

§5.3 TEORÍA DEL POTENCIAL: panorama

•Potencial escalar en el plano y en el espacio

•**concepto**: dado $\underline{u}: \Omega \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{V}$, se dice que $f: \Omega \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$, es un potencial escalar de $\underline{u}$ en $\Omega \Leftrightarrow \nabla f = \underline{u}$, $\forall P \in \Omega$.

•**existencia**: condiciones *necesarias*, condiciones *suficientes*, *discusión* en presencia de singularidades.

•**cálculo del potencial escalar**:

1. mediante *integrales de línea*: $f(X) = f(X_0) + \int_{X_0}^X \underline{u} \cdot d\underline{r}$ (integral indepte. del camino)
2. mediante *ecuaciones diferenciales en derivadas parciales* (E.D.P.): $f = ? / \nabla f = \underline{u}$

•Potencial vector en el plano y para algunos campos del espacio

•**concepto**: dado $\underline{u}: \Omega \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{V}$, se dice que $\underline{w}: \Omega \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{V}$ es un potencial vector de $\underline{u}$ en $\Omega \Leftrightarrow \nabla \times \underline{w} = \underline{u}$, $\forall P \in \Omega$.

•**existencia**: condiciones necesarias, condiciones suficientes, discusión

•**Peculiaridades** del potencial vector de un campo bidimensional o del plano $\mathbb{E}_2$: *función de corriente*

•**Cálculo en el plano**: 1) mediante integrales de línea: $\Psi(X) = \Psi(X_0) + \int_{X_0}^X \underline{u} \cdot d\underline{s}$ (integral indepte. del camino)

2) mediante EDP: $\nabla \times (\Psi \underline{k}) = \underline{u} \dots$

•**cálculo del pot. vector en el espacio** para cierto tipo de campos vectoriales:

•mediante EDP

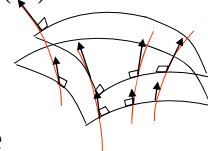
5.3 - a) Potencial escalar (1): conceptos y existencia

1) **concepto**: dado $\underline{u}: \Omega \subset \mathbb{E}_{3(6,2)} \rightarrow \mathbb{V}$, un c. esc. $f: \Omega \subset \mathbb{E}_{3(6,2)} \rightarrow \mathbb{R}$, es un *pot. escalar* de $\underline{u}$ en $\Omega \Leftrightarrow \nabla f(P) = \underline{u}(P)$, $\forall P \in \Omega$.

•Si f es potencial, también lo es $f + \text{cte}$.

•Superficies (o líneas) *equipotenciales*: $f(P) = \text{cte}$.

•las *líneas de corriente* o de campo de $\underline{u}$ son familia de *curvas ortogonales* a las superficies (líneas) equipotenciales $\forall P \in \Omega$.



2) existencia

A. condiciones necesarias (que debe cumplir $\underline{u}$) para que exista f :

•si $\underline{u} = \nabla f \Rightarrow \nabla \times \underline{u} = \underline{0} = \text{cte}$. $\therefore \underline{u}$ debe ser *irrotacional*.

•otras cond. neces. son propiedades de $\underline{u}$ por ser *irrotacional*, que se desprenden del th. de Stokes (motivan llamar *conservativo* a *todo* campo irrotacional):

a) Si Ω es simpl. conexo en $\mathbb{E}_{3(6,2)}$:

• $\forall C = \text{curva cerr.} \subset \Omega: \oint_C \underline{u} \cdot d\underline{r} = 0$, porque $C = \partial S$, $S = \text{simpl. conexo} \subset \Omega$ (Stokes)

• $\forall P, Q \in \Omega: \int_P^Q \underline{u} \cdot d\underline{r}$ es *independiente del camino* que una P y Q , porque entre dos curvas distintas, C_1 y C_2 , que unan P y Q , puede extenderse un casquete S *simplemente conexo* cuyo borde sea $\partial S = C_1 - C_2$ (o $C_2 - C_1$). (Stokes)

b) Si el dominio del campo irrotacional $\underline{u}$, Ω , no es simpl. conexo en $\mathbb{E}_{3(6\ 2)}$:

- $\forall C =$ curva cerr. $\subset \Omega$: si C no rodea la singularidad de $\underline{u}$, $\oint_C \underline{u} \cdot d\underline{r} = 0$
si C rodea la singularidad, $\oint_C \underline{u} \cdot d\underline{r}$ puede ser $K \neq 0$, pero conservará el mismo valor cte., K , para cualquier otra curva cerrada que la rodee. (Stokes generalizado)
- $\forall P, Q \in \Omega$: $\int_P^Q \underline{u} \cdot d\underline{r}$ no depende del camino C_1 que una P con Q , siempre que otro camino distinto C_2 una los pto. dejando la sing. del mismo lado que C_1 ; pero si C_2 deja la singularidad de distinto lado que C_1 , las dos integrales diferirán en el valor de K .

B. condiciones suficientes (que *basta que* cumpla $\underline{u}$) para que exista pot. f :

- si $\nabla \times \underline{u} = \underline{0}$ en $\Omega =$ simplemente conexo $\Rightarrow \exists f / \underline{u} = \nabla f$ en Ω

porque $f(X) = f(X_0) + \int_{X_0}^X \underline{u} \cdot d\underline{r}$ cumple $\nabla f = \underline{u}$ en Ω (la demostración usa th. de Stokes)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[\int_{X_0}^{(x+\Delta x, y, z)} \underline{u} \cdot d\underline{r} - \int_{X_0}^{(x, y, z)} \underline{u} \cdot d\underline{r} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{(x, y, z)}^{(x+\Delta x, y, z)} \underline{u} \cdot d\underline{r} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} [\underline{u}(x + t_m \Delta x, y, z) \cdot \underline{i} \Delta x] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} u_x(x + t_m \Delta x, y, z) = u_x(x, y, z) \end{aligned}$$

- Discusión de existencia *en la práctica*: supuesto que $\underline{u}$ es irrotacional
 - si Ω es simplemente conexo basta que $\underline{u}$ sea irrotacional para $\exists f$ potencial
 - si Ω NO es simplemente conexo ("taladrado") se comprueba si $\underline{u}$ produce circulación nula sobre una curva cerrada cualquiera que rodee la singularidad: si la integral se anula, existe potencial en Ω ;

si la integral no se anula, puede reducirse convenientemente Ω a un subdominio $\Omega^* \subset \Omega$ simplemente conexo en el que $\underline{u}$ admitirá potencial escalar f .

- Ejemplos: 1) Discutir el carácter del campo $\underline{u} = \underline{g}^0 = 1/\rho \underline{e}_\theta$, $\Omega = \mathbb{E}_3 - \{\text{Eje } Z\}$, $\Omega^* = \mathbb{E}_3 - \Pi$, con $\Pi : \{\theta = \theta_0\}$, para cualquier θ_0 (por ejemplo, π) semiplano de borde el eje Z ;
2) PR4.14

3) cálculo del potencial escalar

- **mediante integrales de línea** sobre C arbitr.: $f(X) = f(X_0) + \int_{X_0}^X \underline{u} \cdot d\underline{r}$

donde C une X_0 con X , y se elige para simplificar los cálculos (poligonal cartesiana o curvilínea, arco de circunferencia... figura)

- se pueden utilizar componentes curvilíneas si el campo se simplifica en ellas

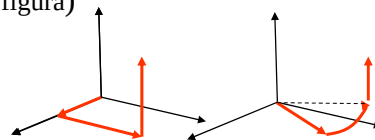
• Ejemplos: PR4.15; PR4.24b; PR4.26b

- **mediante EDP**: Dado $\underline{u}$ irrotacional se busca una función escalar $f: \Omega$ (ú Ω^*) $\subset \mathbb{E}_{3(6\ 2)} \rightarrow \mathbb{R} / \nabla f = \underline{u} \Leftrightarrow$

- en cartesianas: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y, z) = U_i(x, y, z)$ (sistema de E.D.P.)

- en curvilíneas (¡covariantes de $\underline{u}$!): $\frac{\partial f}{\partial x^i}(u, v, w) = u_i(x, y, z)$

- Ejemplos: PR4.15, 24, 25A, 27.



b) Potencial vector en el espacio: (1) existencia

•**concepto:** dado $\underline{u}: \Omega \subset \mathbb{E}_3 \rightarrow \mathbb{V}_3$, $\underline{w}: \Omega \subset \mathbb{E}_3 \rightarrow \mathbb{V}_3$, es un *pot. vector* de $\underline{u}$ en $\Omega \Leftrightarrow \nabla \times \underline{w} = \underline{u}$, $\forall P \in \Omega$.

•**existencia:**

•**condiciones necesarias (debe cumplir $\underline{u}$) para que exista $\underline{w}$**

- si $\underline{u} = \nabla \times \underline{w} \Rightarrow \nabla \cdot \underline{u} = 0 = \text{cte.}$ (campo $\underline{u}$ debe ser *adivergente* o *solenoidal*)
- otras condiciones se deducen de apl. th. de Gauss: si $\nabla \cdot \underline{u} = 0 (\Leftrightarrow \underline{u}$ es *solenoidal*) $\Rightarrow \underline{u}$ es "conservativo de flujos": i) flujos nulos, a través de sup. cerradas; que no encierren singularidades o flujos iguales, a través de casquetes con el mismo borde si no encierran singularidades entre ambas; ii) flujos iguales a través de superficies cerradas que encierren singularidad (aislada o "burbuja"), de valor K, constante, no necesariamente nula; o flujos que se diferencian en K a través de casquetes S_1, S_2 , que comparten el mismo borde pero encierran una singularidad (aislada).

•**condiciones suficientes (basta que cumpla $\underline{u}$) para que exista $\underline{w}$**

- si Ω es retráctil (no contiene *burbujas*) las condiciones necesarias son suficientes.
- si Ω contiene singularidades aisladas, se comprueba si $\underline{u}$ da flujo nulo a través de una superficie cerrada cualquiera que encierre la singularidad aislada: si se anula el flujo, $\underline{u}$ es rotacional en Ω , o sea admite pot. Vector; y si no, puede reducirse Ω a una subregión simpl. conexa en la que
- Ejemplos: PR4.16, 17, 21i, 25Ai.

c) Potencial vector en el plano: (1) existencia

•**Concepto:** dado $\underline{u}: \Omega \subset \mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{V}_2$, se dice $\underline{w}: \Omega \subset \mathbb{E}_2 \rightarrow \mathbb{V}_3$, es un *pot vector* de $\underline{u}$ en $\Omega \Leftrightarrow \nabla \times \underline{w} = \underline{u}$, $\forall P \in \Omega$.

• el pot. $\underline{w}$ no es único, pues también valdría $\underline{w} + \nabla \phi$, $\forall \phi \in C^1(\Omega)$

• en el plano se puede determinar un pot. vec. de la forma: $\underline{w} = \Psi(x,y)\underline{k}$ ó $\Psi(\rho,\theta)\underline{g}$ (vector ortogonal al plano de trabajo) $\Leftrightarrow \{\partial_y \Psi = u_x, \partial_x \Psi = -u_y\}$ (Sma. EDP's)
 Ψ se llama *función de corriente* de $\underline{u}$ porque las líneas $\Psi = \text{cte.}$ son tangentes al campo $\underline{u}$

•**Existencia:**

•**condiciones necesarias:** siendo $\underline{u} = P(x,y)\underline{i} + Q(x,y)\underline{j}$

• si $\underline{u} = \nabla \times \underline{w} \Rightarrow \nabla \cdot \underline{u} = 0 = \text{cte.}$ (campo $\underline{u}$ debe ser *adivergente*: o solenoidal: $\partial_x P + \partial_y Q = 0$)

• otras propiedades son consecuencia directa del th. de Green-Gauss: por ser $\underline{u}$ adivergente: si $\underline{u} = \nabla \times \underline{w} \Rightarrow \underline{u}$ es conservativo de flujos planos, (de las integrales de línea de la componente *normal* del campo), es decir:

- 1) $\oint_C \underline{u} \cdot \underline{n} ds = 0$ a través de curvas cerradas que no encierren agujeros. Y $\oint_C \underline{u} \cdot \underline{n} ds = K$, constante (posiblnte. no nula) para toda curva cerrada que encierre una singularidad
- 2) $\int_A^B \underline{u} \cdot \underline{n} ds = \int_A^B \underline{u} \cdot \underline{n} ds$ no depende del camino que una A y B, si entre dos caminos distintos envuelven una región simpl. conexa; y se diferencian en el valor de K si

• Las condic. nec. son suficientes en regiones Ω *simplemente conexas* (sin agujeros).

[Al probar *solenoidal* $\Rightarrow$ *rotacional* se construye $\Psi(X) = \Psi(X_0) + \int_{X_0}^X \underline{u} \cdot \underline{n} ds$]

• discusión de la existencia en la práctica: análoga al caso del potencial escalar

• Ejemplos: Campo PR4.14; PR4.16.

Pot. vector en el plano: (2) cálculo de ψ de corte.

•Mediante EDP:

- exigiendo $\underline{u}(x,y) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} = \nabla \times [\psi(x,y)\mathbf{k}] = \partial_y \psi \mathbf{i} - \partial_x \psi \mathbf{j} \Leftrightarrow$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = P \text{ (Ec.1)}; \frac{\partial \psi}{\partial x} = -Q \text{ (Ec.2)}$$

que se integran elementalmente

- obs.: $\nabla \psi = -Q\mathbf{i} + P\mathbf{j} \Leftrightarrow \nabla \psi \perp \underline{u}$ en cada punto (x,y) .

$\therefore \underline{u}$ es tgte. en cada pto. a las curvas $\psi(x,y) = \text{cte.}$, que coincidirán con las *líneas de campo* (o de *corriente*) de $\underline{u}$. Así, ψ se llama *función de corriente* del campo $\underline{u}$

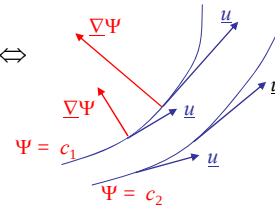
- Ejemplos: PR4.18, PR4.19 y PR4.20

•Mediante integrales de línea:

- Si se define $\psi(x,y) = \psi(x_0,y_0) + \int_{x_0}^x \underline{u} \cdot \underline{n} \, ds$ (camino C arbitrario, siempre que dos caminos distintos no rodeen agujeros del dominio de $\underline{u}$ o si se sabe que $K = 0$. Si no lo es, se puede reducir la región Ω a una nueva, simplemente conex, $\Omega^* \subset \Omega$, para no rodear singularidades).

- Ejemplos: 1) Un campo a la vez *adivergente* e *irrotacional* (ecuación de Laplace y campos armónicos): $\underline{u} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$; también, $\underline{u} = \underline{g}^\theta$.

2) PR4. 19, 17b, 18,, 21,



Apéndice: Cálculo del potencial vector en el espacio

- mediante EDP: Dado $\underline{u}$ *adivergente* en Ω , se busca $\underline{w} \in C^1(\Omega) / \nabla \times \underline{w} = \underline{u}$
 $\Leftrightarrow \varepsilon^{ijk} \partial_{x_i} w_j = u_k$ (cartesianas) $\Leftrightarrow g^{1/2} \varepsilon^{ijk} \partial_{x_i} w_j = u^k$. (curvilíneas). En cartesianas se tendría el sistema de e.d.p.:

$$\frac{\partial w_3}{\partial x_2} - \frac{\partial w_2}{\partial x_3} = u_1 \text{ (Ec.1)}, \frac{\partial w_1}{\partial x_3} - \frac{\partial w_3}{\partial x_1} = u_2 \text{ (Ec.2)}, \frac{\partial w_2}{\partial x_1} - \frac{\partial w_1}{\partial x_2} = u_3 \text{ (Ec.3)}$$

- resolución práctica: basta obtener una *solución particular*, $\underline{w}_p$ (lo q. permite introducir simplificaciones, como anular una compnte. del campo incógnita, $\underline{w}$, o darle la forma particular que se desee)

- por ej., si se busca $\underline{w}_p / w_3 = 0$ ($\underline{w}_p \parallel XY$): las e.d.p. se describen simplificadas:

$$-\frac{\partial w_2}{\partial x_3} = u_1 \text{ (Ec.1)}, \frac{\partial w_1}{\partial x_3} = u_2 \text{ (Ec.2)}, \frac{\partial w_2}{\partial x_1} - \frac{\partial w_1}{\partial x_2} = u_3 \text{ (Ec.3)}$$

y se integran sistemáticamente, como se aprecia en el sgte.:

Ejemplo: Potencial vector del campo $\underline{u}(x,y,z) = 2Kx\mathbf{i} - Ky\mathbf{j} - Kz\mathbf{k}$

- solución general*: cualquier otro campo de la forma $\underline{w} = \underline{w}_p + \nabla F$ es sol. de la e.d.p., para todo campo escalar F de clase 2 en Ω .

- PR4.20, 21ii, PR4.26