Brianchón y su Teorema

José Manuel Sánchez Muñoz

3 de mayo de 2011

Resumen

Este artículo versa sobre las investigaciones de un joven Charles Julien Brianchón cuando sólo contaba con 21 años y estaba aún en su época de estudiante del École Polytechnique de París. Estos resultados sirvieron para poner de manifiesto uno de los pilares fundamentales de la cada vez más importante Geometría Proyectiva, el Principio de Dualidad y su relación con el Teorema de Pascal sobre cónicas demostrado 167 años antes.

1. Charles Julien Brianchón (1785-1864)

Charles Julien Brianchón nació en Sévres, una pequeña localidad cercana a París, el 19 de Diciembre de 1785[1]. Desgraciadamente no tenemos constancia ni registro alguno de su vida hasta que en 1804 entra al École Polytechnique con la edad de 18 años.

En el École Polytechnique de París, Brianchón estudió bajo la supervisión de una de las figuras fundamentales de la geometría de su tiempo como fue Garpard Monge.

Brianchón se graduó en 1808 como el primero de su promoción. Lo más lógico y lo que se esperaba de él es que hubiera continuado con su carrera académica, pero Francia vivía para entonces momentos revueltos con contínuos cambios políticos y sociales. Napoleón Bonaparte se había autoproclamado Emperador del Imperio en 1804, y mantenía el control de prácticamente toda la Europa continental con la única oposición en su contra de los ingleses, ya que sin el control naval no pudo organizar una invasión. Los Británicos bajo el mando de Nelson vencieron en la batalla decisiva de Trafalgar, donde la flota Franco-Hispánica sufrió un duro revés y quedó prácticamente destruida. Napoleón entonces intentó forzar la estrategia del bloqueo de las Islas, paralizando todas las relaciones comerciales con las mismas. Sin embargo, Portugal no

[1] Parece que hay disparidad en esta fecha dependiendo de la fuente. Hay autores que consideran 1783 como la correcta.

era partidario de seguir esta estrategia, ya fuera por motivos económicos o políticos, lo que provocó que Napoleón decidiera enviar a sus ejércitos a Portugal para forzarles a cambiar su actitud. Para estos momentos Brianchón acababa de graduarse en el École Polytechnique y se convirtió en teniente de artillería del ejército de Napoleón.

Aunque España había autorizado a los ejércitos de Napoleón a cruzar el país, su afán anexionista le hizo tomar la decisión de romper su acuerdo invadiendo completamente la Península, ocupando Lisboa, e intentando instalar a su hermano José Bonaparte, rey de Nápoles, como rey de España, por lo que ésta se alzó en armas contra esta ocupación. Se dice que Brianchón luchó de forma brava tanto en la campaña de Portugal como la de España, pero se encontraba en el bando perdedor y las fuerzas de Napoleón sufrieron ambas derrotas. Brianchón no sólo se destacó por su braveza como soldado, sino por su eficiencia resultando ser uno de los más capacitados.

Brianchón se mantuvo en las tropas de Napoleón durante los siguientes años, pero a pesar de su prometedora carrera militar, la dura vida en el ejército afectó a su salud. En 1813, cuando Francia tenía multitud de frentes abiertos, presentó una solicitud para abandonar el servicio por motivos de salud y poder asumir un puesto de profesor. Tuvo que esperar cinco largos años para poder conseguir su objetivo, pero finalmente en 1818 se convirtió en profesor de la Escuela de Artillería de la Guardia Real en Vincennes.

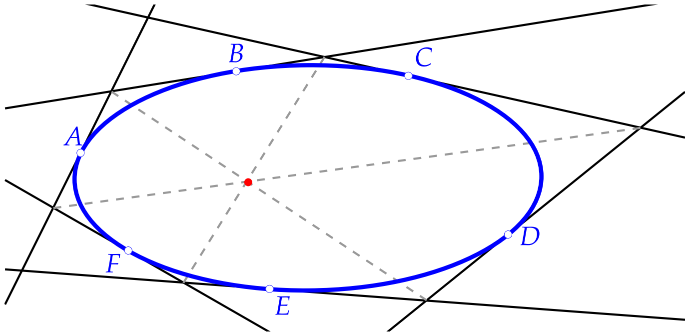
Entre 1816 y 1818 mientras intentaba convertirse en profesor, escribió una serie de trabajos centrados en la geometría. En ellos Brianchón demostró varios resultados importantes en el estudio proyectivo de las cónicas. Sin embargo, curiosamente, tras su nombramiento como profesor, abandonó poco a poco su labor investigativa, centrándose en otros intereses. Finalmente hacia 1823 se centró en su labor como profesor de Química. hasta 1825 publicó trabajos en ambas ramas, pero tras este año abandonó completamente su labor investigativa y editorial para centrarse única y exclusivamente en la docencia.

Poco más se puede resaltar de su persona, salvo que murió el 29 de Abril de 1864 en Versalles.

2. Sus Trabajos Matemáticos

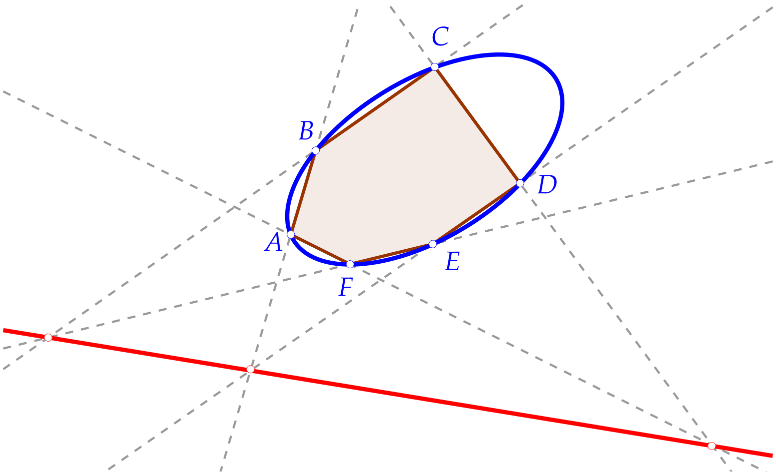
Su primera gran obra *"Sur les Surfaces Courbes du second degré"* es publicada en 1806, en el *Journal de l'École Polytechnique* cuando sólo era un estudiante de 21 años, y versa sobre las superficies curvas de segundo grado. En este estudio Brianchón "redescubre" las propiedades del Exavértice Mágico de Pascal, poniendo de manifiesto que:

> *"Dado un exalátero circunscrito a una cónica, es decir cuyos lados son tangentes a dicha cónica, las rectas que unen cada pareja de vértices opuestos se cortan en un punto."*



Teorema de Brianchón

Este resultado denominado "Teorema de Brianchón" puso de manifiesto uno de los resultados fundamentales de la Geometría Proyectiva que es el Principio de Dualidad, de tal modo que el "Teorema de Pascal"[2], demostrado 167 años antes en 1639, es el dual del de Brianchón.



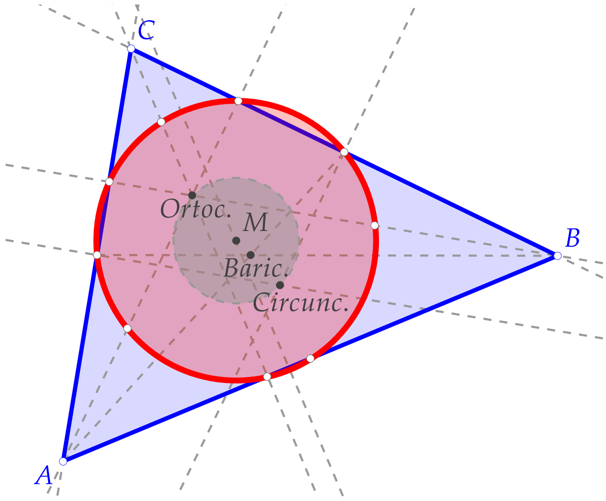
Teorema de Pascal

El trabajo que aquí se traduce sólo muestra la primera parte (de la página 297 a la 302), y resulta ser uno de los primeros en mostrar la importancia del Principio de Dualidad, y hacer uso de la Teoría de Polos y Polares para obtener nuevos resultados geométricos.

Brianchón publicó junto a Poncelet *"Recherches sur la détermination d'une hyperbole équilatère, au moyen de quatres conditions donnée"* en 1820, donde aparece una demostración del "Teorema de la Circunferencia de los Nueve Puntos"[3]. Aunque en realidad no fueran los primeros en descubrir este teorema, si que fueron los primeros en ofrecer una demostración apropiada del mismo y fueron ellos quienes usaron, por primera vez, el término de "Circunferencia de los nueve puntos".

[2] *"Dado un exavértice inscrito en una cónica, los puntos de intersección de cada pareja de lados opuestos definen una recta."*

[3] *"Sea un triángulo cualquiera. Los puntos definidos por los pies de sus alturas, los puntos medios de cada lado, y los puntos medios de los segmentos definidos por su ortocentro y sus vértices se encuentran sobre una circunferencia."*



Circunferencia de los Nueve puntos

3. El Teorema

Lema

Dada una recta AA' (Fig.A.) de longitud conocida, si sobre esta recta se considera un punto O arbitrario, que divida la recta en dos segmentos OA, OA', es siempre posible determinar sobre esta recta o sobre la recta prolongada un punto P que forme dos nuevos segmentos PA, PA' proporcionales a los dos primeros.

Es evidente que de los dos puntos O y P, uno estará situado sobre la recta AA', y el otro sobre la recta prolongada.

I

(Fig.1). Considérese en el espacio tres rectas arbitrarias AA', BB', CC', prolongadas si es necesario, que se encuentren en el mismo punto P[4].

$$\text{Llámese} \left\{ \begin{array}{c} L \\ l \\ M \\ m \\ N \\ n \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{al punto de} \\ \text{intersección de} \end{array} \left\{ \begin{array}{ccc} AB & \text{y} & A'B' \\ AB' & & A'B \\ AC & & A'C' \\ AC' & & A'C \\ BC & & B'C' \\ BC' & & B'C \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{prolongados} \\ \text{si es necesario.} \end{array}$$

[4]Como ejemplo tomar tres aristas AA', BB', CC', de una pirámide triangular truncada.

Es evidente que los tres puntos:

L, M, N

L, m, n

l, M, n

l, m, N

están situados en la recta intersección del plano que pasa por los tres puntos:

A, B, C

A, B, C'

A, B', C

A', B, C

con el plano que pasa por los tres puntos:

A', B', C'

A', B', C

A', B, C'

A, B', C'

Ahora se observa que tomando dos cualesquiera de estas cuatro rectas de intersección, estas tienen un punto en común. Por lo tanto cada una de ellas cortará a las otras tres, y consecuentemente están todas situadas en el mismo plano, que designaré como XY.

II

Este plano XY en el cual están situados los seis puntos L, M, N, l, m, n, tiene la propiedad de que divide a cada una de las tres rectas AA', BB', CC', prolongadas si es necesario, en dos segmentos proporcionales a aquellos que el punto P forma en estas rectas.

Esta propiedad se basa en la siguiente proposición, tomada de *Géometrie de position*, p.282[5].

> *"En cualquier cuadrilátero completo[6] tomando sus tres diagonales, cada una de estas diagonales son cortadas por las otras dos en segmentos proporcionales."*

[5]El libro al que hace referencia es de L.M.N. Carnot, Paris, 1803. Es significativo que, habiendo escrito este artículo tan sólo tres años después de este libro, Brianchón considerase que el libro era ya tan conocido que al citarlo, no estimara necesario dar el nombre del autor.

[6]Un cuadrilátero completo es la composición de cuatro rectas prolongadas hasta que se corten; y la recta que une el punto de intersección de dos de estas rectas al punto de intersección de las otras dos se denomina diagonal.

Mémoire sur les surfaces du 2.e Dégré.

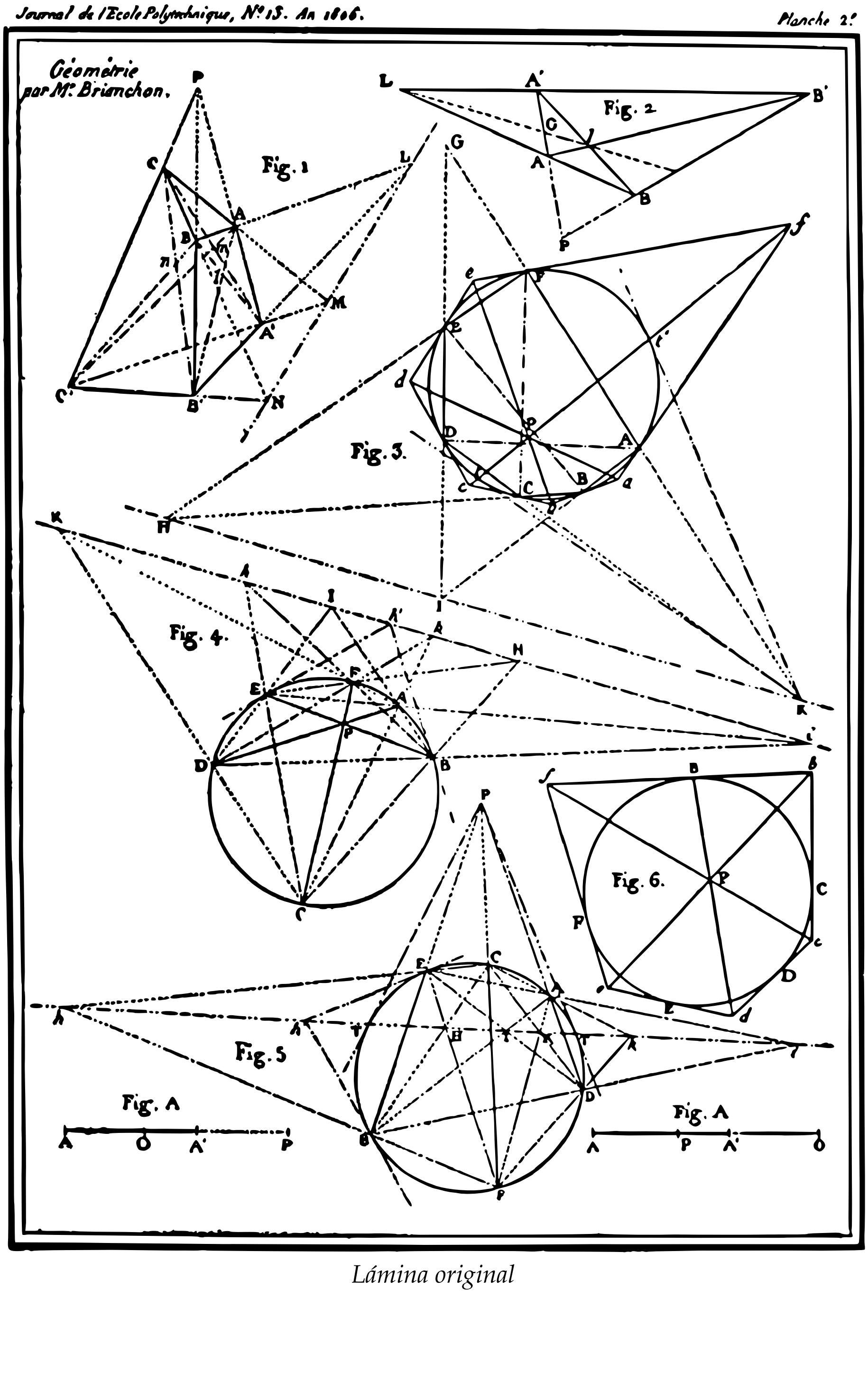


Lámina original

(Fig.2). Considérese, por ejemplo, qué sucede en el plano de las dos rectas AA', BB'; este plano se encuentra con el plano XY a lo largo de la recta Ll, y B, B' son los puntos de concurrencia de las caras opuestas del cuadrilátero $ALA'l$; por lo tanto las tres diagonales del cuadrilátero completo son BB', Ll, AA'.

Por lo tanto, de acuerdo al teorema anterior, cualquiera de las tres diagonales, digamos AA', es cortada por las otras dos, Ll y BB', en segmentos proporcionales OA, OA', PA, PA'; lo que nos dice, que estos cuatro segmentos satisfacen la relación

$$OA : OA' = PA : PA'$$

Imaginemos que proyectamos[7] sobre cualquier plano, el sistema de tres rectas AA', BB', CC', y todas las rectas de la construcción, y denotamos a la proyección de un punto con la letra invertida. De acuerdo a este convenio, ⅂ representa la proyección del punto L, y de igual forma lo haremos para el resto.

Esto supone que los seis puntos L, M, N, l, m, n, que se encuentran sobre la misma recta, tendrán sus proyecciones también sobre la misma recta, por lo que los seis puntos ⅂, W, N, l, ɯ, u, estarán dispuestos sobre cuatro rectas, de la misma manera que están dispuestos, en el espacio, los puntos de los que son proyección.

III

Se deduce de lo anterior que cuando las tres rectas AA', BB', CC' están dispuestas en el mismo plano, los seis puntos L, M, N, l, m, n, se encuentran dispuestos sobre este plano de tal forma que cuando son tomados de tres en tres en el orden indicado (I), cada uno de estos grupos de tres puntos pertenece a la misma recta.

IV

Debería suceder que tres de los seis puntos ⅂, W, N, l, ɯ, u, (por ejemplo l, ɯ, u, los cuales, en general, no se encuentran sobre una recta, ya que si lo hicieran, esto indicaría que el plano de proyección es perpendicular al plano XY, y se concluiría que los seis puntos se encuentran sobre la misma recta, y entonces (II) esta última recta cortaría a cada una de las tres rectas AA', BB', CC', prolongadas si es necesario, en dos segmentos proporcionales a aquellos que forman el punto P sobre las mismas rectas.

V

Uno puede, con la ayuda de las consideraciones anteriores, demostrar varias propiedades notables que pertenecen a las curvas de segundo grado. Con la intención de conseguirlo, recordaremos la siguiente proposición:

> (Fig. 3). *"En cualquier hexágono ($ABCDEF$) inscrito en una sección cónica, los tres puntos de intersección (H, I, K) de lados opuestos se encuentran siempre sobre una recta."*

[7] Se entiende que "ortogonalmente".

O de forma más general:

> *"Si sobre el perímetro de cualquier sección cónica se consideran seis puntos arbitrarios A, B, C, D, E, F, y si las rectas AB, AF se prolongan lo necesario hasta que se encuentren a las rectas DE, DC, en I, y K respectivamente, las tres rectas IK, BC, FE se cortan en el mismo punto."*(*Geómetrie de position*, p.452.)

VI

(Figs. 4 y 5). De nuevo sean tres rectas AD, BE, CF, inscritas en una curva de segundo grado de tal forma que concurren o se cortan unas a otras en el mismo punto P, si desarrollamos la construcción indicada en la figura, vemos, de acuerdo con el último teorema, que los puntos H, I, K se sitúan sobre una recta; ahora esto no sucede cuando las tres rectas AD, BE, CF, estando sujetas a cortarse unas a otras en el mismo punto P, no tienen relación entre ellas: por lo tanto (IV) los seis puntos H, I, K, h, i, k están todos sobre la misma recta que divide a cada una de las tres cuerdas AD, BE, CF, prolongadas si es necesario, en dos segmentos proporcionales a aquellos que el punto P forma en las mismas cuerdas.

VII

Supóngase ahora que una de estas tres cuerdas, por ejemplo CF, cambia de longitud, pero de un modo tal que mantiene al punto P en su dirección; los dos puntos I, i se mantendrán fijos, y los cuatro restantes H, h, K, k estarán aún situados en una recta indefinida Ii. Por lo tanto cuando la cuerda variable CF coincida con otra, digamos BE, de las que se mantienen fijas, las rectas BF, CE serán tangentes a la curva y tendrán sus puntos de intersección h' situados sobre Ii.

VIII

Cuando el punto P esté fuera del área de la sección cónica, hay un instante cuando los dos extremos de la cuerda movible se unan en un punto T, situados en el perímetro de la curva y sobre la línea Ii.

IX

(Fig. 3). Sea $abcdef$ un hexágono arbitrario circunscrito en una sección cónica, y B, C, D, E, F, A, los puntos de contacto respectivamente de los lados ab, bc, cd, de, ef, fa:

1º. Los puntos de intersección H, I, K de los lados opuestos del hexágono inscrito $ABCDEF$, son tres puntos situados sobre la misma recta (V);

2º. Si dibujamos la diagonal que se encuentra a la curva en los dos puntos t, t', las rectas KT, Kt', serán tangentes a t, t' respectivamente (VIII) e igualmente para las otras diagonales.

3º. Si desde cualquier punto K de la recta HIK se trazan las dos tangentes Kt, Kt' a la sección cónica, la cuerda tt', que une los dos puntos de contacto, pasa constantemente por el mismo punto P. (VIII).

Por lo tanto las tres diagonales fc, be, ad se cortan unas a otras en el mismo punto P, es decir:

> *"En cualquier hexágono circunscrito sobre una sección cónica, las tres diagonales se cortan unas a otras en el mismo punto."*

Este último teorema surge con consecuencias curiosas; aquí se tiene un ejemplo.

X

(Fig. 6.) Supóngase que dos de los seis puntos de contacto, digamos A y B se unan en un único punto B, el vértice a también coincidirá con B, y la figura se reducirá a un pentágono circunscrito $bcdef$; entonces aplicando el teorema precedente a este caso especial, vemos que las tres rectas fc, be, db deben cortarse unas a otras en el mismo punto P, es decir:

> *"Si en un pentágono arbitrario ($bcdef$), circunscrito en una curva de segundo grado, si trazamos las diagonales (be, cf), tal que no sean trazadas desde el mismo ángulo, estas se encuentran en un punto (P) sobre la recta (db) que se une al quinto ángulo (d) a el punto de contacto (B) del lado opuesto."*

Esta proposición da de una vez la solución al siguiente problema...Determinar los puntos donde cinco rectas conocidas son tangentes a una curva de segundo grado...Estos puntos una vez encontrados, nos permiten obtener todos los otros puntos de la curva mediante una construcción muy sencilla, lo que no requiere, tal como al inicio, ningún instrumento más salvo una regla (VI).

Construida la sección cónica, podríamos proponernos trazar sobre ella una tangente a través de un punto tomado fuera o sobre el perímetro de la curva. La construcción se desarrolla del mismo modo que las dos precedentes, sin la intervención de ningún compás, e incluso, sin ser necesario conocer el trazado de la curva (VII), (VIII).

Referencias

[1] AYRES, Frank. *Teoría y Problemas de Geometría Proyectiva*, pp. 102–109, McGraw-Hill, México, 1971.

[2] GODFREY, Charles, y SIDDONS, A. W. *Modern Geometry*, pp. 136–148, Cambridge University Press, London, 1912.

[3] Méndez Valentín, Luis; Martínez Simón, José Manuel; González Gámez, Francisco; Gordo Murillo, Carlos y Martínez Marín, Rubén. *Geometría Proyectiva. Tomo I. Formas Geométricas Fundamentales*, Colección Escuelas. Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, pp. 147–155, 1ª ed, Madrid, 1995.

[4] O'Connor, John J., y Robertson, Edmund F. *Charles Julien Brianchon Biography*, The MacTutor History of Mathematics Archive, Universidad de St. Andrews, Escocia. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Brianchon.html

[5] Smith, David Eugene. *A Source Book in Mathematics*, pp. 331–336, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1929.

[6] Tabak, John. *Geometry. The language of the Space and Form*, pp. 66–84, The History of Mathematics, Facts on File,Inc., New York, 2004.