

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

ESTRATEGIAS HEURÍSTICAS

DATOS

INICIO

CODIFICAR

ORGANIZAR

EXPERIMENTAR

ANALOGÍA

EXPLORAR

ELEMENTOS
AUXILIARES

SUBOBJETIVOS

REGULARIDADES

MARCHA ATRÁS

RESUMEN

AUTOEVALUACIÓN

BIBLIOGRAFÍA

DATOS

- **Título:** Resolución de problemas. Estrategias heurísticas
- **Autoras:** María Molero y Adela Salvador
- **Nivel educativo:** Secundaria, Bachillerato y Universidad
- **Descripción:** Se presentan algunas estrategias de resolución de problemas: Codificar, organizar, experimentar, analogía, explorar, introducir elementos auxiliares, dividir el problema en partes, buscar regularidades y suponer el problema resuelto. Para cada una, se elige un problema que se resuelve utilizando esa estrategia.

ÍNDICE

- ESTRATEGÍAS HEURÍSTICAS
- ALGUNAS ESTRATEGÍAS
- CODIFICAR.
- ORGANIZAR:
 - HACER UNA FIGURA
 - HACER UN ESQUEMA
- EXPERIMENTAR: ENSAYO Y ERROR
- ANALOGÍA
- EXPLORAR:
 - BUSCAR SIMETRÍAS
 - ANALIZAR CASOS LÍMITE
- INTRODUCIR ELEMENTOS AUXILIARES
- SUBOBJETIVOS
- BUSCAR REGULARIDADES
- SUPONER EL PROBLEMA RESUELTO
- AUTOEVALUACIÓN
- BIBLIOGRAFÍA

María Molero y Adela Salvador



ESTRATEGIAS HERÍSTICAS

- La resolución de problemas es específicamente distinta del aprendizaje de hechos, la creación de estructuras conceptuales y la adquisición de destrezas, algoritmos y valores. Sin embargo es una importante técnica metodológica para la formación de conceptos y para establecer relaciones entre ellos.
- Las estrategias heurísticas son reglas muy generales que consiguen transformar el problema en una situación más sencilla.
- Después de analizar las diferentes teorías y las distintas fases del proceso de resolución de problemas, así como los procesos generales que intervienen en el razonamiento matemático, ahora se trata de analizar las estrategias heurísticas que intervienen en la resolución de problemas.
- Las estrategias de resolución de problemas son, más que reglas, técnicas generales que nos ayudan a comprender el problema y favorecen el éxito en encontrar la solución.

ALGUNAS ESTRATEGÍAS

- Es difícil enumerar de forma exhaustiva las distintas estrategias que intervienen en la resolución de problemas, ya que cada una de ellas se puede subdividir en otras o por el contrario varias estrategias se pueden englobar en una más general.
- Encontrar un tipo de problema en el que sólo intervenga una de ellas es como mínimo artificioso, ya que lo normal es que en la resolución de un problema intervengan varias estrategias.
- Vamos a presentar algunas de las estrategias de resolución de problemas: **Codificar, organizar, experimentar, analogía, explorar, introducir elementos auxiliares, dividir el problema en partes, buscar regularidades y suponer el problema resuelto.** Para cada una, elegimos un problema que se resuelva, mediante esa estrategia. Aunque hay que tener en cuenta que la relación entre un problema y la estrategia utilizada para resolverlo no es unívoca y lo normal es que distintas estrategias resuelvan un mismo problema.

CODIFICAR. USAR UNA BUENA NOTACIÓN

- Muy a menudo la resolución de un problema depende de la utilización de un lenguaje o una notación adecuadas.
- La importancia de una buena de notación se pone de manifiesto si tratamos de operar con un sistema de numeración que no sea posicional, o por ejemplo con números romanos.
- Plantear una ecuación es traducir el lenguaje común al del los símbolos matemáticos.
- **Elegir una buena notación es un paso decisivo en el camino hacia la solución de un problema.**
- **Los símbolos que utilizamos deben recordarnos el objeto que representan.**
- **Además una buena notación debe ser clara, concisa y que no plantee ambigüedades.**



ORGANIZAR: HACER UNA FIGURA

- Una figura nos presta una gran ayuda para resolver un problema, ya que facilita la comprensión del mismo y hace surgir ideas que nos acercan a la solución.
- La importancia que tiene una figura en los problemas que se resuelven por métodos geométricos es evidente, sin embargo también hay muchos problemas algebraicos, en los que una figura nos permite llegar a la solución de forma más rápida y elegante.

HACER UNA FIGURA. EJEMPLO

■ "El depósito"

- *De un depósito lleno de agua se saca la tercera parte del contenido, después la mitad del resto y aún quedan 1.200 litros de agua ¿Que capacidad tiene el depósito?*

Aunque este problema se resuelve fácilmente operando con fracciones o planteando una ecuación resulta asombrosamente más fácil haciendo una figura que al dividirla en partes se obtiene la solución con una simple operación mental.

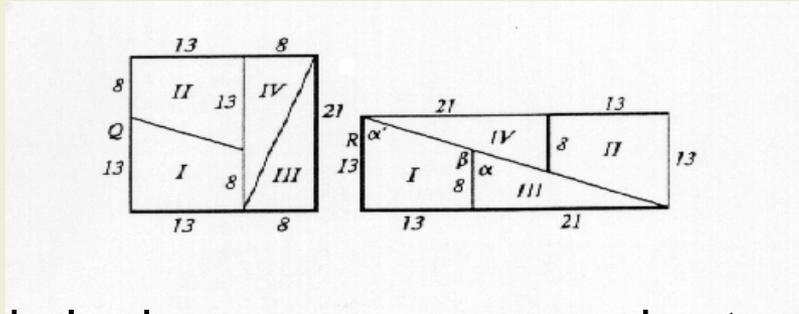


FIGURAS ERRÓNEAS

- Al utilizar figuras para resolver problemas tenemos el peligro de llegar a una solución falsa al razonar sobre ella, por lo que es conveniente tener en cuenta las siguientes consideraciones:
- Una figura inexacta puede sugerir una solución errónea.
- Una figura debe actuar como una representación de relaciones lógicas.
- Las figuras no deben incluir ninguna relación que no esté indicada en el enunciado del problema.

FIGURAS ERRÓNEAS. EJEMPLO

- *Un cuadrado de lado 21 cm tiene la misma área que un rectángulo de lados 34 cm y 13 cm.*



- El cuadrado lo descomponemos en dos trapezoides I y II de las dimensiones indicadas y en dos triángulos III y IV. Con los cuatro trozos componemos el rectángulo.
- Y sin embargo $21^2 = 441 \text{ cm}^2$ y $34 \times 13 = 442 \text{ cm}^2$. ¿De donde ha salido el centímetro cuadrado de más?

Ejemplo del libro "Errores en las demostraciones geométricas" donde también se demuestra que "todos los triángulos son isósceles" y que "un ángulo recto es igual a un obtuso"



ORGANIZAR: HACER UN ESQUEMA

- En los problemas en los que es necesario contar, es preciso disponer de métodos que nos aseguren que hemos contado todas las posibilidades y que no hemos repetido ninguna.
- En los problemas de Probabilidad y de Combinatoria es muy útil utilizar esta estrategia, de forma que aprender a resolver problemas de Probabilidad en la Enseñanza Secundaria Obligatoria se reduce en muchas ocasiones a saber utilizar una técnica que son los **diagramas en árbol**.
- **Es más seguro tener éxito al resolver un problema si adoptamos un método sistemático que analice toda la información del enunciado del problema de forma esquemática así como aquella que generamos a partir de los datos.**
- **Un esquema tiene la ventaja de permitir memorizar información, que en muchos casos no sería posible realizar sin su ayuda.**

HACER UN ESQUEMA. EJEMPLO 1

- *"Las tres ruletas"*
- *Disponemos de tres ruletas A, B y C cada una de ellas dividida en 32 sectores iguales con distintos puntos:
A: 7 sectores con la cifra 6 y 25 sectores con la cifra 3.
B: 16 sectores con la cifra 5 y 16 sectores con la cifra 2.
C: 25 sectores con la cifra 4 y 7 sectores con la cifra 1.
Dos jugadores seleccionan una ruleta cada uno. Gana quien obtenga mayor puntuación con su ruleta. ¿Quién tiene ventaja al elegir ruleta, el primero o el segundo?*
- *Este problema resulta muy difícil si no hacemos un esquema, un diagrama en árbol, para calcular probabilidades.*
- *Sin embargo esta estrategia no sólo se utiliza en problemas de Probabilidad y Combinatoria, como ejemplo se plantea el siguiente problema.*

HACER UN ESQUEMA. EJEMPLO 2

- *"Color del pelo"*
- *Tres amigos A, B, C, uno rubio, otro moreno y otro pelirrojo, están jugando a las cartas sentados en una mesa circular, cada uno pasa una carta al que está a su derecha. El señor B ha pasado una carta al rubio. El señor A ha pasado una carta al que ha pasado una carta al pelirrojo. ¿Cuál es el color del pelo de A, B y C?.*
- Al hacer un esquema y analizar las dos configuraciones que existen, se observa que una de ellas es inconsistente, ya que uno de los amigos es a la vez rubio y pelirrojo. La solución es la otra configuración, que es consistente con el enunciado.





EXPERIMENTAR: ENSAYO Y ERROR

- Consiste en llevar a cabo una operación sobre los datos, y probar si se ha conseguido el objetivo. Si no, repetir hasta conseguirlo o probar que es imposible.
- Hay varios tipos de ensayo y error:
- **Fortuito:** Es muy fácil de utilizar pero no resulta eficaz porque se van eligiendo casos de forma aleatoria.
- **Sistemático:** Es más eficiente que el anterior porque se va realizando la operación de forma ordenada.
- **Dirigido:** Consiste en elegir casos que estén cada vez más cerca del objetivo. Sin embargo aunque éste es el mejor método, hay que tener en cuenta casos particulares en los que para llegar a la solución hay que dar un pequeño rodeo.
- **La estrategia de ensayo y error se considera a veces ineficaz para la resolución de problemas, sin embargo existen casos en los que el ensayo y error dirigido es especialmente útil al limitar los elementos entre los que está la solución.**
- **Por otra parte cuando el número de casos es finito, si analizamos sistemáticamente todos los casos, podemos estar seguros de conseguir la solución**

ENSAYO Y ERROR. EJEMPLO 1

- *"El lobo la cabra y el repollo":*
- *Un hombre tiene que cruzar un río en una barca con un lobo una cabra y un repollo, en la que sólo puede ir él y una de las tres cosas, teniendo en cuenta que si no está el hombre delante, el lobo se come la cabra y la cabra se come el repollo ¿Cómo consigue transportarlos al otro lado del río?.*
- En la solución de este problema hay elementos que después de estar en la orilla meta tienen que volver a la inicial para conseguir la solución, luego es un ejemplo en el que hay que dar un rodeo para solucionar el problema.

ENSAYO Y ERROR. EJEMPLO 2

- *"Cien cuadrados"*
- *¿Cuál es el menor número de líneas rectas que tenemos que dibujar para tener exactamente 100 cuadrados?*
- Si se empieza de forma sistemática a contar los cuadrados que hay en una malla cuadrada $n \times n$, o por ejemplo recuerdas que en un tablero de ajedrez hay 204 cuadrados se puede adoptar el mismo método sistemático de contar cuadrados. La solución se obtiene por ensayo y error ya que está entre un cuadrado 6×6 en el que hay 91 cuadrados y uno 7×7 en el que hay 140.

ANALOGÍA

- La analogía ocupa todo nuestro pensamiento, desde los diálogos de la vida cotidiana, hasta las actividades artísticas y científicas.
- Consiste en una concordancia de relaciones entre los elementos de objetos semejantes.
- La analogía entra en juego, cuando te ves sorprendido por un parecido con algún problema estudiado anteriormente, por lo que es plausible sugerir conjeturas parecidas.
- Aunque a veces no nos damos cuenta, en la mayoría de los problemas que resolvemos utilizamos la analogía. Así, cuando nos encontramos con un problema de Álgebra lo primero que consideramos es plantear una ecuación; en un problema de Probabilidad o de Combinatoria realizar un diagrama en árbol o una tabla de contingencia; y ante un problema de Geometría dibujamos la figura intentando encontrar las relaciones lógicas que se establecen entre sus elementos.

Analogía

- Buscar problemas análogos es una estrategia muy útil cuando se tiene cierta experiencia en la resolución de problemas.
- Consiste en recordar otros problemas semejantes, en los que las relaciones entre sus elementos sean concordantes con las de nuestro problema
- Un problema similar al que hemos llamado "Vaya corte", expuesto anteriormente, es el siguiente:

ANALOGÍA. EJEMPLO.

■ "Una mesa de billar"

■ Se tiene una mesa rectangular en la que las dimensiones son números enteros a y b , por lo que se puede suponer dividida en cuadrados. Se lanza una bola desde uno de los vértices siguiendo las diagonales de los cuadrados y que rebota siguiendo una reflexión perfectamente elástica. ¿A qué esquina llegará?. ¿Cuántos rebotes habrá hecho?.

■ Suponiendo que a y b son primos entre sí. Los distintos rebotes de la bola se pueden representar como la diagonal de un cuadrado que tiene $a \times b$ cuadraditos en cada lado. El cuadrado está dividido en $a \times b$ rectángulos iguales de dimensiones a y b , cada uno de ellos simboliza la mesa. En el eje horizontal hay b rectángulos de lado a y en el vertical a rectángulos de lado b .. El número de rebotes de la bola coincide con el número de rectángulos a los que corta la diagonal del cuadrado de lado $a \times b$.

■ La conjetura que surge al analizar este planteamiento es **análoga** a la utilizada en el problema "Vaya corte".

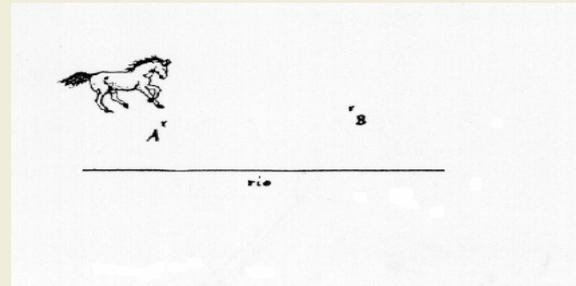
■ El caso general se deduce de forma evidente

EXPLORAR: BUSCAR SIMETRÍAS

- Son muchos los problemas y juegos matemáticos que se resuelven mediante la simetría expresada explícita o implícitamente.
- La simetría puede entenderse en su sentido geométrico, que es el más usual, y en su sentido lógico más amplio, así la expresión $xy+xz+yz$ es simétrica respecto a las letras x, y, z .
- Por si sola la simetría no es un estrategia heurística sino que necesita de otras como la representación y la organización.
- **La simetría en el más amplio sentido de la palabra nos permite simplificar problemas y siempre está asociada con la búsqueda de la solución óptima.**

BUSCAR SIMETRÍAS. EJEMPLO

- Como ejemplo de problema que se resuelve utilizando la simetría hemos elegido el siguiente:
- *"El camino más corto"*
- *¿Cuál es el camino más corto que debe recorrer el caballo de la figura para ir de A a B pasando antes a beber agua en el río?*



Es evidente que la solución resulta de calcular el punto simétrico B' de B respecto al río.

- Si intentamos hacer el problema mediante la técnica de calcular extremos relativos, está claro que el problema se complica considerablemente.

EXPLORAR: ANALIZAR CASOS LÍMITE

- El análisis de los casos límite es muy efectivo cuando intentamos refutar una conjetura y antes de intentar justificarla. Si recordamos el problema "Vaya corte" del tema anterior, la razón por la que desechamos la primera hipótesis que planteamos era que no se verificaba para un caso límite, el cuadrado.
- Cuando tenemos que demostrar una hipótesis y dudamos su certeza, antes de embarcarnos en intentar demostrar una falsedad, resulta muy útil refutarla analizando los casos límite.

INTRODUCIR ELEMENTOS AUXILIARES

- Existen diversos tipos de elementos auxiliares. En un problema de Álgebra podemos introducir incógnitas auxiliares que nos ayudan a obtener la solución del problema. Cuando el problema es de Geometría son casi siempre líneas los elementos auxiliares que nos permiten acercarnos a la solución. Además no hay que olvidar que un teorema matemático que nos ayuda a resolver un problema, estableciendo lazos lógicos entre los datos y la incógnita, es también un elemento auxiliar, lo mismo que un problema resuelto anteriormente y que por analogía nos permite alcanzar la solución del nuestro.
- **Los elementos auxiliares son un conjunto muy diverso, formado por incógnitas, teoremas, líneas ..., que nos permiten establecer lazos lógicos, entre los datos del enunciado y las incógnitas del problema.**

INTRODUCIR ELEMENTOS AUXILIARES. EJEMPLO

- Un ejemplo muy llamativo de lo útil que puede ser utilizar elementos auxiliares es el que propone Polya en su libro "Cómo plantear y resolver problemas":
- *Construir un triángulo, dados un ángulo, la altura correspondiente al ángulo dado y el perímetro del triángulo.*
- Si llamamos A al ángulo conocido y a, b, c a los lados del triángulo con $a+b+c=p$ siendo p el perímetro.
- Supongamos el problema resuelto. A la base a le añadimos dos segmentos de longitudes b y c en la misma dirección del lado a , uno a la derecha y otro a la izquierda. Con esta base $a+b+c$, que es conocida, construimos un triángulo de la misma altura que el de la solución, de esta forma el triángulo inicial se encuentra orlado por dos triángulos isósceles, cuyos lados iguales son respectivamente b y c y los tres forman el triángulo de base p . La construcción de este triángulo es mucho más fácil que la del problema inicial.

SUBOBJETIVOS. DIVIDIR EL PROBLEMA EN PARTES

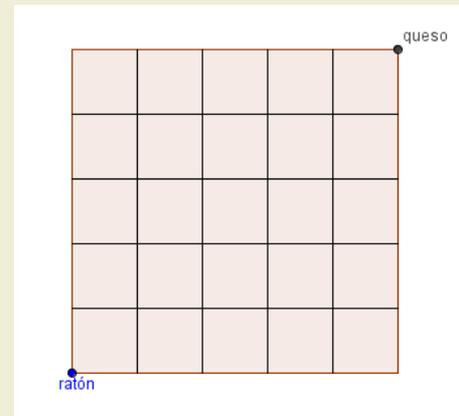
- Aunque no sepamos resolver un problema, puede ocurrir que podamos hallar la solución de partes aisladas, y que luego seamos capaces de engarzarlas para construir con ellas la solución. También podemos sustituirlo por otro análogo pero más fácil, con menos variables o con números más pequeños.
- La estrategia de los subobjetivos es especialmente aplicable a problemas que presenten relaciones recurrentes.
- **Dividir un problema en partes es una de las posibles estrategias para resolver un problema, no es un método en sí mismo por que necesita de otros para llegar a la solución. y es especialmente eficaz para resolver problemas con relaciones recurrentes.**

SUBOBJETIVOS. DIVIDIR EL PROBLEMA EN PARTES. EJEMPLO1

- Como ejemplo está el clásico problema de "Las torres de Hanoi"
- *Cuenta la leyenda que en tres agujas de oro hay sesenta y cuatro discos todos de distinto tamaño, colocados de mayor a menor.*
- *Unos monjes cambian continuamente de sitio estos discos, uno cada segundo con las siguientes reglas: En cada movimiento sólo se puede mover un disco. Y no podemos colocar nunca un disco encima de otro de menor tamaño. Cuando hayan pasado todos los discos de una de las agujas a otra se acabará el mundo. ¿Cuanto falta para que termine el mundo?.*
- Si se intenta resolver este problema por el método de ensayo y error, hay tantas combinaciones posibles que resulta muy difícil. Sin embargo utilizando el método de los subobjetivos, comenzando primero por un sólo disco, luego con dos, ..., se simplifica mucho la tarea, también es conveniente manipular objetos o hacer un esquema o figura de todas las operaciones que vamos realizando.

SUBOBJETIVOS. DIVIDIR EL PROBLEMA EN PARTES. EJEMPLO 2

- Otro problema clásico que además se puede utilizar como introducción de un tema de Combinatoria o de Probabilidad es el siguiente:
- *"Caminos en una cuadrícula"*
- *Un ratón entra en un laberinto que es una cuadrícula 5x5 en busca de un trozo de queso que se encuentra en la diagonal opuesta del cuadrado, si el ratón sólo puede avanzar se pretende calcular el número de caminos posibles en los que obtiene el queso.*



BUSCAR REGULARIDADES

- Formular hipótesis es el resultado de observar regularidades en una serie de casos particulares.
- **Buscar regularidades es encontrar leyes generales que constituyen la organización y estructura profunda de un problema.**
- Cuando formulamos hipótesis debemos tener cuidado con el sentimiento de certidumbre que tenemos habitualmente ante una hipótesis, que surge como generalización de una serie de casos particulares, ya que la belleza de una conclusión general siempre nos parece verdadera, y hay que tener en cuenta que estas hipótesis son simples conjeturas, que tendremos que refutarlas o confirmarlas mediante el razonamiento.

BUSCAR REGULARIDADES. 2

- Después de formular una hipótesis, debemos intentar refutarla considerando casos límites, o casos estratégicamente buscados para que no se verifique. Sin embargo si nuestra conjetura supera todas estas pruebas, para tener la certeza de que es verdadera tenemos que encontrar una razón por la que es así y no de otra manera. En definitiva, hay que encontrar la relación lógica entre el enunciado del problema y la conjetura formulada.
- **De una serie de casos concretos podemos conjeturar una hipótesis a partir de las regularidades de las observaciones realizadas, y aunque al aumentar el número de casos analizados aumenta nuestra confianza en ella, sólo la demostración garantiza su certeza.**

SUPONER EL PROBLEMA RESUELTO

- **Suponer el problema resuelto o trabajar marcha atrás** es muy útil para resolver problemas en los que conocemos la incógnita, pero no conocemos las operaciones o condiciones que producen el objetivo o a veces el estado inicial.
- **Muchas veces si suponemos el problema resuelto aparecen los datos más cercanos y es más fácil llegar desde donde estamos a donde queremos llegar. Sin embargo aunque es una estrategia muy poderosa, trabajar marcha atrás, tiene ciertos problemas y sólo se debe utilizar cuando no tenemos disponible otra posible estrategia.**

SUPONER EL PROBLEMA RESUELTO. EJEMPLO 1

- Es muy útil para resolver problemas en los que conocemos la incógnita, pero no conocemos las operaciones o condiciones que producen el objetivo o a veces el estado inicial.
- Considera el siguiente problema: *"Las jarras"*
- *Tenemos dos jarras iguales, una con agua y la otra con la misma cantidad de leche. Cogemos un vaso de la jarra con agua y lo echamos en la de leche, a continuación cogemos un vaso del mismo tamaño de la mezcla y lo echamos en la de agua. ¿Habrá más leche en la jarra de agua o agua en la jarra de leche?*
- La solución es evidente suponiendo el problema resuelto.
- Otro problema que se resuelve exclusivamente con esta estrategia es el siguiente: *"Los cachorros"*
- *Un muchacho tiene un cesto de cachorros y le regala a una amiga la mitad más medio cachorro, de lo que le queda le da a un amigo la mitad más medio, a su prima la mitad que le queda más medio, y a su primo la mitad que le queda más medio y le queda un cachorro. ¿Cuántos cachorros tenía el cesto?*
- Partiendo del resultado final 1 cachorro y sumándole un medio y multiplicándolo por dos de forma recursiva, se obtiene fácilmente el resultado.

SUPONER EL PROBLEMA RESUELTO. EJEMPLO 2

- Un problema clásico que utiliza esta estrategia es el siguiente: "Cocoteros"
- *Cinco hombres y un mono naufragan en una isla desierta. Los náufragos pasan todo el primer día recogiendo cocos. Por la noche uno de ellos se despierta y decide separar su parte. Divide los cocos en cinco montones iguales y como sobra un coco se lo da al mono después oculta su parte. Poco más tarde, un segundo naufrago se despierta y hace lo mismo, al dividir los cocos en cinco montones, también sobra un coco que se lo da al mono y oculta su parte. Cada uno de los náufragos se levanta y hace lo mismo que los primeros. Por la mañana agrupan los cocos en cinco montones iguales y esta vez no sobra ningún coco. ¿Cuántos cocos habían recogido inicialmente?*
- Este problema además de empezar por el final hay que dominar congruencias y tener cierta perseverancia en seguir con el método elegido ya que el mínimo número de cocos que puede haber inicialmente es 3.124, sin embargo otra estrategia para resolver este problema es modificarlo y hacerlo más sencillo considerando por ejemplo que en vez de cinco marineros hay tres.

RESUMEN

Las estrategias heurísticas son técnicas o reglas muy generales que nos permiten avanzar en el proceso de resolución de problemas.

- **Usar una buena notación**, clara, concisa y sin ambigüedades es un paso decisivo hacia la solución
- Al **organizar** la información mediante una figura o un esquema permiten plantear el problema de forma esquemática.
- El **ensayo y error** aunque es un método lento, si lo dirigimos puede ser muy eficaz.
- La **analogía** es muy útil cuando se tiene cierta experiencia en resolver problemas.
- **Explorar** buscando simetrías permite simplificar el problema, y analizar los casos límite nos ayuda a refutar hipótesis.
- **Los elementos auxiliares** pueden establecer lazos lógicos entre los datos y la solución.
- **Dividir el problema en partes** es muy eficaz para resolver problemas con relaciones recurrentes.
- **Buscar regularidades** es encontrar las leyes generales que estructuran el problema.
- **Trabajar marcha atrás** es muy útil cuando conocemos la incógnita, pero no sabemos las condiciones o el estado inicial

AUTOEVALUACIÓN

- 1.- Resuelve los siguientes problemas señalados en el tema, reflexionando y anotando las estrategias heurísticas que utilizas: *el depósito, color del pelo, las tres ruletas, cien cuadrados, las jarras, los cachorros y la mesa de billar.*
- 2.- Para dos de las estrategias heurísticas estudiadas en este tema busca en tu memoria problemas, que se resuelvan utilizando cada una de ellas.
- 3.- ¿Qué contenidos de la Enseñanza Secundaria podrías introducir mediante el problema *Camino en una cuadrícula*?
- 4.-. Escribe tres nuevas estrategias no mencionadas o da otro nombre a las mencionadas.
- 5.- Relaciona los siguientes problemas del tema con contenidos de la Enseñanza Secundaria: *El depósito, las tres ruletas, el camino más corto, las jarras y los cachorros.*

AUTOEVALUACIÓN. SOLUCIÓN 1

- 1.- "*El depósito*". Solución: 3.600 litros. Estrategias: La solución resulta de hacer una figura, aunque también se resuelve utilizando notación algebraica, planteando una ecuación.
- "*Color del pelo*". Solución: A es rubio, B pelirrojo y C moreno. Estrategia: Hacer una figura.
- "*Las tres ruletas*". Solución: El que elige el segundo. Estrategia: Organizar la información en un diagrama en árbol.
- "*Cien cuadrados*". Solución: 15 líneas formando ,por ejemplo, un rectángulo 8x5. Estrategia: Ensayo y error.
- "*Las jarras*". Solución: La cantidad de agua en la jarra de leche es la misma que la de leche en la jarra de agua. Estrategia: Suponer el problema resuelto.
- "*Los cachorros*". Solución: 31 cachorros. Estrategia: Suponer el problema resuelto.
- "*Una mesa de billar*". Solución: n° de rebotes = $((a+b)/\text{mcd}(a,b)) - 2$ Estrategias: Hacer una figura, introducir elementos auxiliares, hacerlo más fácil y analogía.

AUTOEVALUACIÓN. SOLUCIÓN 2

- 2.- El siguiente problema se resuelve trabajando marcha atrás: *"La mosca"*
- *Dos trenes separados entre sí por una distancia de 120 Km, se dirigen uno hacia otro a una velocidad de 30 Km por hora. Una mosca vuela sin parar entre los dos trenes a una velocidad de 75 Km por hora, dando la vuelta cada vez que llega a uno de ellos. Cuando los trenes colisionan ¿ Qué distancia ha recorrido la mosca?*
- En el siguiente problema, hacer una figura facilita la solución: *"El encuentro"*
- *Dos personas van a encontrarse en un lugar determinado entre las 11 horas y las 12 horas con la siguiente condición, el primero que llega espera al otro quince minutos y después se marcha. Si cada uno llega al azar entre las 11 horas y las 12 horas. ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentren?*
- 3.- Los contenidos que se pueden introducir con este problema son los de Combinatoria, y en particular las combinaciones y los números combinatorios.

AUTOEVALUACIÓN. SOLUCIÓN 3

- 4.- Simplificar el problema, aunque esta englobado en dividir el problema en partes se puede considerar como una estrategia distinta.
- Buscar semejanzas con otros problemas equivale a la estrategia analogía.
- La reducción al absurdo o contradicción aunque es más bien un método de demostración, se puede considerar como una estrategia. La inducción matemática, el principio del palomar o principio de Dirichlet, el proceso diagonal, o el descenso de Fermat son además de métodos de demostración, estrategias heurísticas.
- 5.- El problema de *las tres ruletas* está relacionado con los contenidos de probabilidad, *el depósito, las jarras y los cachorros*, están relacionados con la resolución de problemas utilizando notación algebraica ya que limitan a la vez que enriquecen dicho método. *El camino más corto* ilustra la resolución de problemas de optimización mediante métodos geométricos.

BIBLIOGRAFÍA

- DUBNOV, Y. S. (1994): **Errores en las demostraciones geométricas**. Rubiños. Madrid.
- GUZMÁN, M. de (1991): **Para pensar mejor**. Labor, Barcelona.
- MASON, J., BURTON, L., STACEY, K. (1989): **Pensar matemáticamente**. Labor-M.E.C., Barcelona.
- POLYA, G. (1981): **Cómo plantear y resolver problemas**. Trillas, México.
- WOOD, L. E. (1987): **Estrategias de pensamiento**. Labor, Barcelona.
- J. BRIHUEGA; M. MOLERO; A. SALVADOR. (1994) (2002) **Didáctica de las Matemáticas**. Formación de Profesores de Educación. Secundaria. Editorial Complutense. Madrid.