

Las componentes contra-cova, K^α_{β} , del tensor $\underline{\mathbf{K}}$ se relacionan con los símbolos $\Gamma^\alpha_{3\beta}$ = componentes contras (en el triedro de S) de $\frac{\partial \underline{N}}{\partial u^\beta}$, de forma

que:

$$\Gamma^\alpha_{3\beta} = -K^\alpha_{\beta}$$

demostración: Para comprobarlo, puede procederse como sigue:

Se observa que: $\frac{\partial \underline{N}}{\partial u^\beta} \cdot \underline{g}_\alpha = (\Gamma^\gamma_{3\beta} \underline{g}_\gamma) \cdot \underline{g}_\alpha = g_{\alpha\gamma} \Gamma^\gamma_{3\beta}$

y, teniendo presente que

$$\underline{N} \cdot \underline{g}_\alpha = 0 \Rightarrow \frac{\partial \underline{N}}{\partial u^\beta} \cdot \underline{g}_\alpha + \frac{\partial g_\alpha}{\partial u^\beta} \cdot \underline{N} = 0,$$

deducimos:

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\gamma} \Gamma^\gamma_{3\beta}$$

Despejando $\Gamma^\gamma_{3\beta}$ multiplicamos la igualdad por $-g^{\eta\alpha}$, y resulta

$$-g^{\eta\alpha} \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = g^{\eta\alpha} g_{\alpha\gamma} \Gamma^\gamma_{3\beta} = \delta^\eta_\gamma \Gamma^\gamma_{3\beta} = \Gamma^\eta_{3\beta}$$

de modo que se obtiene finalmente, renombrando los índices:

$$\Gamma^\alpha_{3\beta} = -g^{\alpha\eta} \Gamma^\eta_{3\beta} = -g^{\alpha\eta} K_{\eta\beta} = -K^\alpha_{\beta}$$

es decir, los escalares $\Gamma^\alpha_{3\beta}$ son los opuestos de las correspondientes componentes contra-cova del tensor de curvatura $\underline{\mathbf{K}}$, y así:

$$\underline{\mathbf{K}} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} g^\alpha \otimes g^\beta = -\Gamma^\alpha_{3\beta} g_\alpha \otimes g^\beta$$

De esta manera, las dos matrices:

$$\begin{aligned} J_{\text{sup}}^{-1} \cdot \frac{\partial J_{\text{sup}}}{\partial u^\beta} &= \begin{bmatrix} - & \underline{g}^u & - \\ - & \underline{g}^v & - \\ - & \underline{N} & - \end{bmatrix}_{\{\underline{g}\}} \cdot \frac{\partial}{\partial u^\beta} \begin{bmatrix} | & | & | \\ \underline{g}_u & \underline{g}_v & \underline{N} \\ | & | & | \end{bmatrix}_{\{\underline{g}_i\}} = \\ &= \begin{bmatrix} \Gamma^1_{1\beta} & \Gamma^1_{2\beta} & \Gamma^1_{3\beta} \\ \Gamma^2_{1\beta} & \Gamma^2_{2\beta} & \Gamma^2_{3\beta} \\ \Gamma^3_{1\beta} & \Gamma^3_{2\beta} & 0 \end{bmatrix}_{\beta=1,2} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \frac{\partial g_u}{\partial u^\beta} & \frac{\partial g_v}{\partial u^\beta} & \frac{\partial N}{\partial u^\beta} \\ | & | & | \end{bmatrix}_{\{\underline{g}_u, \underline{g}_v, \underline{N}\}} \end{aligned}$$

permiten obtener tanto los símbolos de Christoffel de la parametrización de S como las componentes puras y mixtas del tensor de curvatura. #.