

§5.2 Teoremas fundamentales de integración de campos: panorama

- Generalizan la regla de Barrow (o T.F.C.) a las integrales de campos

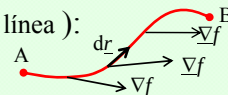
$$f : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ de clase 1} \Rightarrow \forall [a, b] \subset \Omega : \int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

- Cada uno de los tres tipos de integrales deduce de ahí su fórmula integral:

- El **Teorema del gradiente** (o T.F.C. de las integrales de línea):

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A)$$

con $f : \Omega = \text{reg.} \subset \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$, c. esc. de $C^1(\Omega)$ $A, B = \text{extremos de } C = \text{curv.reg.} \subset \Omega$

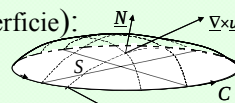


- La **fórmula integral de Green** (o los T.F. en el plano)

- El **Teorema del rotacional** o de Stokes (int. de superficie):

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{N} dS = \oint_{\partial S} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}$$

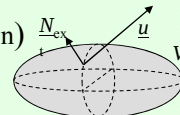
con $\partial S = C = \text{curva cerr. reg. (a trozos), borde del casquete de superficie } S$
(*simplemente conexo*)



- El **Teorema de la divergencia** o de Gauss (int. de volumen)

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{u} dV = \iint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathbf{N}_{\text{ext}} dS$$

con $\partial V = \text{superficie cerrada regular (a trozos), frontera de } V, \text{ retráctil.}$



§5.2 a) Teor. fund. del cálculo para int. de línea

- **Enunciado:** Si f es campo escalar de clase 1 en una región $\Omega \subset \mathbb{E}_{3(2)}$, $\forall C$ curva reg. de extremos A y B contenida en Ω :

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A)$$

- **demostración:** regla de la cadena $t \leftarrow f \rightarrow (x, y, z) \rightarrow t \Rightarrow \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \dots$

- **Consecuencia:** los campos *gradiente* (campos vectoriales $\mathbf{u}$ que derivan de un potencial escalar f , o sea, de la forma $\mathbf{u} = \nabla f$) son **campos conservativos**, o sea:

- **independencia del camino** de la integral de línea $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A) \Rightarrow$ sólo depende del valor de f en los extremos de C (curva reg.).

nota: si se sabe que $\mathbf{u} = \nabla f$ (*¡continuo!*) se puede deducir $f(X) = f(A) + \int_A^X \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}$ (indep. cam°.)

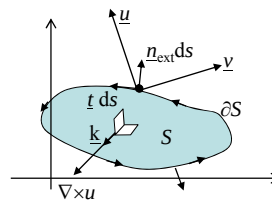
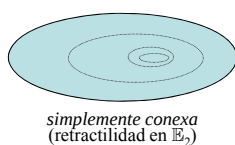
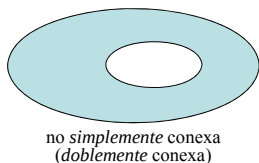
- **circulación nula** de ∇f (*¡continuo!*) a lo largo de curvas **cerradas**: $\oint_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = 0$

Nota: ambas propiedades se dan simultáneamente (porque son *equivalentes*) y se dice que el campo **conserva las integrales de línea** o que es **conservativo**. Resulta pues: *todo campo gradiente continuo en una región Ω de $\mathbb{E}$ es conservativo en Ω .*

- **Aplic. más import. en la T^a del potencial (§5.3).** Cálculo de integrales de línea: Ej.: PR4.11b, PR4.2 (campo $\mathbf{u}$, sabiendo que $\mathbf{u} = \nabla f$ para un campo escalar f obvio; p.ej.: $\mathbf{u} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$, $C =$ una espira de la hélice de radio R y paso $p = 2\pi c$).

§5.2 b) Fórmula de Green y consecuencias en $\mathbb{E}_2$

•**def.**: reg. plana simplemente conexa si su frontera es conexa (sin agujeros)



N.: las curv. cerr. reg. $C \subset \Omega$ simpl. conexa encierran subregiones S simpl. conexas.

En adelante se supone que las curvas cerradas se recorren en sentido antihorario (+)

•**Teorema** (de Green): Si Ω es una región de $\mathbb{R}^2$ y $P(x,y)$, $Q(x,y)$ son func. de $\mathcal{C}^1(\Omega)$, entonces $\forall S$ región simplemente conexa, con $\partial S = C$ curva cerrada $\subset \Omega$, se verifica:

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial S} P dx + Q dy$$

fórmula de Green

demostración



•Demostración de la fórmula de Green

Se demuestra en tres fases:

1. Para rectángulos $A = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow A = \{(x,y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \Rightarrow \partial A = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$, siendo:

$C_1 = \{x=t, y=c; t \in [a, b]\} \Rightarrow dx=dt, dy=0$; $C_2 = \{x=b, y=t; t \in [c, d]\} \Rightarrow dx=0, dy=dt$;

$C_3 = \{x=b-t+a, y=d; t \in [a, b]\} \Rightarrow dx=-dt, dy=0$; $C_4 = \{x=a, y=t; t \in [c, d]\} \Rightarrow dx=0, dy=-dt$

$$\text{Así: i) } \iint_A \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b \frac{\partial q}{\partial x} dx \right] dy - \int_a^b \left[\int_c^d \frac{\partial p}{\partial y} dy \right] dx =$$

$$= \int_c^d [q(b,y) - q(a,y)] dy - \int_a^b [p(x,d) - p(x,c)] dx$$

$$\text{y ii): } \oint_{\partial A} p dx + q dy = \int_{C_1} p dx + \int_{C_2} q dy + \int_{C_3} p dx + \int_{C_4} q dy =$$

$$= \int_a^b p(t,c) dt + \int_c^d q(b,t) dt + \int_a^b p(b-t+a,d)(-dt) + \int_c^d q(a,d-t+c)(-dt) =$$

$$= \int_a^b p(t,c) dt - \int_a^b p(b-t+a,d) dt + \int_c^d q(b,t) dt - \int_c^d q(a,d-t+c) dt$$

Resulta que las dos integrales de la fórmula conducen a las mismas integrales de Riemann y coinciden entre sí. Basta hacer un c. de var. en las dos integrales que están restando; por ejemplo, si $t = b-x+a$, entonces $\{dt = -dx; t=a \Rightarrow x=b, t=b \Rightarrow x=a\}$, luego

$$-\int_a^b p(b-t+a,d) dt = -\int_b^a p(x,d)(-dx) = -\int_a^b p(x,d) dx$$

y es análogo con la otra integral que está restando.

2. Para triángulos rectángulos con hipotenusa curvilínea monótona, como (con hipotenusa decreciente $y = \phi(x) \Leftrightarrow x = \psi(y)$) y análogos.

• La descripción analítica de los conjuntos y caminos de integración:

$A = \{(x,y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq \phi(x)\} = \{(x,y): a \leq x \leq \psi(y), c \leq y \leq d\} \Rightarrow \partial A = C_1 + C_2 + C_3$,
siendo:

$C_1: \{x=t, y=c; t \in [a,b]\} \Rightarrow dx = dt, dy = 0$;

$C_2: \{x=b-t+a, y=\phi(b-t+a); t \in [a,b]\} \Rightarrow dx = -dt, dy = -\phi'(b-t+a)dt$

o bien $C_2: \{x=\psi(t), y=t; t \in [c,d]\} \Rightarrow dx = \psi'(t)dt, dy = dt$

$C_3: \{x=a, y=d-t+c; t \in [c,d]\} \Rightarrow dx = 0, dy = -dt$.

• Las integrales de la fórmula de Green se desarrollan como integrales de Riemann:

$$\iint_A \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx dy = \iint_A \frac{\partial q}{\partial x} dx dy - \iint_A \frac{\partial p}{\partial y} dx dy =$$

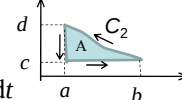
$$= \int_c^d \left[\int_a^{\psi(y)} \frac{\partial q}{\partial x} dx \right] dy - \int_a^b \left[\int_c^{\phi(x)} \frac{\partial p}{\partial y} dy \right] dx =$$

$$= \int_c^d [q(\psi(y), y) - q(a, y)] dy - \int_a^b [p(x, \phi(x)) - p(x, c)] dx;$$

$$\oint_{\partial A} p dx + q dy = \int_{C_1} p dx + q dy + \int_{C_2} p dx + q dy + \int_{C_3} p dx + q dy =$$

$$= \int_a^b p(t, c) dt + \int_a^b p(b-t+a, \phi(b-t+a)) dt + \int_c^d q(\psi(t), t) dt + \int_c^d q(a, d-t+c)(-dt)$$

Análogamente al caso anterior, las dos integrales de la fórmula conducen a las mismas integrales de Riemann, salvo un cambio de variables similar.



3. Las regiones planas A simplemente conexas se pueden descomponer (como sugiere la figura) en unión sin solapamientos de subregiones de alguno de los dos casos considerados hasta ahora, rectángulos o triángulos curvilíneos.

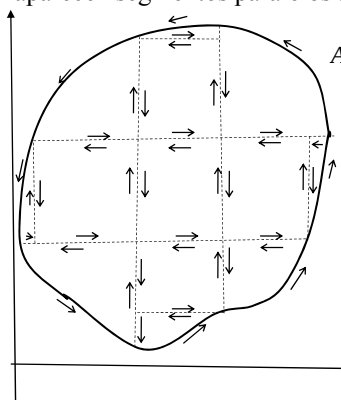
Se busca con ello que el borde ∂A se descomponga en arcos de curva que sean biyecciones $x \leftrightarrow y$, por lo que sirven de guía los puntos del mismo en que la tangente es paralela a alguno de los dos ejes X ó Y .

En cada subregión se puede aplicar la fórmula de Green, recorriendo su borde en sentido antihorario. Resultará que en el interior de A aparecen segmentos paralelos a los ejes que deberán recorrerse dos veces en sentido contrario, cancelándose entre sí, de manera que :

$$\iint_A \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx dy = \sum_i \iint_{A_i} \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx dy =$$

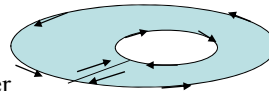
$$= \sum_i \oint_{\partial A_i} p dx + q dy = \oint_{\partial A} p dx + q dy$$

Así el teorema se cumple también en estos recintos más generales.



• **Versiones generalizadas** a recintos **múltiplemente conexos**: un corte entre las dos fronteras transforma el recinto *doblemente conexo* de la figura, en *simplemente conexo*. Observar el sentido contrario en las fronteras y la cancelación en el borde cortado.

N.: se emplea la misma fórmula de Green en la versión generalizada, pero se entiende que ∂S se debe descomponer como suma de las dos curvas frontera, recorridas en sentido contrario (o la resta, si se recorren en el mismo sentido) y se cancela en el corte: $\partial S = C_1 + (-C_2)$



• **Ejemplos**: Aplicar las dos versiones vectoriales de fórm. de Green generalizada si: $\underline{u} = \underline{r}$, $C_1 = \{2x^2 + y^2 = 4\}$, $C_2 = \{x^2 + y^2 = 1\}$.

• La versión generalizada permite reducir una integral sobre una curva "complicada" a otra más sencilla, si el rotacional (o la divergencia) son nulos o sencillos de integrar

• **Versión vect. Fla. Green**: si $\underline{u} := P(x,y)\underline{i} + Q(x,y)\underline{j}$ y $\underline{v} := Q\underline{i} - P\underline{j}$:

$$\underbrace{\iint_S (\nabla \times \underline{u}) \cdot \underline{k} \, dS = \oint_{\partial S} \underline{u} \cdot d\underline{r}}_{\text{Teorema de Stokes en el plano}} ; \underbrace{\iint_S (\nabla \cdot \underline{v}) \, dS = \oint_{\partial S} \underline{v} \cdot \underline{\hat{n}}_{\text{ext}} \, ds}_{\text{Teorema de Gauss en el plano}}$$

porque: $\nabla \times \underline{u} \cdot \underline{k} = \partial_x Q - \partial_y P = \nabla \cdot \underline{v}$;

y en toda curva cerr.: $\underline{n}_{\text{ext}} ds = dy \underline{i} - dx \underline{j}$; $\underline{t} ds = dx \underline{i} + dy \underline{j}$

• **Aplicaciones I** (en la forma de Stokes en el plano $\mathbb{E}_2$)

• 1) **Cálculo de circulaciones** mediante el *flujo del rotacional* (si conviene) a través (en el esp. contexto del plano $\mathbb{E}_2$) del recinto plano *simplemente conexo* encerrado por C : método de *intercambio de integrales*:

$$\int_{C=\partial S} \underline{u} \cdot d\underline{r} = \iint_S \nabla \times \underline{u} \cdot \underline{k} \, dS$$

• **Ejemplo**: Calcular $\int_C \underline{u} \cdot d\underline{r}$ si $\underline{u}(x,y) = (4x^2 + 3\text{sen}y)\underline{i} + (3x\text{cos}y + 4x)\underline{j}$ y $C =$ perímetro del paralelogramo $\{(0,0), (4,0), (5,2), (1,2)\}$.

• Si C no es cerrada: mismo $\underline{u}$ en $C : \{9x^2 + 4y^2 = 36; x > 0, y > 0\}$

• Observación sobre el n° de vueltas que ciertas curvas dan a la misma trayectoria.

• 2) **Cálculo de áreas** de regiones planas simplemente conexas S mediante *circulación* por su borde (∂S , curva cerrada reg. (a trozos)) del campo vec. auxiliar $\underline{A} := \frac{1}{2}(-y\underline{i} + x\underline{j})$ / $\nabla \times \underline{A} = \underline{k}$ (luego $\nabla \times \underline{A} \cdot \underline{k} = 1$)

$$\text{Area}(S) = \iint_S 1 \, dS = \frac{1}{2} \oint_{\partial S} (-y \, dx + x \, dy) = \oint_{\partial S} \underline{A} \cdot d\underline{r}$$

• **Ejemplos**: 1) área de una elipse de semiejes a, b aplicando la fórmula de Green (Stokes):

• 2) área encerrada por $\{\rho = 3|\text{sen}2\theta|\}$ (*rosa de 4 pétalos*)

•Aplicaciones II (en la forma de Gauss)

•1) cálculo de flujos planos o integrales de línea de *comptes. normales* de campos planos: $\Phi_{pl}(\underline{u}; C) := \int_C \underline{u} \cdot \underline{n} \, ds$ (*intercambio de integrales*):

•si C es *cerr.* y no encierra *sing.* de $\underline{u}$, $\int_C \underline{u} \cdot \underline{n} \, ds = \iint_S \nabla \cdot \underline{u} \, dS$, siendo S la porción del plano encerrada por C (*simplmte conexa*). Es llamado el método de intercambio de integrales, y se usa si la integral doble $\iint_S \nabla \cdot \underline{u} \, dS$ simplifica la del flujo $\int_C \underline{u} \cdot \underline{n} \, ds$ (o viceversa).

•Ejemplos: 1) S = círculo unidad del plano XY , $\underline{u} = \underline{r}$;

2) misma S , $\underline{u} = (1/\rho)\underline{e}_\theta$.

•si C no *cerrada*, de extr. A, B , se puede cerrar si conviene, mediante un tramo auxiliar C_1 (que una B con A por otro camino sencillo) y aplicar Green (Gauss) de nuevo a la región S encerrada entre C y C_1 , supuesta *simpl. conexa* (intercamb. de caminos)

$$\int_{\partial S} \underline{u} \cdot \underline{n} \, ds = \iint_S \nabla \cdot \underline{u} \, dS = \int_C \underline{u} \cdot \underline{n} \, ds + \int_{C_1} \underline{u} \cdot \underline{n} \, ds$$

•Ejemplo: 3) C es el arco de elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ en el primer cuadrante y $\underline{u}$ es el c.v. $\underline{g}_\theta$ de la base polar del plano: se cierra por C_1 = unión de semiejes.

•2) cálculo de áreas análogo a la forma de Stokes, con el *flujo plano* por el ∂S del campo auxiliar $\underline{B} = \frac{1}{2}\underline{r} = \frac{1}{2}(x\underline{i} + y\underline{j}) / \nabla \cdot \underline{B} = 1$. Así, ... (completar como ejercicio)

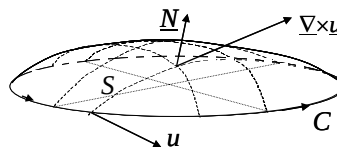
5.2 c) Teorema de Stokes en el espacio

• **Definición:** Casquete de superficie S en $\mathbb{E}_3$. Intuitivamente, un casquete de superficie S es toda porción de una superficie abarcada por una curva cerrada $C \subset S$, que se conoce como su borde y se representa por ∂S . Matemáticamente, S es la imagen de un dominio (cierre de una región o sea, adherencia de un abierto conexo), $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, con borde una curva cerrada $\partial \mathcal{D}$ en $\mathbb{E}_2$, mediante una aplicación biyectiva y de clase 1, $\sigma: \mathcal{D} \rightarrow S$, de manera que $\partial S = \sigma(\partial \mathcal{D})$ en $\mathbb{E}_3$.

• **Teorema (Stokes):** Si S es un *casquete de sup. reg.* (a trozos) y *simplemente conexo* (sin agujeros), limitado por una única curva cerr. reg. (a trozos) $C = \partial S$ y si $\underline{w}$ es un campo de clase 1 en una región Ω simpl. conexa entorno de S , entonces

$$\int_S (\nabla \times \underline{w}) \cdot \underline{N} \, dS = \oint_{\partial S} \underline{w} \cdot d\underline{r}$$

recorriendo C en *sentido positivo* alrededor de la normal $\underline{N}$ de S .



•Ejemplos: 1) Verificar el teorema para $\underline{w} = -y\underline{i} + x\underline{j} + z\underline{k}$ sobre el casquete S de $\{z = x^2 + y^2 \leq 1\} / \partial S = C = \{x = \cos(s), y = \sin(s), z = 1\}$.

• **Demostración:** Se reduce a la fórmula de Green cuando se desarrollan las dos integrales en términos de la superficie $S = \sigma(\mathcal{D})$ y de su borde $C = \partial S = \sigma(\partial \mathcal{D})$

-1) El integrando de la integral de línea se desarrolla en la base de superficie:

$$\underline{w} \cdot d\underline{r} = [w_u(u,v)\underline{g}^u(u,v) + w_v(u,v)\underline{g}^v(u,v) + w_3(u,v)\underline{N}(u,v)] \cdot [\underline{g}_u(u,v)du + \underline{g}_v(u,v)dv] = \\ = w_u(u,v)du + w_v(u,v)dv := p(u,v)du + q(u,v)dv, \text{ donde: } p(u,v) := \underline{w} \cdot \underline{g}_u(u,v), q(u,v) := \underline{w} \cdot \underline{g}_v(u,v)$$

Así:
$$\oint_{\partial S} \underline{w} \cdot d\underline{r} = \oint_{\partial \mathcal{D}} p(u,v)du + q(u,v)dv$$

Aplicando la fórmula de Green, se tiene:
$$\oint_{\partial \mathcal{D}} p(u,v)du + q(u,v)dv = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial q}{\partial u} - \frac{\partial p}{\partial v} \right) du dv$$

- 2) El integrando de la integral de superficie, por su parte es:

$$\underline{\nabla} \times \underline{w}(x,y,z) = \varepsilon_{ijk} (\partial w_j / \partial x_i) \underline{e}_k; \underline{N} dS = \underline{r}'_u \times \underline{r}'_v dudv = \varepsilon_{mnh} (\partial x_m / \partial u) (\partial x_n / \partial v) \underline{e}_h dudv \\ \text{luego: } \underline{\nabla} \times \underline{w}(x,y,z) \cdot \underline{N} dS = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnh} \delta_{kh} (\partial w_j / \partial x_i) (\partial x_m / \partial u) (\partial x_n / \partial v) dudv = \\ = \varepsilon_{ijh} \varepsilon_{mnh} (\partial w_j / \partial x_i) (\partial x_m / \partial u) (\partial x_n / \partial v) dudv = (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) (\partial w_j / \partial x_i) (\partial x_m / \partial u) (\partial x_n / \partial v) dudv = \\ = (\partial w_n / \partial x_m) (\partial x_m / \partial u) (\partial x_n / \partial v) dudv - (\partial w_m / \partial x_n) (\partial x_m / \partial u) (\partial x_n / \partial v) dudv = \\ = [(\partial w_n / \partial u) (\partial x_n / \partial v) - (\partial w_m / \partial v) (\partial x_m / \partial u)] dudv = [(\partial \underline{w} / \partial u) \cdot \underline{g}_v - (\partial \underline{w} / \partial v) \cdot \underline{g}_u] dudv;$$

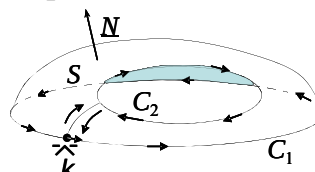
Pero:
$$\frac{\partial q}{\partial u} - \frac{\partial p}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u} (\underline{w} \cdot \underline{g}_v) - \frac{\partial}{\partial v} (\underline{w} \cdot \underline{g}_u) = \frac{\partial w}{\partial u} \underline{g}_v + \underline{w} \cdot \frac{\partial \underline{g}_v}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v} \underline{g}_u - \underline{w} \cdot \frac{\partial \underline{g}_u}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial u} \underline{g}_v - \frac{\partial w}{\partial v} \underline{g}_u$$

y así:
$$\iint_S \underline{\nabla} \times \underline{w} \cdot \underline{N} dS = \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial q}{\partial u} - \frac{\partial p}{\partial v} \right) du dv = \oint_{\partial \mathcal{D}} p(u,v)du + q(u,v)dv = \oint_{\partial S} \underline{w} \cdot d\underline{r}$$

lo que prueba el teorema de Stokes. c.q.d. #.

• **Versión generalizada** para casquetes *múltiplemente conexos* es análoga a la versión del plano:

$$\int_S (\underline{\nabla} \times \underline{u}) \cdot \underline{N} dS = \oint_{C_1} \underline{u} \cdot d\underline{r} + \oint_{-C_2} \underline{u} \cdot d\underline{r}$$



O sea: la fórmula integral permanece si

$\partial S = C_1 + (-C_2)$ pues, unidas por un arco de corte k , $\int_k$ se cancela por doble recorrido en sentido contrario, y, además, C_2 se debe recorrer en sentido contrario de C_1 (es análogo si hay más de un agujero).

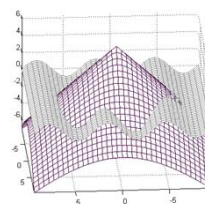
• **Ejemplo:** PR4.13b

• **Observación:** Se usa en la dem.: S es sup. reg. $S = \sigma(D) \Rightarrow \partial S = \sigma(\partial D)$ (σ es difeomorfismo) y resulta que S es simpl. conexo en $\mathbb{E}_3 \Leftrightarrow D$ es simplemente conexo en $\mathbb{R}^2$ (esto facilita argumentos para razonar)

•Aplicaciones y consecuencias del Th. de Stokes en $\mathbb{E}_3$:

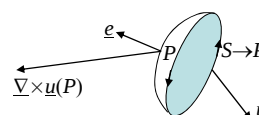
- Análogas a las que tiene en el plano, cambiando "recintos S limitados en el plano por una curva cerr. C " por "casquetes de superficie de borde una curv. $C = \partial S = \sigma(\partial D)$ ". Concretamente $\rightarrow$:

1. **Intercambio de integrales**: cálculo de *circulación* de $\underline{u}$ sobre C mediante el *flujo* del $\nabla \times \underline{u}$, eligiendo S adecuada / $\partial S = C$ y/o aprovechando la sencillez del $\nabla \times \underline{u}$:
2. **Método de intercambio de caminos** : aunque no sean conservativos, los campos irrotacionales permiten *sustituir* una curva C por otra más sencilla C^* para calcular su circulación, aplicando la [versión](#) generalizada de Stokes:
 - Ejemplos (de los Apuntes):
 - Ej 5.2-11: Calcular $\int_C \underline{u} \cdot d\underline{r}$ con $\underline{u} = (1/\rho^2)\underline{g}_\theta$ y $C : \{z = 4 - (x^2 + y^2)^{1/2}\} \cap \{z = \text{sen} x\}$ (figura)
 - Ej. 5.2-12: Circulación de $\underline{u} = \underline{g}_\theta$ a lo largo del arco de hélice $C : \{\rho = R, \theta = t, z = 2t; 0 \leq t \leq \pi/2\}$ aplicando el teorema de Stokes.
 - PR4.8



3. **Interpretación tensorial del rotacional**: significado de $\nabla \times \underline{u}(P) \cdot \underline{e}$ como circulación de $\underline{u}$ alrededor de P por unidad de $S \rightarrow P$ orientada según $\underline{e}$ (promedio integral)

- Así, $\nabla \times \underline{u}(P)$ es un campo tensorial de primer orden que actúa sobre los vectores orientación $\underline{e}$ de $S \rightarrow P$ produciendo circulación por unidad de superficie $S \rightarrow P$ (promedio o valor unitario)



- si $\nabla \times \underline{u}(P) \neq \underline{0}$ proporciona, pues, la dirección $\underline{e}$ en la que orientar S en P para obtener máxima circulación de $\underline{u}$ alrededor de P .

• Ejemplo: El "eje" de un torbellino de viento es una línea de campo del rotacional de su campo de velocidades.

- Ejemplos:
- PR4: 4.8, 4.9, 4.11b, 4.23b

§5.2 d) Teorema de Gauss en el espacio tridimensional

d.1) Defs. previas: generalizaciones tridimens. de la conex. simple

- 1) Un volumen acotado y regular V se dice **retráctil** si su frontera topológica es una superficie cerrada regular (a trozos), S , que puede deformarse de modo continuo hasta contraerse a cualquiera de los puntos interiores de V . (obs.: la frontera de V es conexa, de una pieza, sin más bordes ni otros puntos interiores a S)
 - se denota $S = \partial V$ (borde de V = frontera topológica); S es el único borde de V y suele decirse, intuitivamente, que V no contiene agujeros o burbujas, que aportarían borde interior a S .
- 2) Una región $\Omega \subset \mathbb{E}_3$ se dice **retráctil** si toda superficie cerrada regular (a trozos) $S \subset \Omega$ es borde de un volumen V **retráctil** (la región Ω más amplia a analizar en la práctica es el dominio de regularidad del campo $\underline{u}$)

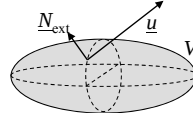
Para la demostración del teorema de Gauss se utilizan, además, regiones especiales:

- 3) Un volumen V se dice una **región elemental simétrica** si se puede describir simultáneamente como $\{(x,y,z): (x,y) \in D_3, f_3(x,y) \leq z \leq F_3(x,y)\} = \{(x,y,z): (y,z) \in D_1, f_1(y,z) \leq x \leq F_1(y,z)\} = \{(x,y,z): (x,z) \in D_2, f_2(y,z) \leq y \leq F_2(y,z)\}$, donde los D_i (proyecciones de V a los planos coordenados) son simplemente conexos.

NOTA: en la práctica, los volúmenes que se manejan son de este tipo o pueden descomponerse en uniones de volúmenes de este tipo.

d.2) Enunciado Th. de Gauss: Si $\underline{u} : \Omega \subset \mathbb{E}_3 \rightarrow \mathbb{V}_3$ es de clase 1 en Ω , y $S = \text{sup. cerr. reg. (a trozos)}$ que encierra un volumen retráctil $V / S = \partial V \subset \Omega$ entonces

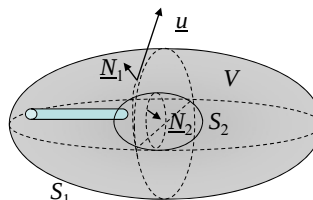
$$\iiint_V \nabla \cdot \underline{u} \, dV = \oiint_{\partial V} \underline{u} \cdot \underline{N}_{\text{ext}} \, dS$$



es decir: *el flujo de un campo regular $\underline{u}$ al exterior de una superficie cerrada retráctil, $S = \partial V \subset \Omega$, es la acumulación de la divergencia de $\underline{u}$ en el volumen V encerrado.*

• **Demostración:** i) en un paralelepípedo rectangular (ver [Apuntes](#)); ii) en un volumen V más general (una cara curvada); iii) caso general.

- **Versión generalizada:** Si V está entre dos superficies cerradas, S_1 y S_2 (no retráctil) aún se puede aplicar th. Gauss entendiendo $\partial V = S_1 + S_2$.



basta extraer de V un "tubo" (de radio $\varepsilon \rightarrow 0$) que conecte las dos superficies y aplicarlo al volumen V^* resultante: $\underline{N}_2$ deberá orientarse al interior de S_2 (exterior de V^*)

Demostración del Teorema de Gauss en $\mathbb{E}_3$.

1) Para un paralelepípedo $V = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$. En cartesianas, con $\underline{w}(P) = w_i \underline{e}_i$, se tiene, por una parte:

$$\iiint_V \nabla \cdot \underline{w} dV = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial w_3}{\partial z} \right) dx dy dz = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} (w_1(b_1, y, z) - w_1(a_1, y, z)) dy dz +$$

$$+ \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_3}^{b_3} (w_2(x, b_2, z) - w_2(x, a_2, z)) dx dz + \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} (w_3(x, y, b_3) - w_3(x, y, a_3)) dx dy$$

y por otro lado

$$\oiint_{\partial V} \underline{w} \cdot \underline{N}_{\text{ext}} dS = \dots = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} w_1(b_1, y, z) dy dz - \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} w_1(a_1, y, z) dy dz +$$

$$+ \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_3}^{b_3} w_2(x, b_2, z) dx dz - \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_3}^{b_3} w_2(x, a_2, z) dy dz + \dots \quad (\text{el resto, análogas})$$

lo que conduce a las mismas integrales dobles anteriores y prueba el teorema.

2) Para regiones elem. simétricas, la demostración se descompone en tres pasos, probando (para cada i por separado): $\iiint_V \frac{\partial w_i}{\partial x_i} dV = \oiint_{\partial V} w_i \underline{e}_i \cdot \underline{N}_{\text{ext}} dS$, en cada uno de los cuales se usa una de las posibles descripciones de V . Así, para $i = 3$, sería:

$$\iiint_V \frac{\partial w_3}{\partial z} dV = \iint_{D_3} \left[\int_{f_3(x,y)}^{F_3(x,y)} \frac{\partial w_3}{\partial z} dz \right] dx dy = \iint_{D_3} [w_3(x, y, F_3) - w_3(x, y, f_3)]$$

$$\iint_{\partial V} w_3 \underline{k} \cdot \underline{N} dS = \iint_{\{z=F_3(x,y)\}} w_3 \underline{k} \cdot \underline{N}_{F_3} dS + \iint_{\{z=f_3(x,y)\}} w_3 \underline{k} \cdot \underline{N}_{f_3} dS$$

Pero $\underline{N}_{F_3} dS = (-F'_3 \underline{i} - F'_3 \underline{j} + \underline{k}) dx dy$, $\underline{N}_{f_3} dS = (f'_3 \underline{i} + f'_3 \underline{j} - \underline{k}) dx dy$

luego $\iint_{\partial V} w_3 \underline{k} \cdot \underline{N} dS = \iint_{D_3} w_3(x, y, F_3) dx dy - \iint_{D_3} w_3(x, y, f_3) dx dy$ c.q.d.

d.3) Aplicaciones del th. de Gauss: Cálculo de flujos

1. Intercambio de integrales:

1. Cálculo de flujos a través de sup. cerradas mediante la int. de vol. de la divergencia.
2. Cálculo de flujos a través de casquetes de superficie S eligiendo V adecuado (p. ej. cerrando S con una superf. auxiliar S_1).

Ejemplo: Flujo de $\underline{v} = (z-1)(xy^2 \underline{i} + yx^2 \underline{j}) + \underline{k}$ a través del casq. de paraboloide $\{z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 1\}$ (PR4.10b)

Ejemplo: PR4.11a, PR4.12.

2. **Intercambio de superficies:** aplicando la versión generalizada del teorema para c. v. adivergentes a vol. V con burbujas (p.ej., eligiendo una sup. S^* auxiliar, sencilla, encerrada por la S dada y tomando el V comprendido entre ambas): $\int_S \underline{u} \cdot \underline{n} = \int_{S^*} \underline{u} \cdot \underline{n}$.

3. **Cálculo de volúmenes** reg. mediante flujo de $\underline{r}$ (pues $\nabla \cdot \underline{r} = 3$):

$$\text{Vol}(V) = \int_V (\nabla \cdot \frac{1}{3} \underline{r}) dV = \frac{1}{3} \int_S \underline{r} \cdot \underline{N}_{\text{ext}} dS \text{ siendo } S = \partial V.$$

Ejemplos: Flujo de $\underline{f} = \underline{r}/r^3$ al exterior del elipsoide $x^2/4 + y^2/9 + z^2/16 = 1$.

PR4.23a, 4.26b, 4.27c.

N.: el método se puede aplicar también a campos que no sean adivergentes

4. Significado físico de la divergencia de un campo vect.

Se aplica el th. de Gauss a $V \rightarrow P$ y la propiedad del promedio a la integral de superficie y se concluye :

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u}(P) = \text{flujo exterior por unidad de volumen } V \rightarrow P.$$

ya que: $\int_V \underline{\nabla} \cdot \underline{u} \, dV = (\text{t.v.m. \& } V \rightarrow P) = \underline{\nabla} \cdot \underline{u}(P) |V| = (\text{t. Gauss}) = \int_{\partial V} \underline{u} \cdot \underline{N}_{\text{ext}} \, dS$

- Ejemplo: En el movimiento de un fluido *gaseoso* la divergencia del campo de velocidades es *positiva* en las regiones en que el fluido se *expande* o descomprime; mientras que es *negativa* en las regiones en que el fluido se *comprime* o presuriza. En cambio, es *adivergente* el fluir de un líquido.

- Ejemplos:

Calcular el volumen del toro de radios a, b aplicando el teorema de Gauss.

PR4: puede hacerse el apartado b) y algunos apartados de ejercicios del apartado c).