desventaja de que  $\nu$  está restringida por la convergencia de la serie.

Lioville, en su búsqueda por definir una derivada fraccional, hizo uso de un segundo método aplicado a funciones de la forma  $x^{-a}$  con  $a > 0$ , del siguiente modo:

$$\int_0^{\infty} u^{a-1} e^{-xu} du$$

aplicó en cambio  $xu = t$  obteniendo

$$\int_0^{\infty} u^{a-1} e^{-xu} du = \frac{1}{x^a} \int_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt = \frac{\Gamma(a)}{x^a}$$

de donde

$$x^{-a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} u^{a-1} e^{-xu} du$$

y tomando la  $\nu$ -ésima derivada en ambos miembros de la anterior igualdad

$$\begin{aligned}\frac{d^\nu}{dx^\nu} x^{-a} &= \frac{d^\nu}{dx^\nu} \left( \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty u^{a-1} e^{-xu} du \right) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty u^{a-1} \frac{d^\nu}{dx^\nu} (e^{-xu}) du = \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty u^{a-1} (-1)^\nu u^\nu e^{-xu} du = \frac{(-1)^\nu}{\Gamma(a)} \int_0^\infty u^{a+\nu-1} e^{-xu} du = \\ &= \frac{(-1)^\nu \Gamma(a+\nu)}{\Gamma(a) x^{a+\nu}}\end{aligned}$$

que le llevó a la siguiente expresión

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu} x^{-a} = \frac{(-1)^\nu \Gamma(a+\nu)}{\Gamma(a)} x^{-a-\nu}$$

conocido como la *Segunda definición de Liouville*.

El término  $(-1)^\nu$  de esta segunda definición, sugiere la necesidad de incluir número complejos, y de hecho Liouville consideró estos valores, aplicando con éxito el Cálculo Fraccional en problemas de Teoría del Potencial, e incluso trató de resolver ecuaciones diferenciales mediante el uso de esta herramienta.

Entre 1835 y 1850 algunos investigadores como G.Peacock, tomando partido por Lacroix, o P.Kelland, tomando partido por Liouville, fundamentaron ciertas controversias respecto a las definiciones de derivada fraccional argumentadas de forma independiente por uno y otro, sin embargo otros como A.Morgan consideraron que ni una ni otra corriente tenían por que entrar en conflicto, ya que ambas formas de definir las derivadas fraccionales podían ser parte de una más general.

En 1850, W.Center observó que la discrepancia entre ambas corrientes se centraba fundamentalmente en el concepto de derivada fraccional de una constante. De acuerdo con la versión de Peacock-Lacroix, la derivada fraccional de una constante da un resultado distinto de cero, a menos que la constante sea precisamente cero, mientras que en la versión de Kelland-Liouville, la derivada fraccional de una constante da como resultado cero, puesto que  $\Gamma(0) = \infty$ , y por lo tanto  $\frac{1}{\Gamma(0)}$  puede considerarse cero. Center encontró la derivada fraccional de la unidad de orden  $\frac{1}{2}$ , así:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x^0 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{1}{2})} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}$$

Pero Center no coincidía con Liouville en su segunda definición, citándole textualmente

*La pregunta se reduce a que es  $\frac{d^\nu x^0}{dx^\nu}$ . Para cuando esto sea determinado nosotros determinaremos al mismo tiempo cual es el sistema correcto.*

En 1847, durante sus días de estudiante, B.Riemann desarrolló una teoría de operaciones fraccionales, que fue publicada tras su muerte en 1876. Riemann

usó una generalización de una serie de Taylor para deducir su fórmula para integración de orden arbitrario

$$\frac{d^{-\nu}}{dx^{-\nu}}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt + \psi(x)$$

expresión esta última sobre la que A.Cayley comentó en 1880 que la función complementaria  $\psi(x)$  es de naturaleza indeterminada pues contiene una infinidad de constantes arbitrarias.

En 1869 N.Ya.Sonin trabajó inicialmente en la definición llamada Riemann-Liouville, en un escrito llamado *“En la diferenciación con índice arbitrario”*, empezando con la fórmula integral de Cauchy. Letnikov escribió cuatro escritos referentes al tema los cuales tituló *“Una explicación de los principales conceptos de la teoría de diferenciación de índices arbitrarios”* en los cuales dió una extensión de los escritos de Sonin. la  $n$ -ésima derivada de la fórmula integral de Cauchy está dada por

$$D^n f(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

No se plantea conflicto alguno generalizando  $n!$  a valores arbitrarios desde  $\nu! = \Gamma(\nu + 1)$ , pero si para cuando  $n$  no es entero, aunque esto hecho no fue incluido en el trabajo de Sonin y Letnikov.

Los matemáticos de la primera mitad del siglo XIX no pudieron precisar una definición apropiada al no analizar en el plano complejo las consecuencias de sus definiciones.

## 2. Primera definición formal

Fue el matemático H.Laurent quien en 1884 publicó sus escritos de la teoría de generalización de operadores de logro contribuyendo de manera clara en el cálculo de derivadas de orden arbitrario. Su teoría, analizada en el plano complejo, fue la primera en ser aceptable para el gusto de los matemáticos modernos.

De acuerdo con la notación utilizada en 1936 por el matemático H.T.Davis en una publicación,

$${}_c D_x^{-\nu} f(x), \quad \nu \geq 0$$

denota la integral de orden  $\nu$  de la función  $f(x)$  a lo largo del eje real, y  $c$  y  $x$  son límites de integración.

$${}_c D_x^{\nu} f(x), \quad \nu \geq 0$$

significa diferenciación de orden  $\nu$  para  $f(x)$ .

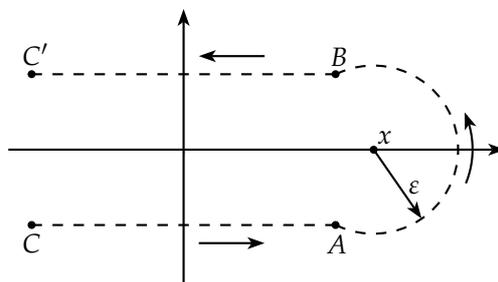
En términos de la notación anterior, los matemáticos necesitaban encontrar una definición apropiada de orden arbitrario y obtener una teoría manipulable, que consistía en que para toda función  $f(z)$  de variable compleja de una clase suficientemente amplia y a cualquier número  $\nu$ , irracional, fraccional o complejo, la función  ${}_c D_z^{\nu} f(z) = g(z)$  debería definirse de modo que satisficiera lo siguiente:

1. Si  $f(z)$  es analítica, la derivada  ${}_c D_z^\nu f(z)$  es analítica en  $\nu$  y  $z$ .
2. La operación  ${}_c D_x^\nu f(x)$  produce el mismo resultado que la diferenciación ordinaria cuando  $\nu$  es entero positivo.  
Si  $\nu = -n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  ${}_c D_x^{-n} f(x)$  produce el mismo resultado que integrar ordinariamente  $n$  veces la función  $f(x)$  y  ${}_c D_x^{-n} f(x)$  debe anularse con sus  $n - 1$  derivadas en  $x = c$ .
3. La operación de orden cero no altera la función  ${}_c D_x^0 f(x) = f(x)$ .
4. Los operadores fraccionales deber ser lineales.
5. La ley de índices debe cumplirse  ${}_c D_x^{-u} {}_c D_x^{-v} f(x) = {}_c D_x^{-u-v} f(x)$ .

Como se mencionó anteriormente, H.Laurent obtuvo la primera definición que satisfizo estas propiedades. Publicó un artículo en 1884 considerado como definitivo para los fundamentos del Cálculo Fraccional. Para ello partió de la fórmula de Cauchy para funciones complejas analíticas:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

donde  $\mathcal{C}$  representa el contorno de integración en el plano complejo, ahora denominado *Lazo de Laurent*, que se muestra en la siguiente figura:



La generalización de  $n!$  no presenta problemas ya que  $\nu! = \Gamma(\nu + 1)$ ; además expresando la integral en forma exponencial y haciendo los cambios  $\zeta = t$  y  $z = x$ , se obtiene:

$$f^{(\nu)}(x) = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} e^{(-\nu-1)\ln(t-x)} f(t) dt$$

en la parte  $AB$  del lazo tenemos que  $t = x + \varepsilon e^{i\theta}$ , de donde

$$\begin{aligned} \int_A^B e^{(-\nu-1)\ln(t-x)} f(t) dt &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{(-\nu-1)\ln(\varepsilon e^{i\theta})} f(x + \varepsilon e^{i\theta}) \varepsilon i e^{i\theta} d\theta = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{\ln(\varepsilon e^{i\theta})^{(-\nu-1)}} \varepsilon i e^{i\theta} f(x + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (\varepsilon e^{i\theta})^{(-\nu-1)} \varepsilon i e^{i\theta} f(x + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta = \end{aligned}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^{-\nu} e^{i\theta} e^{-i\nu\theta} i f(x + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta$$

Si consideramos  $\nu < 0$ , entonces la integral anterior converge cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . En la parte  $CA$  del lazo,  $\ln(\zeta - x) = \ln(x - t) - i\pi$  y en la parte  $BC'$  del mismo,  $\ln(\zeta - x) = \ln(x - t) + i\pi$ , de donde

$$\int_C e^{(-\nu-1)\ln(\zeta-x)} f(\zeta) d\zeta = \int_C^A e^{(-\nu-1)(\ln(x-t)-i\pi)} f(t) dt$$

Al tomar  $\nu < 0$ , y límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la integral en la parte  $AB$  del lazo se anula y obviamente  $A \rightarrow x$ ,  $B \rightarrow x$  y  $C \rightarrow C'$ , por lo que

$$\begin{aligned} f^{(\nu)}(x) &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i} \left[ e^{(\nu+1)i\pi} \int_{C'}^x (x-t)^{-\nu-1} f(t) dt - e^{-(\nu+1)i\pi} \int_{C'}^x (x-t)^{-\nu-1} f(t) dt \right] = \\ &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\pi} \left[ \frac{e^{i\pi(\nu+1)} - e^{-i\pi(\nu+1)}}{2i} \right] \int_{C'}^x (x-t)^{-\nu-1} f(t) dt = \\ &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\pi} \operatorname{sen}(\nu+1)\pi \int_{C'}^x (x-t)^{-\nu-1} f(t) dt = \\ &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\pi} (-\operatorname{sen} \pi\nu) \int_{C'}^x (x-t)^{-\nu-1} f(t) dt \end{aligned}$$

De acuerdo con la fórmula de reflexión de la función  $\Gamma$ ,

$$\operatorname{sen}(\pi\nu) = \frac{\pi}{\Gamma(-\nu)\Gamma(\nu+1)}$$

lo que nos lleva a

$$\begin{aligned} f^{(\nu)}(x) &= \frac{\Gamma(\nu+1)\pi}{\pi\Gamma(-\nu)\Gamma(\nu+1)} \int_{C'}^x (x-t)^{-\nu-1} f(t) dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_{C'}^x (x-t)^{-\nu-1} f(t) dt \end{aligned}$$

Por último, realizando el cambio de notación para emplear  $\nu > 0$  en lugar de  $\nu < 0$ , obtenemos la definición de integración de orden arbitrario obtenida por Laurent, que con la notación establecida por H.T.Davis resulta

$${}_c D_x^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_C^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt$$

Esta última expresión se denomina también como *Fórmula de Riemann-Liouville* ya que si  $C = 0$  o  $C = -\infty$ , obtenemos las expresiones definidas por Riemann y Liouville respectivamente, aunque para el caso de Riemann esta última expresión no considera la función complementaria  $\psi(x)$  que este consideró en su expresión.

Esta fórmula de Riemann-Liouville para integración fraccional, no se puede utilizar directamente para diferenciación de orden arbitrario, aunque mediante un pequeño cambio se puede encontrar una expresión adecuada.

Sea  $\nu = m - p$ , con  $m$  el mínimo entero mayor o igual que  $\nu$  y  $0 \leq p < 1$ ; entonces para la diferenciación de orden arbitrario:

$$\begin{aligned} {}_c D_x^{-\nu} f(x) &= {}_c D_x^{m-p} f(x) = {}_c D_x^m {}_c D_x^{-p} f(x) = \frac{d^m}{dx^m} [{}_c D_x^{-p} f(x)] = \\ &= \frac{d^m}{dx^m} \left[ \frac{1}{\Gamma(p)} \int_C^x (x-t)^{p-1} f(t) dt \right] \end{aligned}$$

donde el supuesto  ${}_c D_x^{m-p} = {}_c D_x^m {}_c D_x^{-p}$  se puede justificar de la manera descrita a continuación.

Sea

$$\phi(\nu, x) = {}_0 D_x^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt$$

es convergente para  $\nu > 0$

$$\psi(\nu, x) = {}_0 D_x^m {}_0 D_x^{-p} f(x)$$

donde  $-\nu = m - p$  con  $m=0,1,2,\dots$

Cuando  $\nu > 0$  se puede escoger  $m = 0$ , entonces  $\nu = p$ ,  $\phi(\nu, x) = \psi(\nu, x)$  y se puede deducir:

$$\phi(\nu, x) = \frac{d}{dx} \int_0^x \left[ \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x,t)^{\nu-1} f(t) dt \right] dx$$

y haciendo uso de la fórmula de Dirichlet

$$\phi(\nu, x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \int_0^x (x-t)^\nu f(t) dt$$

que es convergente para  $\nu > -1$ , y resulta que para  $m = 1$ , entonces

$$\phi(\nu, x) = \psi(\nu, x)$$

y este proceso continúa hasta que  $\phi(\nu, x) = \psi(\nu, x)$  para  $m = n$  y  $\nu > -n$ , donde  $n \in \mathbb{N}$ .

Luego  $\phi$  es analítica en  $R_1$  donde  $\nu > 0$  y  $\psi$  es analítica en  $R_2$  para  $\nu > -n$ ; como  $\phi = \psi$  en  $R_1 \cap R_2$  con un punto límite en el semiplano derecho, entonces  $\psi$  es continuación analítica de  $\phi$ ; esto se justifica al expresar

$${}_c D_x^m {}_c D_x^{-p} = {}_c D_x^{m-p}$$

### 3. Aplicaciones en el siglo XX

Con la llegada del siglo XX y los desarrollos del análisis matemático y de la teoría de funciones, surgieron nuevas formas íntegro-diferenciales fraccionarias.

En 1917, H.Weyl definió una integral fraccionaria adecuada a funciones periódicas:

$${}_xW_\infty^{-p}f(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_x^\infty (t-x)^{p-1}f(t) dt, \text{ con } \text{Re}(p) > 0$$

En 1936, M.Riesz consideró la integral fraccionaria de múltiples variables como un operador de tipo potencial. Uno de estos potenciales ha sido formalmente definido como la potencia  $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$  del Laplaciano.

Por otro lado, el académico español D.Maravall con una serie de publicaciones que aparecieron a partir del año 1959, muchas acerca de la ingeniería de las oscilaciones, fue el primero en España en mencionar unas particulares oscilaciones fraccionarias asociadas a ecuaciones diferenciales no enteras.

En 1967, el físico matemático Michele Caputo dió una nueva definición de derivada fraccionaria que permitía interpretar físicamente las condiciones iniciales de los cada vez más numerosos problemas aplicados que se estaban estudiando.

En el año 1974, tuvo lugar en Connecticut la primera conferencia internacional sobre el Cálculo Fraccionario, que sirvió de estímulo a numerosas publicaciones. La segunda conferencia tuvo lugar en 1984 en Escocia, y la tercera en 1989 en Tokyo.

Actualmente es difícil encontrar un ámbito de la ciencia o de la ingeniería que no considere conceptos del Cálculo Fraccionario, y cada año tienen lugar varios acontecimientos que lo ponen de manifiesto.

Desde el punto de vista de la matemática, es fascinante ver como el campo de las generalizaciones "fraccionarias" es lugar de encuentro de varias disciplinas, entre otras, la teoría de las probabilidades y los procesos estocásticos, las ecuaciones integro-diferenciales, la teoría de las transformadas, las funciones especiales y el análisis numérico.

De relevante importancia son las aplicaciones físicas en la teoría de la viscoelasticidad, en el estudio del fenómeno de la difusión anómala y en la teoría electromagnética; pero podemos anticipar que también se va despertando un interés cada vez mayor en otros ámbitos muy distintos como, por ejemplo, el de la teoría de circuitos, de la biología o de la física de la atmósfera. Asimismo, entre los economistas se va consolidando el empleo de conceptos de Cálculo Fraccionario. Ya en 1996, en el *Journal of Econometrics* apareció un número especial en el que se recogía una serie de artículos sobre el tema denominado "Fractional Differencing and Long Memory Processes".

Entre las variadas cuestiones abiertas sobre el Cálculo Fraccionario, ocupa un lugar prominente la de determinar si es posible encontrar una interpretación geométrica para la derivada fraccionaria. Una posible solución a este problema ha sido propuesta por I. Podlubny en un reciente artículo titulado "Geometric and Physical Interpretation of Fractional Integration and Differentiation" en el que la interpretación física de estos operadores fraccionarios está basada en el empleo de dos tipos de tiempos, un tiempo cósmico y un tiempo individual, y viene estrechamente relacionada con la teoría de la relatividad.

## Referencias

- [1] LOVERRO, Adam. *Fractional Calculus: History, Definitions and Applications for the Engineer*, Departamento de Ingeniería Aeroespacial y Mecánica, Universidad de Notre Dame, EE.UU, 2004.
- [2] PIERANTOZZI, Teresa. *Estudio de Generalizaciones Fraccionarias de las Ecuaciones Estándar de Difusión y de Ondas*, Departamento de Matemática Aplicada, UCM, Madrid, 2006.
- [3] RODRÍGUEZ PERDOMO, Diego Felipe. *Cálculo Fraccional: Un enfoque a la Teoría de Riemann-Liouville*, Fundación Universitaria Konrad Lorenz, Colombia, 2008.
- [4] VALENCIA ARVIZU, Luis Feliciano. *Una Teoría de Integración Fraccional para Funciones Generalizadas*, Tesis Licenciatura Matemáticas Escuela de Altos Estudios. Universidad de Sonora, México, 1981.
- [5] WIKIPEDIA,  
*Cálculo Fraccional*, [http://es.wikipedia.org/wiki/Cálculo\\_fraccional](http://es.wikipedia.org/wiki/Cálculo_fraccional)  
*John Wallis*, [http://es.wikipedia.org/wiki/John\\_Wallis](http://es.wikipedia.org/wiki/John_Wallis)  
*Producto de Wallis*, [http://es.wikipedia.org/wiki/Producto\\_de\\_wallis](http://es.wikipedia.org/wiki/Producto_de_wallis)  
*Función Gamma*, [http://es.wikipedia.org/wiki/Función\\_gamma](http://es.wikipedia.org/wiki/Función_gamma)

Esta obra está registrada

