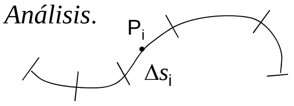
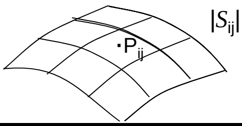
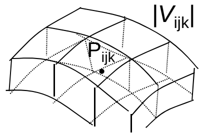
§5.1 Integrales sobre lugares geométricos

- Integrales de línea
  - a) definición matemática
  - b) cálculo por reducción a integral *simple* de Riemann
  - c) cambio de variables y otras propiedades de la integral de línea
  - d) apl. física: ***circulación*** de un campo vectorial a lo largo de una curva
- integrales de superficie
  - a) definición matemática
  - b) cálculo por reducción a una integral *doble* de Riemann
  - c) cambio de variables y otras propiedades de la integral de superficie
  - d) apl. física: ***flujo*** de un campo vectorial a través de una superficie
- integrales de volumen
  - a) definición matemática
  - b) cálculo por reducción a una integral *triple* de Riemann
  - c) cambio de variables y otras propiedades de la integral de volumen
- Propiedades generales de las integrales sobre l.g.
  - *linealidad* respecto del integrando
  - *aditividad* respecto al dominio
  - teoremas de *monotonía* y del *valor medio* de las integrales sobre l.g.

a) Definición matemática de las tres integrales

Integral de línea	Integral de superficie	Integral de volumen
Dados: 1) $C \equiv \{\underline{r} = \underline{r}(s)\}$, curva regular 2) $f : \Omega \subset \mathbb{E} \to \mathbb{R}$, campo escalar *continuo* sobre $C \subset \Omega$ = *región* del esp. afín $\mathbb{E}$.	Dados: 1) $S \equiv \{\underline{r} = \underline{r}(u, v)\}$, superficie regular 2) $f : \Omega \subset \mathbb{E} \to \mathbb{R}$, campo escalar *continuo* sobre $S \subset \Omega$	Dados: 1) $V \equiv \{\underline{r} = \underline{r}(u, v, w)\}$, sólido regular 2) $f : \Omega \subset \mathbb{E} \to \mathbb{R}$, campo escalar *continuo* sobre $V \subset \Omega$
Def.: *integral de línea del c. esc. f* sobre C: $\int_C f(P)\mathrm{d}s := \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f(P_i)(s_i - s_{i-1})$ donde el límite es análogo al utilizado en la integral *simple* de Riemann del *Análisis*.  formulación ε–δ…	Def.: *integr. de superf. de f sobre S* : $\int_S f(P)\mathrm{d}S := \lim_{M,N\to\infty} \sum_{i,j=1}^{M,N} f(P_{ij}) \lvert S_{ij} \rvert_2$ donde el límite es análogo al utilizado en la integral *doble* de Riemann 	Def.: *integr. de volumen. de f sobre V* : $\int_V f(P)\mathrm{d}V := \lim_{M,N,\tilde{N}\to\infty} \sum_{i,j,k=1}^{M,N,\tilde{N}} f(P_{ijk}) \lvert V_{ijk} \rvert_3$ donde el límite es análogo al utilizado en la integral *triple* de Riemann 

b) Cálculo: reducción a integrales de Riemann

Integral de línea	Integral de superficie	integral de volumen
Si $C \equiv \{x_i = x_i(t);\ t_0 \le t \le t_1\}$, f es integrable sobre C ⇔ $f(x(t), y(t), z(t))\,\lvert\underline{r}'(t)\rvert$ es integrable sobre $[t_0, t_1]$, y se cumple: $\boxed{\int_C f(P)\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1} f(P(t))\lvert\underline{r}'(t)\rvert\,\mathrm{d}t}$ Además el resultado de la integral es independiente de la *parametrización* de C (carácter *intrínseco* ⇔ teorema de cambio de var. en la integral simple) *Ejemplo*: Calc. $\int_C y\,\mathrm{d}s$ siendo C el octante 1º de la Ventª de Viviani $\{x^2+y^2+z^2 = R^2,\ x^2+y^2 = Rx\}$	$S \equiv \{x_i = x_i(u, v);\ (u,v) \in D\}$ resulta: f integrable sobre S ⇔ $f(.,\, x_i(u,v),..)\ \lvert\underline{r}_u' \times \underline{r}_v'\rvert$ es integrable sobre D, y se cumple: $\boxed{\int_S f\,\mathrm{d}S := \iint_D f(u,v)\lvert\underline{g}_u \times \underline{g}_v\rvert\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v}$ Además el resultado de la integral es independiente de la *parametrización* de S (carácter *intrínseco* ⇔ teorema de cambio de var. en la integral doble) *Ejemplo*: Calc. $\int_S \rho\,\mathrm{d}S$ siendo S los puntos elípticos de la sup. tórica de radios $0<b<a$ contenidos en la región $\{x>y>0\}$.	Si $V \equiv \{x_i = x_i(u, v, w);\ (u,v,w) \in \Lambda\}$ resulta: f es integrable sobre V ⇔ $f(u,v,w)\ [\underline{r}_u', \underline{r}_v', \underline{r}_w']$ es integrable sobre Λ, y se cumple: $\boxed{\int_V f\,\mathrm{d}V := \iiint_\Lambda f(u,v,w)[\underline{g}_u, \underline{g}_v, \underline{g}_w]\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w}$ Además el resultado de la integral es independiente de la *parametrización* de V (c. *intrínseco* ⇔ teorema de c. de v. integral triple) *Ejemplo*: Calc. $\int_V z\,\mathrm{d}V$ siendo V la parte de esfera sólida de radio R en el 1º octante.

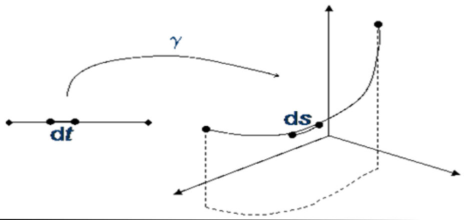
obs: factores de escala de la parametr. del l. g. en $\mathbb{E}_{3(y2)}$

•**curvas**: diferencial de longitud, ds

- $\mathrm{d}t \xrightarrow{\gamma} \mathrm{d}s = \lvert\underline{r}'(t)\rvert\mathrm{d}t = \lvert\mathrm{d}\underline{r}\rvert$
- *factor de escala lineal* o *longitudinal*:

$\lvert\underline{r}'(t)\rvert = \left\lvert\frac{\mathrm{d}\underline{r}}{\mathrm{d}t}\right\rvert = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$, transforma dt en ds

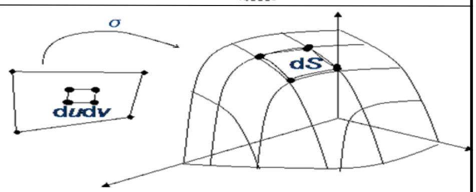
• (el mismo en $\mathbb{E}_2$)



•**superficies** dif. de área o superficie, dS

- $\mathrm{d}u\mathrm{d}v \xrightarrow{\sigma} \mathrm{d}S = \lvert\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v\rvert\mathrm{d}u\mathrm{d}v$
- *fac. de escala superficial:* $\lvert\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v\rvert$

transforma dudv en dS



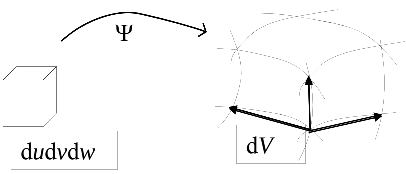
•**volúmenes**: diferencial de volumen, dV

- $\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w \xrightarrow{\Psi} \mathrm{d}V = [\underline{r}'_u, \underline{r}'_v, \underline{r}'_w]\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$
- *fac. de escala cúbico:*

$[\underline{r}'_u, \underline{r}'_v, \underline{r}'_w] = \det J(u,v,w) = \left\lvert\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right\rvert$

transforma dudvdw en dV-

• (En $\mathbb{E}_2$, el jacobiano es el dS = $\left\lvert\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right\rvert$)



c) Propiedades generales de las integrales de campos

Si $H \subset \Omega \subset \mathbb{E}$ es un l. g. regular (curva, superficie o volumen) y $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$, son *campos escalares continuos* :

1. *Linealidad* respecto al integrando

$$\int_H (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}H = \alpha \int_H f\,\mathrm{d}H + \beta \int_H g\,\mathrm{d}H \ , \quad \text{con } \alpha, \beta = \text{ctes.} \in \mathbb{R}$$

2. *Aditividad* respecto al dominio

$$\int_{H_1+H_2} f(P)\,\mathrm{d}H = \int_{H_1} f(P)\,\mathrm{d}H + \int_{H_2} f(P)\,\mathrm{d}H$$

donde $H_1 + H_2$ es una *descomposición* en *unión sin solapamientos* (medida nula de la intersección) de dos lugares geométricos de igual dimensión.

3.Monotonía* de las integrales*: $f \leq g$ en el l.g. $H \Rightarrow \int_H f\,\mathrm{d}H \leq \int_H g\,\mathrm{d}H$

4.Teorema del *valor medio* o del *promedio integral* (*continuidad* de la $\int_H$)

Si f es continuo en H existe un punto $P_m \in H$ tal que $\boxed{\int_H f(P)\,\mathrm{d}H = f(P_m)|H|}$

donde $f(P_m)$ se llama *promedio integral* de f sobre H y $|H|$ = medida (longitud, área o volumen) de H

Ejemplo: Calcular el promedio de la distancia de los puntos de una esfera maciza a uno cualquiera de sus diámetros. Mismo ejercicio, pero sólo con la superficie esférica.

d) Circulación de c. *vectoriales* a lo largo de curvas

Circulación de un c. v. $\underline{F}$ a lo largo de o sobre una curva C

1. **def.**: es la integral de la componente *tangencial* a la curva del c.v. :

   o sea, $Circ(\underline{F}, C) := \int_C \underline{F}(P) \cdot \underline{t}(P)\,\mathrm{d}s = \int_C \underline{F}(P) \cdot \mathrm{d}\underline{r}$

   N.: si C es cerrada suele indicarse $\oint_C \underline{F} \cdot \mathrm{d}\underline{r}$

2. **cálculo**: se reduce a integral de Riemann en términos de una parametrización de C:

   1. cartesianas: si $C : \{ \underline{r} = x_i(t)\,\underline{e}_i \ ; t \in [t_0, t_1] \}$, entonces:

   $$Circ(\underline{F}, C) := \int_C \underline{F}(P(t)) \cdot \mathrm{d}\underline{r} = \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{F_i(x(t), y(t), z(t)) \tfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t}_{F_1 \mathrm{d}x + F_2 \mathrm{d}y + F_3 \mathrm{d}z}$$

   2. curvilíneas: si $C : \{ u^i = u^i(t) \ , t \in [t_0, t_1] \}$, $\mathrm{d}\underline{r} = \dfrac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t}(t)\,\underline{g}_i(t)\,\mathrm{d}t$

   $\underline{F}(t) := F_i(u(t), v(t), w(t))\,\underline{g}^i(t)$ (¡covas!) y resulta:

   $$Circ(\underline{F}, C) := \int_C \underline{F}(P(t)) \cdot \mathrm{d}\underline{r} = \int_{t_0}^{t_1} F_i(t) \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t$$

3. **ejemplos**: PR4.1 y 2

e) flujo de campos *vectoriales* a través de superficies

Flujo de campo vectorial $\underline{F}$ a través de una superficie S

1. ***definición***: Es la integral de superficie sobre S de la componente *normal* a S del campo:

$$\Phi(\underline{F},S) := \int_S \underline{F}(P)\cdot\underline{N}(P)\,\mathrm{d}S := \int_S \underline{F}(P)\cdot\mathrm{d}\underline{S}(P)$$

2. ***cálculo***: se reduce a una integral doble de Riemann en términos de una parametrización de S :
   1. *cartesianas*: si S : $\{x_i = x_i(u,v)\ ;\ (u,v) \in \Omega\}$, $\underline{F}(u,v) := \underline{F}(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$; $\underline{\mathrm{d}S} = \underline{g}_u \times \underline{g}_v$ du dv . resulta:
   $$\Phi(\underline{F},S) := \int_S \underline{F}(P)\cdot\underline{\mathrm{d}S} = \iint_\Omega \left[\underline{F}(u,v),\underline{g}_u,\underline{g}_v\right]\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$
   2. *curvilíneas*: análogo, con $S = \{x^i = x^i(u,v)\}$ en curv. x^i y con el campo $\underline{F}(u,v) = f^{\,i}(x^1(u,v),x^2(u,v),x^3(u,v))\underline{g}_i(x^1(u,v),x^2(u,v),x^3(u,v))$
3. ***ejemplo***: *caudal* por S de una masa fluida Ω en mvto. estacionario, si el campo de velocidades $\underline{V} = \underline{V}(\mathrm{P})$ en todo P de Ω: $\Phi(\underline{V},S)$

Circulación y **Flujo** ***en el plano*** de campos *del plano* $\mathbb{E}_2$ a lo largo y a través de curvas, C, reg. (a trozos): circ($\underline{u}$, C) := $\int_C \underline{u}\cdot\underline{t}$ ds; flujo($\underline{u}$, C) = $\int_C \underline{u}\cdot\underline{n}$ ds

Ejemplos y ejercicios

- Flujo a través de una sup. de nivel $\phi(x,y,z)=0$.
  - aplicación para $\underline{u} = x\,\underline{r}$, $S = \{x^2 + y^2 + z^2 = a^2;\ x,y,z \geq 0\}$ (Ap. ej.4.1-7)
- Ejercicio: Si $\underline{r} = \underline{r}(t)$ es la ec. vc. de una trayectoria C y $\underline{v}(t)$ es su velocidad, calcular la circulación de $\underline{v}(t)$ a lo largo de C. Aplicarlo a dos espiras de la hélice de radio R y paso p.
- Puede hacerse el apartado a) de la PR4: nn.1 a 5 y 7
- PR4.3: caso S_5: $\Phi(\underline{r}, S)$ si $S = \{x^2+y^2=1;\ x, y \geq 0\ ,\ 0 \leq z \leq 2\}$
- PR4.6: deducir la expresión del campo $\underline{\mathbf{v}}$ en cilíndricas. Calcular $\underline{\mathbf{w}} := \mathrm{rot}(\mathrm{rot}(\underline{\mathbf{v}}))$. (los apartados 2 y 3, mejor en la sec. sigte. como aplicación de los teoremas fundamentales)