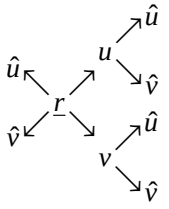
demostración: Hay que probar que $\underline{K}$ no depende de la parametrización de *S*, es decir que los escalares $\Gamma^3{}_{\alpha\beta}(u,v)$ cambian como las componentes *covariantes* de un *tensor intrínseco* si se cambia la parametrización de la superficie.

Se supone, pues, una segunda parametrización regular de *S*, dada por $\{\hat{\sigma}(\hat{u},\hat{v})\}$, introducida mediante unas relaciones $u^\alpha = u^\alpha(\hat{u},\hat{v})$, que permiten representar la cadena:



Se obtiene una nueva base natural, $\{\hat{\underline{g}}_{\hat{u}}\ ,\ \hat{\underline{g}}_{\hat{v}}\} \equiv \{\hat{\underline{g}}_\alpha\}$, verificando: $\hat{\underline{g}}_\alpha = \dfrac{\partial u^\beta}{\partial \hat{u}^\alpha}\underline{g}_\beta$. Y, además, el vector normal se conservará (admitiendo la misma orientación de las dos bases), o sea: $\underline{N}(u,v) = \underline{N}(\hat{u},\hat{v})$. Y se tendrá:

$$\hat{\Gamma}^3_{\alpha\beta} = \frac{\partial \hat{\underline{g}}_\alpha}{\partial \hat{u}^\beta}\cdot\underline{N} = \left[\frac{\partial}{\partial \hat{u}^\beta}\left(\frac{\partial u^\gamma}{\partial \hat{u}^\alpha}\underline{g}_\gamma\right)\right]\cdot\underline{N} = \left[\frac{\partial^2 u^\gamma}{\partial \hat{u}^\beta \partial \hat{u}^\alpha}\underline{g}_\gamma + \frac{\partial u^\gamma}{\partial \hat{u}^\alpha}\frac{\partial \underline{g}_\gamma}{\partial \hat{u}^\beta}\right]\cdot\underline{N} =$$

$$= \underline{0} + \frac{\partial u^\gamma}{\partial \hat{u}^\alpha}\frac{\partial \underline{g}_\gamma}{\partial \hat{u}^\beta}\cdot\underline{N} = \frac{\partial u^\gamma}{\partial \hat{u}^\alpha}\frac{\partial \underline{g}_\gamma}{\partial u^\eta}\frac{\partial u^\eta}{\partial \hat{u}^\beta}\cdot\underline{N} = \frac{\partial u^\gamma}{\partial \hat{u}^\alpha}\left(\Gamma^\delta{}_{\gamma\eta}\underline{g}_\delta + \Gamma^3{}_{\gamma\eta}\underline{n}\right)\frac{\partial u^\eta}{\partial \hat{u}^\beta}\cdot\underline{N} =$$

$$= \underline{0} + \boxed{\frac{\partial u^\gamma}{\partial \hat{u}^\alpha}\Gamma^3{}_{\gamma\eta}\frac{\partial u^\eta}{\partial \hat{u}^\beta} = \hat{\Gamma}^3_{\alpha\beta}}$$

De esta manera se ha probado:

$$\hat{\Gamma}^3_{\alpha\beta} = \frac{\partial u^\gamma}{\partial \hat{u}^\alpha}\Gamma^3{}_{\gamma\eta}\frac{\partial u^\eta}{\partial \hat{u}^\beta} \Leftrightarrow \left[\hat{\Gamma}^3_{\alpha\beta}\right] = \left[\frac{\partial(u,v)}{\partial(\hat{u},\hat{v})}\right]^t\cdot\left[\Gamma^3{}_{\gamma\eta}\right]\cdot\left[\frac{\partial(u,v)}{\partial(\hat{u},\hat{v})}\right]$$

Se observa que las matrices que realizan la transformación de los coeficientes Γ's en los $\hat{\Gamma}$'s, es decir $\left[\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(\hat{u},\hat{v})}\right]$, coincide con la matriz del cambio de base:

$$C = \left[\begin{array}{cc} | & | \\ \hat{\underline{g}}_{\hat{u}} & \hat{\underline{g}}_{\hat{v}} \\ | & | \end{array}\right]_{\{\underline{g}_\gamma\}} = \left[\frac{\partial(u,v)}{\partial(\hat{u},\hat{v})}\right]$$

de manera que los coeficientes $\Gamma^3{}_{\alpha\beta}$ cambian siguiendo la ley de transformación de las *componentes covariantes* de un tensor de segundo orden, según se estudió en §1.3. Esto justifica la *definición* del *tensor de curvatura* mediante su expresión covariante en la base natural de superficie, es decir:

$$\underline{\mathbf{K}} = \mathrm{K}_{\alpha\beta}\,\underline{g}^\alpha\otimes\underline{g}^\beta := \Gamma^3_{\alpha\beta}\,\underline{g}^\alpha\otimes\underline{g}^\beta \qquad \text{c.q.d. \#.}$$