

4.2 Superficies en el espacio

4.2 a) Parametrización

• **Definición:** Una superficie regular (de clase C^m) es la *im. biy.* en \mathbb{E}_3 de una región bidim. $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ mediante una func. regular σ (de clase C^m) / $(u,v) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \sigma(u,v) \in S$ o sea, $S := \sigma(\mathcal{D})$; $\underline{O}\sigma(u,v) := \underline{r}(u,v) = x_i(u,v)e_i$
 El par (σ, \mathcal{D}) se llama una parametrización de S ; (u,v) se llaman coordenadas de superficie del punto $P = \sigma(u,v)$ en esa parametrización; \mathcal{D} se llama dominio de la parametrización.

• **Ejemplos**

- Parametrización cartesiana de Monge: Si $z = f(x,y)$, entonces $S: \{x = u, y = v, z = f(u,v)\}$. Así, el hiperboloide de ec. $z = x^2 - y^2$, será: $\{x = u, y = v, z = u^2 - v^2\}$, ...
- Parametrización curvilínea: si se parametriza en unas coordenadas curvilíneas: $x^i = x^i(u,v)$. El cono del ejercicio PR3.3 parametrizado en cilíndricas: $\{\rho = au, \theta = v, z = u; u > 0, v \in [0, 2\pi[\}$.

4.2 b) elementos geométricos de una superficie

b1) Líneas coordenadas

• **Definiciones:** u -línea y v -línea coordenadas de S por un punto $\sigma(u_0, v_0)$
 $L_u = \sigma(\{u = t + u_0, v = v_0\})$ y L_v , análoga

b2) Bases de superficie: Dada S por $(\sigma, (u,v) \in \mathcal{D})$, $P \in S$ se definen:

1. Base natural de superficie asociada a la parametrización $\{\underline{g}_\alpha(P)\}$:

$$\underline{g}_\alpha(u,v) = \frac{\partial \underline{r}}{\partial u^\alpha}(u,v) = \frac{\partial x_i(u,v)}{\partial u^\alpha} \underline{e}_i \quad (\text{es base tangencial a } L_u \text{ y } L_v \text{ en } \forall P)$$

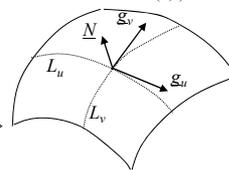
2. Matriz de Gram de superficie de la base natural (será la matriz *cova-cova* de la Iª F.F.):

$$\underline{g}_{\alpha\beta}(u,v) = \underline{g}_\alpha(u,v) \cdot \underline{g}_\beta(u,v); \mathbf{G}(u,v) = [\underline{g}_{\alpha\beta}(u,v)] = \begin{bmatrix} E(u,v) & F(u,v) \\ F(u,v) & G(u,v) \end{bmatrix}_{(u,v)}$$

$$\mathbf{g}(u,v) := \det[\mathbf{G}(u,v)] = |\underline{g}_u(u,v) \times \underline{g}_v(u,v)|^2$$

3. Vec. normal \underline{N} y triedro de superficie:

$$\underline{N}(u,v) = \frac{\underline{g}_u \times \underline{g}_v}{|\underline{g}_u \times \underline{g}_v|}; \text{triedro de } S: \{\underline{g}_u, \underline{g}_v, \underline{N}\}$$



4. Plano tangente = plano por cada P, de vector *característico* $\underline{N}(P)$

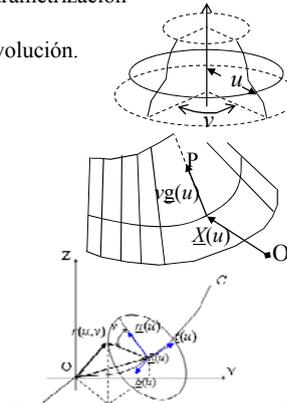
5. Recta normal = recta por P, de vc. *director* $\underline{N}(P)$

6. Base natural recíproca de superficie $\{\underline{g}^u, \underline{g}^v\}$ / $\begin{cases} \underline{g}_\alpha \cdot \underline{g}^\beta = \delta_\alpha^\beta \\ \underline{g}^\beta \cdot \underline{N} = 0 \end{cases}$

7. Campos de superficie: $\underline{\nu} = \nu^\alpha \underline{g}_\alpha$ ó $\underline{\mathbf{T}} = t^\alpha_\beta \underline{g}_\alpha \otimes \underline{g}^\beta = t^\alpha_\beta \underline{g}^\alpha \otimes \underline{g}^\beta$ y tamb. con componentes normales a S .

Ejemplos: casos notables de parametrización

- **Parametrización de Monge**
 - A partir de la ecuación cartesiana, explícita $\{z = f(x, y)\}$ o implícita $\{F(x, y, z) = 0\}$: Ejemplo con MatLab: [paraboloide hiperbólico](#); PR3.16-3
- **Superficies de revolución**
 - Definición geométrica conocida: generatriz plana, eje de revolución, meridianos y paralelos
 - Parametrización cilíndrica (en sistema de referencia con OZ = eje de revolución; es análogo en otros casos): $\{x = u \cos v, y = u \sin v, z = f(u), a \leq u \leq b, 0 \leq v \leq 2\pi\}$, donde f corresponde a la generatriz (figura). líneas coordenadas: meridianos y paralelos (\rightarrow parametrización ortogonal de S)
 - Alternativas: i) $\{x = f(u) \cos v, y = f(u) \sin v, z = u\}$. ii) Otro eje de revolución.
 - Ejemplos: El [cono](#) recto como sup. de rev.; PR3.16-4 y 5, 22a, 23.
- **Superficies regladas**
 - Definición: *directriz*, $\underline{X}(u)$; *generatriz* de v . *director* (u)
 - en cada punto de la directriz (fig)
 - Parametrización reglada: $\underline{r}(u, v) = \underline{X}(u) + v \underline{g}$
 - Sup. regladas *desarrollables*: caracterización analítica
 - Líneas coordenadas de la parametrización reglada
 - Ejemplos: el [cono](#) recto como superficie [reglada](#)
 - el [helicoide](#) recto (PR3.26-1y2); sup. cilíndricas generales;
 - PR3.17, los apartados señalados del PR3.16
 - El helicoide desarrollable: [param.](#), [figura1](#), [figura2](#), [figura3](#).
- **Otros casos: superficies tubulares**
 - [Ejemplo](#), propuesto en examen sept. 2008; PR3.19, 29B



3

4.2 c) Medir sobre S: la 1ª Forma Fundamental (IFF)

- **Los objetivos a medir sobre una superficie S**
 - *módulos y ángulos* de campos vectoriales de superficie, *longitudes de arcos de curva* sobre S , *áreas de casquetes* $S^* \subset S$.
 - en todos los casos se aplica directamente la 1ª FF actuando sobre c . de sup.
- **Fundamento: tensor métrico de superficie**

$$\underline{1}(u, v) := g_{\alpha\beta}(u, v) \underline{g}^\alpha \otimes \underline{g}^\beta; \mathbf{G}(u, v) = [g_{\alpha\beta}(u, v)] = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$$
- **Cálculo de módulos y ángulos de vectores de superficie**

Si los c.v. $\underline{f}, \underline{h}$ definidos sobre $S / \underline{f}(u, v) = f^\alpha \underline{g}_\alpha$ y $\underline{h}(u, v) = h^\alpha \underline{g}_\alpha$ entonces

$$|\underline{f}|^2 = \underline{f} \cdot \underline{f} = f^\alpha g_{\alpha\beta} f^\beta = [f^1 \ f^2] \cdot \mathbf{G} \begin{bmatrix} f^1 \\ f^2 \end{bmatrix}$$

$$\cos(\underline{f}, \underline{h}) = \frac{\underline{f} \cdot \underline{h}}{|\underline{f}| |\underline{h}|} = \frac{f^\alpha g_{\alpha\beta} h^\beta}{\sqrt{f^\alpha g_{\alpha\beta} f^\beta} \sqrt{h^\alpha g_{\alpha\beta} h^\beta}}$$

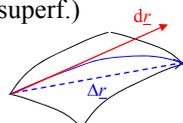
Si los campos tienen componente normal, se usa el triedro $\{\underline{g}_\alpha, \underline{N}\}$ y el tensor métrico correspondiente, o sea $\begin{bmatrix} E & F & 0 \\ F & G & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(u,v)}$

4

•Elemento diferencial de longitud sobre una superficie: ds

- curva $C \subset S / \underline{r} = \underline{r}(t)$ está dada por $u^\alpha = u^\alpha(t)$ (parametrización de superf.)

Por la r. de la c^a.: $t \leftarrow \underline{r} \begin{matrix} \nearrow^{u \rightarrow t} \\ \searrow^{v \rightarrow t} \end{matrix} \Rightarrow \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{du}{dt} \underline{g}_u + \frac{dv}{dt} \underline{g}_v$



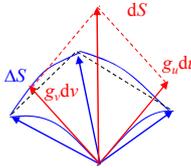
luego: $ds = |d\underline{r}| = |du^\alpha \underline{g}_\alpha| = \sqrt{du^\alpha g_{\alpha\beta} du^\beta} = \sqrt{E(du)^2 + 2F du dv + G(dv)^2}$

- Primera forma fundamental: la def. clásica (**Gauss** (1777-1855)):

$$(ds)^2 = du^\alpha g_{\alpha\beta} du^\beta = E(du)^2 + 2F du dv + G(dv)^2 := \mathbf{I}(du, dv)$$
 No depende de la parametrización (cambia como 1 al c. de parámetros)
- Longitud de arco de curva: $\text{Long} = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{du^\alpha g_{\alpha\beta} du^\beta}$
 donde se busca expresar el arco $P_1 P_2$ como $C = \sigma(\{u^\alpha = u^\alpha(t), t_1 < t < t_2\})$

•Elemento diferencial de área sobre una superficie: dS

$$dS = |\underline{g}_u \times \underline{g}_v| du dv = \sqrt{\det[g_{\alpha\beta}]} du dv := \sqrt{EG - F^2} du dv$$

$$\text{Área}(S^*) = \text{Área}(\sigma(D^*)) = \int_{S^*} dS := \iint_{D^*} |\underline{g}_u \times \underline{g}_v| du dv$$


donde se buscará expresar $S^* = \sigma(D^*)$, con $D^* = \{(u, v) \in D : a_1 < u < a_2, b_1(u) < v < b_2(u)\}$ o similar.

Ejemplos de aplicación de la I^a.F.F.

- Ángulos y módulos de vectores de superficie
 - Ejemplo: Ángulo de la ventana de Viviani con el paralelo de la sup. esférica en cada punto. ¿Bajo qué ángulo se corta la curva a sí misma sobre el ecuador?
- Longitudes de arcos de curva sobre superficies
 - Longitud de la ventana de Viviani (llegar a una integral a aproximar)
- Área de un casquete de superficie
 - Expresar los elementos diferenciales de área de: i) una superficie esférica; ii) una superficie cilíndrica recta circular; iii) una superficie cónica
 - Expresar $S^* = \sigma(D^*)$, con $D^* = \{(u, v) : a_1 < u < a_2, b_1(u) < v < b_2(v)\} \subset D$ (o alternativa análoga) en los casos que siguen:
 - Área encerrada por la ventana de Viviani en el hemisferio superior.
 - Área abarcada por una pechina sobre una esfera de radio R: cálculo
 - nota: en PR4: reaparecerán problemas de áreas de casquetes del Capítulo 5°
 - Pueden hacerse: PR3.18, 3.19, 3.21, 3.22, 3.27-1y2, 3.29a y 3.29b-1y2.

4.2 d) Derivación del triedro de superficie.

d1) Derivación de la base: símb. de Christoffel de superficie.

- **definiciones** de los símbolos: son *valores nominales* de las componentes, en el triedro $\{\underline{g}_\alpha, \underline{N}\}$ de S , de las derivadas de la propia base, o sea:

$$\frac{\partial \underline{g}_\alpha}{\partial u^\beta} := \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \underline{g}_\gamma + \Gamma^3_{\alpha\beta} \underline{N} \quad ; \quad \frac{\partial \underline{N}}{\partial u^\beta} = \Gamma^\gamma_{3\beta} \underline{g}_\gamma$$
- **propiedades** :
 1. **Simetría**: por teorema de Schwartz: $\Gamma^k_{\alpha\beta} = \Gamma^k_{\beta\alpha}$ (igualdad de derivadas 2^{as} cruzadas)
 2. $|\underline{N}| = 1 = \text{cte.} \Rightarrow \partial_\beta \underline{N} \perp \underline{N} \Rightarrow \Gamma^3_{3\beta} = 0$
 3. los símbolos $\Gamma^3_{\alpha\beta} := K_{\alpha\beta}$ son las componentes *covas* de un tensor de 2º orden, el **tensor de curvatura**, \underline{K} , de S , porque cambian como lo hacen las componentes covariantes de los tensores: **dem** ...
 4. Además, los símbolos $\Gamma^\alpha_{3\beta}$ se relacionan con las comptes. K^α_β del mismo tensor \underline{K} , pues se cumple: $\Gamma^\alpha_{3\beta} = -K^\alpha_\beta = -g^{\alpha\eta} \Gamma^3_{\eta\beta}$: **dem** ...
 Así se define: $\underline{K}(u,v) = K_{\alpha\beta}(u,v) \underline{g}^\alpha \otimes \underline{g}^\beta = K^\alpha_\beta(u,v) \underline{g}_\alpha \otimes \underline{g}^\beta$
 como el **tensor de curvatura** de S en cada punto. La forma covaria se llama también **IFFF**.
- **cálculo**: se desprende de la definición y del modo de calcular comptes.:

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \underline{g}^\gamma \cdot \frac{\partial \underline{g}_\alpha}{\partial u^\beta}; \quad \Gamma^3_{\alpha\beta} = \underline{N} \cdot \frac{\partial \underline{g}_\alpha}{\partial u^\beta} = -\underline{g}_\alpha \cdot \frac{\partial \underline{N}}{\partial u^\beta} \rightarrow \text{disposic. matricial}$$
- **Ejemplo**: Símbolos del helicoido recto (otros ejemplos en PR3.26: y en otros problemas de PR3, cuando se pida sólo la **IFFF**, como ejercicio, calcular todos los símbolos) 7

- una **disposición matricial** para los cálculos de los símbolos de Christoffel de S :

$$J = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \underline{g}_u & \underline{g}_v & \underline{N} \\ | & | & | \end{bmatrix}_{\{\underline{e}_i\}} \Rightarrow J^{-1} = \begin{bmatrix} - & \underline{g}^u & - \\ - & \underline{g}^v & - \\ - & \underline{N} & - \end{bmatrix}_{\{\underline{e}_i\}} \Rightarrow [\Gamma^k_{i\beta}]_{k=f, i=c} = J^{-1} \cdot \frac{\partial J}{\partial u^\beta}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} | & | & | \\ \frac{\partial \underline{g}_u}{\partial u^\beta} & \frac{\partial \underline{g}_v}{\partial u^\beta} & \frac{\partial \underline{N}}{\partial u^\beta} \\ | & | & | \end{bmatrix}_{\{\underline{g}_\alpha, \underline{N}\}} = \begin{bmatrix} \Gamma^1_{1\beta} & \Gamma^1_{2\beta} & \Gamma^1_{3\beta} \\ \Gamma^2_{1\beta} & \Gamma^2_{2\beta} & \Gamma^2_{3\beta} \\ \Gamma^3_{1\beta} & \Gamma^3_{2\beta} & 0 \end{bmatrix}; \quad [\Gamma^3_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \Gamma^3_{11} & \Gamma^3_{12} \\ \Gamma^3_{21} & \Gamma^3_{22} \end{bmatrix} = [K_{\alpha\beta}]; [K^\alpha_\beta] = \begin{bmatrix} -\Gamma^1_{31} & -\Gamma^1_{32} \\ -\Gamma^2_{31} & -\Gamma^2_{32} \end{bmatrix}$$

De las dos matrices que se obtengan ($\beta = 1, 2$) se pueden extraer los símbolos:

$\Gamma^3_{\alpha\beta} := K_{\alpha\beta} =$ *componentes covariantes de superficie* del **tensor de curvatura** \underline{K} de S ; Salvo el signo. También se obtienen las *c*omponentes mixtas del mismo \underline{K} .

También pueden calcularse directamente: $\Gamma^3_{\alpha\beta} = \underline{N} \cdot \frac{\partial \underline{g}_\alpha}{\partial u^\beta}$ (sin J^{-1})

Los símbolos de Christoffel restantes, $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$, se disponen matr. a conveniencia

- Métodos alternativos para calcular $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ a partir de la matriz de Gram $\mathbf{G}(u,v)$

Si $A_\beta := \partial_\beta \mathbf{G} = \partial \mathbf{G} / \partial u^\beta$; $B_\beta = [2 \text{ cols. } \beta^a \text{ de las } A_\beta\text{'s}]; C_\beta = (B_\beta)'$:

$$[\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}]_{\gamma=f, \alpha=c} = \frac{1}{2} G^{-1} \cdot (A_\beta + B_\beta - C_\beta) \quad [\text{donde " \cdot " , producto matricial ordinario}]$$

También se pueden disponer con $\gamma =$ **matriz**: $[\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}]_{\alpha=f, \beta=c} = \frac{1}{2} G^{-1} * \begin{bmatrix} [B_1 + C_1 - A_1] \\ [B_2 + C_2 - A_2] \end{bmatrix}$ 8

[donde "*" indica algoritmo *combinación lineal de cajas*]

d2) Ejemplos de Símbolos de Christoffel y IIFF de sup.

- Superficie de revolución
 - Superficie tórica de radios $a > b$.
 - Si $\sigma(u,v) \equiv \{x = u \cos v, y = u \sen v, z = f(u)\}; 0 < u, 0 < v < 2\pi\}$, calcular los símbolos de Christoffel de la superficie en esa parametrización (PR3.27)
solución:
 - Ejemplo: PR3.18 (la catenoide)
- Una superficie reglada: el helicoido recto
 - Si $\underline{r}(u,v) = \underline{X}(u) + v \underline{g}(u) = (R-v)\cos u \hat{i} + (R-v)\sen u \hat{j} + cu \hat{k}$ es la parametrización reglada del *helicoido recto* [*directriz*, la hélice $\underline{X}(u)$; *generatrices* en la dirección de la *normal principal* de la hélice en cada punto]. Calcular los símbolos de Christoffel de S en la forma $[\Gamma^k_{ij}]_{k=f, i=c, \beta=m}$.
solución: (ver PR3.26)
parm. cil.: $\{\rho=u, \theta=v\} \Leftrightarrow \{x = u \cos v, y = u \sen v, z = v; u > 0, v \in [0, 2\pi]\}$
IFF: $\underline{\mathbf{1}}(u,v) = \underline{g}^u \otimes \underline{g}^u + (1+u^2) \underline{g}^v \otimes \underline{g}^v$ (covas puras de superficie)
IIFF: $\underline{\mathbf{K}}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} (\underline{g}^u \otimes \underline{g}^u + \underline{g}^v \otimes \underline{g}^v)$ (covas puras de sup.)

9

4.2 e) Curvat^a de una superf.: tensor curv^a. y II^a FF

•1. Concepto matemático :

- La curvatura en \mathbb{E}_{302} de una *curva* $C : \{ \underline{r} = \underline{r}(s) \}$ es una *magnitud vectorial*, que incluye *módulo* (cantidad, el escalar κ) y *dirección* (*normal principal* de C en cada P) y que se da por el vector $\underline{\kappa} := (\hat{t})'_s = (\underline{r})''_{ss} := \kappa \hat{n}$
- La curv. de una *superficie* es una *magn. tensorial*, que indica cuánto dobla S en un punto P en cada dir. *tangencial*, \underline{e} : Euler (1707-1783) considera para cada \underline{e} la curva $C(\underline{e}) := S \cap \Pi(P; \underline{e}, \underline{N})$, la sec. plana $\perp S$ según \underline{e} (fig.); si $\hat{\underline{\kappa}} = \hat{\kappa} \hat{n}$ es el vc. curv^a. de $C(\underline{e})$, se define la *curv^a. norm. de S* en la dir. \underline{e} por: $\kappa_n(\underline{e}) := \hat{\kappa}$

Obs.: En general, si $C \equiv \{u^\alpha = u^\alpha(s)\} \subset S$, resulta:

$$\hat{\underline{\kappa}} = \frac{d}{ds} \left(\frac{du^\alpha}{ds} \underline{g}_\alpha \right) = \frac{d^2 u^\alpha}{ds^2} \underline{g}_\alpha + \frac{du^\alpha}{ds} \frac{\partial \underline{g}_\alpha}{\partial u^\beta} \frac{du^\beta}{ds} =$$

$$= \underbrace{\left[\frac{d^2 u^\alpha}{ds^2} + \left(\frac{du^\alpha}{ds} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{du^\beta}{ds} \right) \right]}_{:= \hat{\underline{\kappa}}_g} \underline{g}_\alpha + \underbrace{\left(\frac{du^\alpha}{ds} \Gamma^3_{\alpha\beta} \frac{du^\beta}{ds} \right)}_{:= \hat{\underline{\kappa}}_n} \underline{N} =$$

$$\Rightarrow \hat{\underline{\kappa}}_n = \left(\frac{du^\alpha}{ds} \Gamma^3_{\alpha\beta} \frac{du^\beta}{ds} \right) \underline{N} = \underbrace{\left(\hat{t} \cdot \underline{\mathbf{K}} \cdot \hat{t} \right)}_{:= \kappa_n(\text{de } S)} \underline{N}; K_{\alpha\beta} = \Gamma^3_{\alpha\beta}$$

\therefore Teor.: todas las curvas de S que pasen por P en la misma dirección, \underline{e} , comparten la misma curvatura normal, $\kappa_n(\underline{e})$, que se llama *curv. normal de S* en esa dirección, \underline{e} , y en cada P regular. 10

•2. Definición de tensor de curvatura :

- Como ha resultado que $\kappa_n(\underline{e}) = e^\alpha \Gamma^3_{\alpha\beta} e^\beta$ es una forma cuadrática, puesto que los $\Gamma^3_{\alpha\beta}$ son las componentes covas de un tensor de superficie (\rightarrow 3ª propiedad vista de los simb. de Christoffel, ya vista) se *define* en cada punto regular $P(u, v) = \sigma(u, v)$ el *campo tensorial de superficie*:

$$\underline{\mathbf{K}}(u, v) = K_{\alpha\beta}(u, v) \underline{g}^\alpha \otimes \underline{g}^\beta / K_{\alpha\beta} := \Gamma^3_{\alpha\beta}(u, v),$$
 llamado *tensor de curvatura* de S .
- La forma cuadrática $\kappa_n(\underline{e}) = \underline{e} \cdot \underline{\mathbf{K}} \cdot \underline{e}$, se llama **IIª FF de S** , en cada P y para cada dirección tangencial, \underline{e} .

•3. Análisis del tensor: $\underline{\mathbf{K}}$ es simétrico \Rightarrow admite base propia ortonormal

1. autovalores de $\underline{\mathbf{K}}$: se llaman **curvaturas principales**, k_1 y k_2 ; son la máxima y la mínima curvatura normal de S en P
2. autovectores unitarios de $\underline{\mathbf{K}}$: se llaman **direcs. principales de curvatura**, \underline{d}_1 y \underline{d}_2 ; son las dir. tangenciales en que se obtienen las secciones normales de máxima y mínima curvatura en el punto; forman una base tangencial ortonorm. llamada *base principal* de S
3. la representación espectral de $\underline{\mathbf{K}}$ en su base propia de las dir. ppales. Se llama representación principal de $\underline{\mathbf{K}}$:

$$\underline{\mathbf{K}}(u, v) = k_1(u, v) \underline{d}_1(u, v) \otimes \underline{d}_1(u, v) + k_2(u, v) \underline{d}_2(u, v) \otimes \underline{d}_2(u, v)$$
 (con $k_\alpha = \text{curv. ppales.}$)
 y resulta: **Th. de Euler**: $\underline{e} = \cos\theta \underline{d}_1 + \sin\theta \underline{d}_2 \Rightarrow \kappa_n(\underline{e}) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta$
4. una parametrización de S se dice parametrización principal si en ella la **IIFF** es diagonal \Leftrightarrow la base natural normalizada es base principal de la superficie.

11

4. Clasificación de los puntos de una superficie

•Llamando: *curv. media*, $K_M := \frac{1}{2} \text{tr}(\underline{\mathbf{K}}) = \frac{1}{2}(k_1+k_2)$; *curv. total o de Gauss*, $K_G := \det(\underline{\mathbf{K}}) = k_1 k_2$, de S en P , se clasifican los puntos de S según la **IIFF**, asociada intrínsecamente al tensor curvatura $\underline{\mathbf{K}}$. Así:

- puntos elípticos**: 2ªFF *definida* (strict. pos. o neg.) $\Leftrightarrow K_G > 0 \rightarrow$ curvas normales $\neq 0$ y del mismo signo en toda direc. tang. \underline{e} ($S = \text{sup. cóncava}$ o de un mismo lado del pl. tangente \rightarrow figura 1ª)
- puntos parabólicos**: 2ªFF *semidefinida* $\Leftrightarrow K_G = 0, K_M \neq 0 \rightarrow$ como antes, salvo en una dir. ppal. \underline{d} en que $k = \kappa_n(\underline{d}) = 0$ (figura 2ª)
- puntos hiperbólicos**: 2ªFF *indefinida* $\Leftrightarrow K_G < 0 \rightarrow \exists! \underline{\delta}_1, \underline{\delta}_2 := \text{dir. asintóticas}$ de S en $P / \kappa_n(\underline{\delta}_\alpha) = 0$; son las dir. de la curva intersecc. de S con su propio plano tangente en P (\rightarrow figura 3ª)
- puntos planos**: $K_G = 0 = K_M \rightarrow$ superficie "achatada" contra su plano tangente (se presenta cuando hay un contacto de orden mayor que 1 entre S y su plano tangente en P (\rightarrow figura 4ª)

•nota: la indicatriz de Dupin explica un origen intuitivo de estos nombres

•Ejercicios: 1) Clasificar los puntos del paraboloido de revolución $z = x^2 + y^2$.
 2) Clasificar los puntos del helicoido recto

12

Ejemplos y ejercicios de superficies

•Ejemplos de aplicación de la IFF y IIF

- La superficie tórica (sup. de rev.): clasificar sus puntos.
- El helicoido recto (sup. reglada): PR3.26

•**Problema:** Dada $S \equiv \{z = f(x,y)\}$ hallar los coeficientes de la I^aFF y II^aFF en términos de las derivadas parciales de f , denotando:

$$p = f'_x, \quad q = f'_y, \quad R = f''_{xx}, \quad S = f''_{xy}, \quad T = f''_{yy}$$

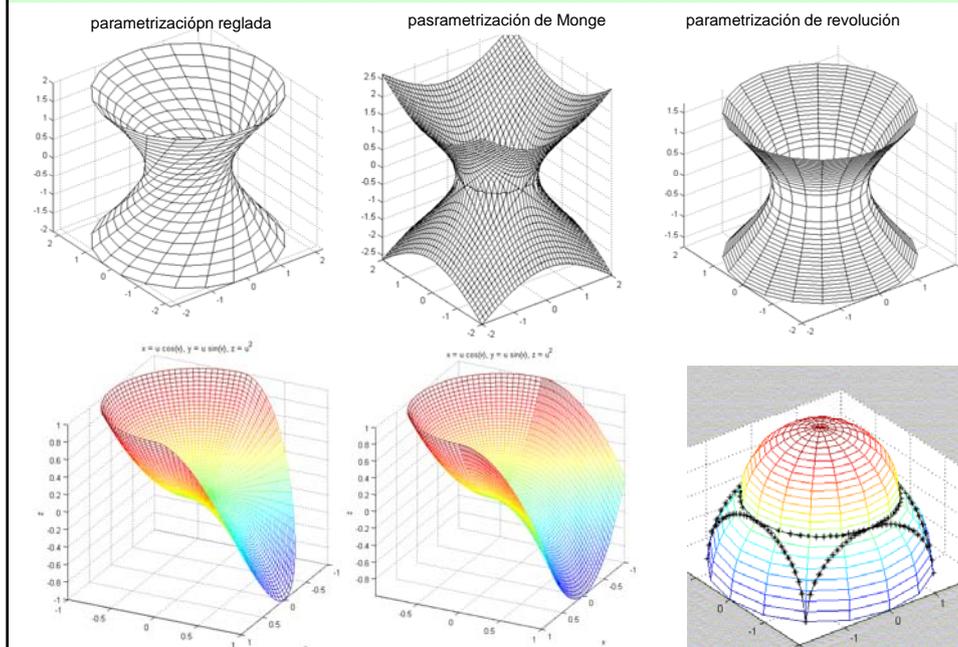
Calcular dS , \underline{dS} , \underline{K} , K_M y K_G en dicha S .

•Otros ejercicios de superficies que se pueden hacer:

- 1) Los problemas de curvas PR3.3 y 3.15 pueden hacerse también tratando la curva incógnita como curva de la superficie cónica dada en el enunciado, en la forma $\{u = u(s) = ?, v = v(s) = ?\} / \underline{t}(s) \cdot \underline{e}_u = \cos\alpha$ ó $\underline{t}(s) \cdot \underline{k} = \cos\alpha \dots$
- 2) Pueden hacerse PR3.18, 3.20i y ii, 3.24, 3.25, 3.26i a v, 3.28i a iii, En general, en PR3.21 a 3.25, los apartados de aplicaciones de la IFF y los que piden la IIF o la curvatura normal de una curva dada, $C \subset S$ o clasificar los puntos de S .

13

Figuras sobre parametrización de superficies



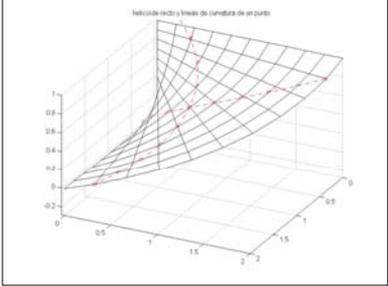
Otras figuras de superficies



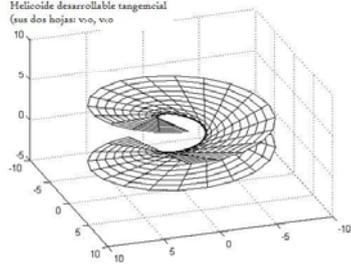
Carl F. Gauss (1777-1855)



Leonard Euler (1707-1783)

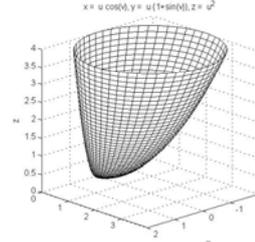


helicoid recto y líneas de curvatura en un punto



Helicoid desarrollable tangencial
(sus dos hojas: $v=0$, $v=\pi$)

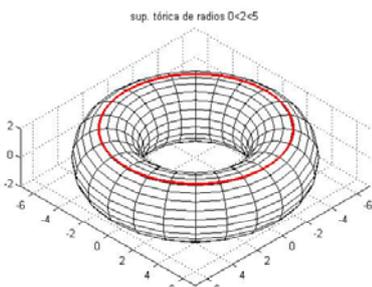
helicoid tangencia (desarrollable)



$x = u \cos(v), y = u(1 + \sin(v)), z = u^2$

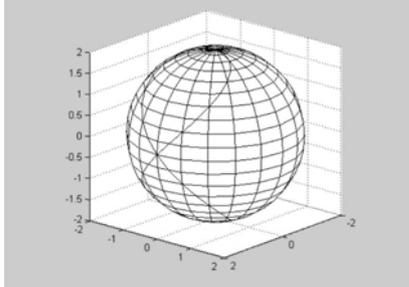
superficie tubular de directriz parabólica

15

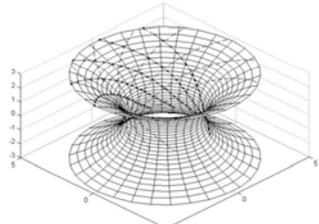


sup. tórica de radios $0 < 2 < 5$

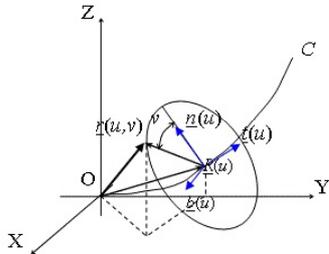
Superficie tórica y sus puntos parabólicos



superficie esférica y ventana de Viviani



Catenoid de revolución y sus líneas principales de curvatura



Parametrización de una superficie tubular de directriz dada, C.

16