Capítulo 4º : Geometría diferencial

§ 4.1 Curvas en el espacio $\mathbb{E}_3$ (y el plano $\mathbb{E}_2$)

a) Ecuaciones y parametrización

a1) Generalidades

Definición: $C\subset\mathbb{E}_3$ es una *curva de clase* $k \geq 0 \Leftrightarrow \exists\, \gamma : [a , b] \subset \mathbb{R} \to C\subset\mathbb{E}_3$ aplicación /

- 1) $\gamma\in\mathcal{C}^k(]a, b[)$ [la *clase* se indicará en teoría cuando se vaya necesitando]
- 2) γ es *biyectiva* [un sólo α para cada punto $P\in C$: $P(\alpha) \equiv \gamma(\alpha)$]
- 3) $C = \mathrm{Im}(\gamma) = \gamma([a , b])$ y cada $P = \gamma(\alpha) \Leftrightarrow \underline{r}(P) = \underline{r}(\alpha) = x_i(\alpha)\, \underline{e}_i = \gamma_i(\alpha)\underline{e}_i$.

definiciones adicionales:

- $(\gamma, [a , b])$:= *parametrización* de C en $\mathbb{E}_3$.
- La *ec. vectorial* y las *ecs. param. cart. o curv.*: $\underline{r} = \underline{r}(\alpha) \Leftrightarrow \{x_i = x_i(\alpha)\} \Leftrightarrow \{x^i = x^i(\alpha)\}$
- intervalo (generalizado) $[a , b]$:= *dominio* de la parametrización.
- variable α = punto genérico del *dominio* := *parámetro* de la parametrización. Se comporta como una coordenada curvilínea específica para los $P\in C$.
- Punto genérico de la curva = $\gamma(\alpha)$ o $P(\alpha)$. Su vector posición se denota $\underline{r}(\alpha)$.

Ejemplo: la *hélice* circular (o cilíndrica) de radio R y paso $p = 2\pi c$: ▶

Parametrización en la práctica: Consiste en expresar las tres coordenadas cartes. (x,y,z) [o curvilíneas intermedias (u,v,w)] en función de un parámetro real $\alpha \in [a , b]$, variable auxiliar adecuada para ello. Técnicas útiles:

1. *construcción geométrica* expresada analíticamente (pueden utilizarse coord. curvilíneas auxiliares o tomar alguna de ellas como parámetro): Ejemplo: la *Ventana de Viviani* ▶ (Pr3.1-4).. Además, parametrizar las curvas descritas en los ee.: PR3 nn.7, 12-1, 13.

2. *a partir de ecuaciones implícitas*: $C \equiv \{F_1(x,y,z) = 0, F_2(x,y,z) = 0\} \Rightarrow C = S_1 \cap S_2$.
Se aplica el *teorema de las funciones implícitas* para que el sistema defina dos de sus variables en función de la otra: por ejemplo, el sistema de ecuaciones anterior define $C : \{x = \alpha, y = f_1(\alpha), z = f_2(\alpha)\}$ si se cumplen las condiciones:

i) un punto (a,b,c) verifica el sistema;

ii) las F_i son *diferenciables* en un entorno de (a,b,c);

iii) el *jacobiano* del sistema *respecto de las var. dependientes* no se anula.

[Nota: las condiciones ii) y iii) determinan el tamaño del entorno de (a,b,c) y con él el dominio del parámetro]

Ejemplos: PR3.1 (apartados iii, vi), PR3.6. Otro ejemplo: la *elipse* $\{x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1\}$: param. sin radicales, √ , y deducir una técnica para dibujar puntos de la misma).

3. *curvas definidas a partir de. otras dadas*:

la *cardioide* (PR3.7): ; la *cicloide* ; la *Hipocicloide*

evolventes, evolutas (ver diap. 8); PR3.12 (se estudian, con más recursos, más adelante)

4. *parametrización por e.d.o.*: si se dispone de información relativa a la velocidad $\underline{r}'(\alpha)$ o a la aceleración $\underline{r}''(\alpha)$.

Ejemplos: 1) *líneas de campo* del campo vectorial $\underline{u} = \underline{e}_r + \underline{e}_\varphi + \underline{e}_\theta$ dado en la base física esférica. Ejercicio similar: PR3.1-vii.

2) *loxodromas esféricas* o rumbos marinos

3) loxodromas sobre superficies de revolución → PR3.1-vii, PR3.13 a 15.

a2) Parametrización respecto del parámetro arco (o natural o *intrínseco*), s, y cálculo de longitudes de arcos de curvas

Cambio de parámetro: Si $C \equiv \underline{r} = \underline{r}(\alpha)$, $\alpha \in [a , b]$ es una param. dada, y $\alpha = f(\beta)$ es una biyec. de clase 1, $\beta \in [a_1 , b_1]$, entonces $\underline{r} = \underline{r}(f(\beta))$ es otra param., $\underline{r} = \underline{r}(\beta)$, de C y se puede apl. la Rª. de la cadena: $\frac{d\underline{r}}{d\beta} = \frac{d\underline{r}}{d\alpha}\frac{d\alpha}{d\beta}$. Se observa que la tangente no depende de la parametrización.

Se puede aplicar la misma cadena para las derivadas sucesivas:

$$\Rightarrow \frac{d^2\underline{r}}{d\beta^2} = \frac{d}{d\beta}\left[\frac{d\underline{r}}{d\alpha}\frac{d\alpha}{d\beta}\right] = \frac{d^2\underline{r}}{d\alpha^2}\left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)^2 + \frac{d\underline{r}}{d\alpha}\frac{d^2\alpha}{d\beta^2}$$

Def. del arco s: Dada $C \equiv (\gamma, [a , b])$, se define s = parámetro *arco* por la func. $s(\alpha)$ tal que

i) $\frac{ds}{d\alpha}(\alpha) = \left|\frac{d\underline{r}}{d\alpha}(\alpha)\right|$

ii) $s(a) = 0$. Nota: equivale a definir: $s(\alpha) = \int_a^\alpha |\underline{r}'(\alpha)|\, d\alpha$

Proposición: Si ($\eta(\beta) = (\gamma \circ f)(\beta)$, $\beta \in [a_1, b_1]$) es otra parametrización de C, que respeta el sentido de recorrido de la curva, entonces $s(\beta) = s(\alpha)$ cuando $\alpha = f(\beta)$: o sea, la longitud no depende de la parametrización.

dem: aplicar el c. de var. $\alpha = f(\beta)$ a la integral anterior: ...

obs.: el parámetro arco s es *intrínseco* por no depender de la parametrización.

Aplicación: Cálculo de la **longitud de un arco de curva** parametrizada de clase $\mathcal{C}^1$: long. de C entre $\gamma(\alpha_1)$ y $\gamma(\alpha_2)$ es: $L = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} |\underline{r}'(\alpha)|\, d\alpha$.

Ejemplos: • 1) parámetro arco y longitud de una espira de la hélice circular de radio R y paso $2\pi c$. • 2) pueden hacerse apartados de los problemas PR3.5 a 7.

b) Triedro y base de Frenet

1.- *Vector tangente*, $\underline{t}(\alpha)$ o $\hat{\underline{e}}_1(\alpha)$

Def.: $\underline{t}$ ó $\hat{\underline{e}}_1$:= unitario tangente a C $= \dfrac{\frac{d\underline{r}}{d\alpha}(\alpha)}{\left|\frac{d\underline{r}}{d\alpha}(\alpha)\right|} = \dfrac{\frac{d\underline{r}}{d\alpha}(\alpha)}{\frac{ds}{d\alpha}(\alpha)} = \boxed{\frac{d\underline{r}}{ds}(\alpha) := \underline{t}(\alpha)}$

obs: $|d\underline{r}/ds| = 1 =$ cte.

se llama *factor de escala* de la parametrización al escalar: $ds/d\alpha = |\underline{r}'(\alpha)| > 0$;

Ejemplos: 1) la hélice. 2) la ventana de Viviani (cálculo en curvilíneas)

2.- *Curvatura* y *vector normal principal*, $\underline{n}(\alpha)$ o $\hat{\underline{e}}_2(\alpha)$

obs: $|\underline{t}(\alpha)| = 1 \Rightarrow \underline{t}\cdot\underline{t} = 1 \Rightarrow \underline{t} \perp {}^{d\underline{t}}\!/_{ds}$ (exige clase $\mathcal{C}^2$)

Defs.: 1) $\underline{n}(\alpha)$ ó $\hat{\underline{e}}_2$:= *normal principal* de C en $\gamma(\alpha)$ = unitario de ${}^{d\underline{t}}\!/_{ds}$ ó ${}^{d^2\underline{r}}\!/_{ds^2}$: indica *hacia dónde* dobla C en $\gamma(\alpha)$

2) $\kappa(\alpha)$:= *curvatura* := $|{}^{d\underline{t}}\!/_{ds}| = |{}^{d^2\underline{r}}\!/_{ds^2}|$, indica *cuánto* dobla C en $\gamma(\alpha)$

Ejemplos: 1) la circunferencia como referencia. 2) la *hélice*.

Aplicaciones: 1) *Circ. osculatriz* de C en $\gamma(\alpha)$: radio de curvatura := $1/\kappa$, centro de curvatura.

2) **Evoluta** = lugar geométrico de los centros de curvatura ▷

3.- *Vector binormal*, $\underline{b}(\alpha)$ o $\hat{\underline{e}}_3(\alpha)$

Def.: $\underline{b}(\alpha) := \underline{t}(\alpha)\times\underline{n}(\alpha)$ = *vector binormal* = unitario de ${}^{d\underline{r}}\!/_{ds} \times {}^{d^2\underline{r}}\!/_{ds^2}$

Ejemplo: la hélice

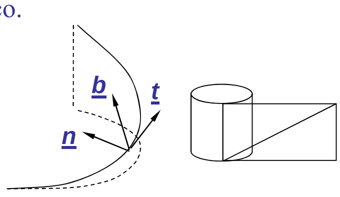
Def.: { $\underline{t}(\alpha)$, $\underline{n}(\alpha)$, $\underline{b}(\alpha)$ } forman la ***base de Frenet*** **(**ortonormal y de or. posit.) en $\gamma(\alpha)$, $\forall\alpha$ en que γ sea regular de $\mathcal{C}^3$.

Ejemplos: 1) Ecuaciones de las rectas tangente y normal ppal. de una espira de hélice en el punto medio de su recorrido.

2) Parametrizar la hélice circular en cilíndricas y calcular su base de Frenet en el sistema cilíndrico.

3) Como ejercicio: parametrizar la V. de Vivianni en el sistema esférico y calcular sus vectores tangente y normal ppal. en el sistema esférico.

4.- Planos del *triedro* de Frenet



–*plano osculador* := $\mathcal{L}\{\underline{t}(P), \underline{n}(P)\} = \{\underline{b}(P)\}^{\perp}$.

–*plano normal* := $\mathcal{L}\{\underline{n}(P), \underline{b}(P)\} = \{\underline{t}(P)\}^{\perp}$.

–*plano rectificante* := $\mathcal{L}\{\underline{t}(P), \underline{b}(P)\} = \{\underline{n}(P)\}^{\perp}$

Proyecciones de C a los planos del triedro: pl. osc., pl. normal, pl. rectif.

Ejemplos: 1) Ecs. cartesianas de los planos del triedro de Frenet en P(0, R, πR/4) de la hélice de radio R y paso $p = \pi$R.

2) Triedro de Frenet de C : $\{2x^2 + 4y^2 = 8,\ x - z = 0\}$ en el punto en que $x = y > 0$.

3) Ejercicio: una *hélice* resulta como posición final de la *diagonal* de un *rectángulo* que se arrolla en un *cilindro* sobre uno de sus lados. Determina las dimensiones del rectángulo generatriz de una espira de la hélice del ejemplo 1); ilustra la base de Frenet en cada punto con el movimiento de arrollamiento; y deduce su expresión en la base física del sistema cilíndrico asociado al cilindro resultante, sin hacer cálculos.

c) Fórmulas de Frenet: derivadas de la b. de Frenet resp. *s*

1.- Fórmulas respecto al parámetro arco:

1ª fórmula: $\boxed{\dfrac{d\underline{t}}{ds} := \underline{\kappa} = \kappa\,\underline{n}} \rightarrow \begin{cases} \kappa := \text{módulo} \\ \underline{n} := \text{dirección} \end{cases}$

obs.: $\underline{b}\cdot\underline{b} = 1 = \text{cte.} \Rightarrow \underline{b} \perp \underline{b}' \Rightarrow \underline{b}'$ no tiene comp. binormal; análogamente,

$\underline{b}\cdot\underline{t} = 0 = \text{cte.} \Rightarrow 0 = \underline{b}'\cdot\underline{t} + \underline{b}\cdot\underline{t}' = \underline{b}'\cdot\underline{t} + \underline{b}\cdot\kappa\,\underline{n} \Rightarrow \underline{b}'\cdot\underline{t} = 0 \Rightarrow \underline{b}'$ no tiene comp. tang. Luego $\underline{b}'$ sólo tiene comp. normal ppal., y se define: $\boxed{\dfrac{d\underline{b}}{ds} = -\tau\,\underline{n}}$ **3ª fórmula**,

donde τ se llama *torsión* de γ en cada punto.

Además: $\underline{n}\cdot\underline{n} = 1 = \text{cte.} \Rightarrow \underline{n} \perp \underline{n}' \Rightarrow \underline{n}'$ no tiene comp. normal ppal.

$\underline{n}\cdot\underline{t} = 0 = \text{cte.} \Rightarrow 0 = \underline{n}'\cdot\underline{t} + \underline{n}\cdot\underline{t}' = \underline{n}'\cdot\underline{t} + \kappa \Rightarrow$ comp. tang. de $\underline{n}' = -\kappa$. Análogo:

$\underline{n}\cdot\underline{b} = 0 = \text{cte.} \Rightarrow 0 = \underline{n}'\cdot\underline{b} + \underline{n}\cdot\underline{b}' = \underline{n}'\cdot\underline{b} - \tau \Rightarrow$ comp. tang. de $\underline{n}' = \tau$.

Luego: $\boxed{\dfrac{d\underline{n}}{ds} = -\kappa\,\underline{t} + \tau\,\underline{b}}$ **2ª fórmula**

Ejemplo: 1) Torsión de la hélice circular. 2) Caracterización de curvas planas en el espacio: $\tau \equiv 0$. 3) Caracterización de una circunferencia en el espacio: $\kappa = 1/R$, $\tau = 0$.

Ejercicios: PR4.8 a 12

2.- Vector de Darboux o velocidad angular del triedro de Frenet

$\underline{\omega} := \tau\,\underline{t} + \kappa\,\underline{b}$ es tal que: $\dfrac{d\underline{\hat{e}}_i}{ds} = \underline{\omega}\times\underline{\hat{e}}_i$:

$$\left[\begin{array}{ccc} | & | & | \\ \dfrac{d\underline{\hat{e}}_i}{ds} & \dfrac{d\underline{\hat{e}}_i}{ds} & \dfrac{d\underline{\hat{e}}_i}{ds} \\ | & | & | \end{array}\right]_{\{\underline{\hat{e}}_i\}} = \left[\begin{array}{ccc} | & | & | \\ \dfrac{d\underline{t}}{ds} & \dfrac{d\underline{n}}{ds} & \dfrac{d\underline{b}}{ds} \\ | & | & | \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix}$$

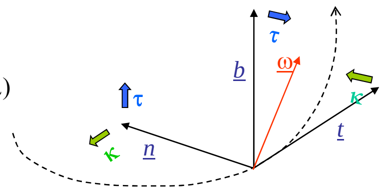
3.- Fórmulas prácticas en parámetro arbitrario:

Expresar $\underline{r}'(\alpha)$, $\underline{r}''(\alpha)$, $\underline{r}'(\alpha)\times\underline{r}''(\alpha)$, $\underline{r}'''(\alpha)$ en la base de Frenet (*comptes. intrínsecas*), para despejar $\underline{t}(\alpha)$, $\underline{n}(\alpha)$, $\underline{b}(\alpha)$, $\kappa(\alpha)$, $\tau(\alpha)$.

Resultan:

$$\underline{t}(\alpha) = \frac{\underline{r}'(\alpha)}{|\underline{r}'(\alpha)|};\ \underline{b}(\alpha) = \frac{\underline{r}'(\alpha)\times\underline{r}''(\alpha)}{|\underline{r}'(\alpha)\times\underline{r}''(\alpha)|};\ \underline{n}(\alpha) = \underline{b}(\alpha)\times\underline{t}(\alpha)$$

$$\kappa(\alpha) = \frac{|\underline{r}'(\alpha)\times\underline{r}''(\alpha)|}{|\underline{r}'(\alpha)|^3};\ \tau(\alpha) = \frac{[\underline{r}'(\alpha),\underline{r}''(\alpha),\underline{r}'''(\alpha)]}{|\underline{r}'(\alpha)\times\underline{r}''(\alpha)|^2}$$



Ejemplos: 1) $\gamma(\alpha) := (\alpha, \alpha^2, \alpha^3)$; 2) Vector de Darboux en parámetro arbitrario α: $\mathfrak{D}(\alpha) = \ldots$

4.- Ecs. intrínsecas de una curva: { $\underline{\kappa} = \underline{\kappa}(s)$, $\underline{\tau} = \underline{\tau}(s)$ }:

Se trata de eliminar α de $\{s = s(\alpha), \kappa=\kappa(\alpha), \tau=\tau(\alpha)\}$. Ejemplos: 1) las de una circunferencia plana en $\mathbb{E}_3$, son: $\{\kappa = {}^1/_R = \text{cte.}; \tau = 0\}$; 2) las de una hélice...; 3) PR4.14-15

d) Algunas aplicaciones de la teoría de curvas

5.- Curvas determinadas en términos intrínsecos de otra dada

Son curvas C^* definidas a partir de otra dada, C : $\underline{r} = \underline{r}(s)$, de modo que puede describirse su vector posición $\underline{r}^*$ en términos de los elementos intrínsecos de C, o sea, de s, $\underline{t}$, $\underline{n}$, $\underline{b}$, κ, τ.

En estas curvas pueden utilizarse las fórmulas de Frenet para deducir los elementos intr. s^*, $\underline{t}^*$, $\underline{n}^*$, $\underline{b}^*$, κ^*, τ^*, en términos de los de C (obs.: en general s = arco de C, no de C^*)

- **Ejemplos**: 1) la ***evoluta*** cumple: $\underline{r}^*(s) = \underline{r}(s) + R_c\, \underline{n}(s)$ [Nota: s = arco de C, no de C^*, en general]

2) ***Evolvente***: curva que traza el extr. de un hilo arrollado en una circunf. de radio R al desenrollarse permaneciendo tenso: $\underline{r}^*(s) = \underline{r}(s) + s\, \underline{t}(s)$.

–Puede hacerse: PR3.12

6.- Orden de contacto

– Orden de contacto de dos curvas en un punto común P: clase de la curva mixta en el punto de empalme. Suavidad ("*smooth*") de clase 1, 2 y 3: qué comparten en P

– La *clotoide* (curva definida por la e.d. intr. $\kappa(s) = s$) y el trazado de vías férreas

– PR3.14

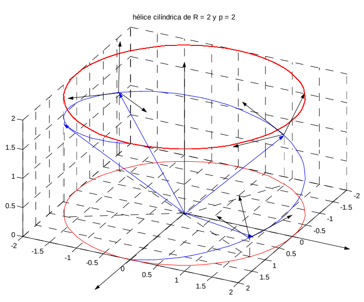
Ejercicios sobre curvas

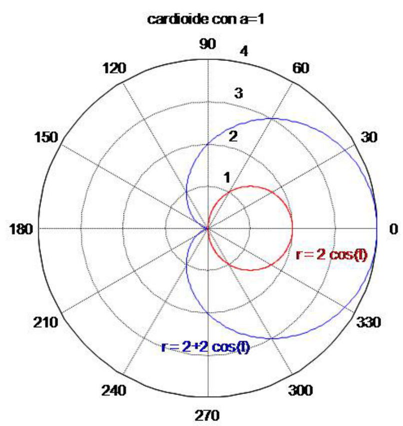
Ejercicios

1) Estudiar la curva $\{x^2 + 4y^2 = 4,\ x + 2y - z = 0\}$

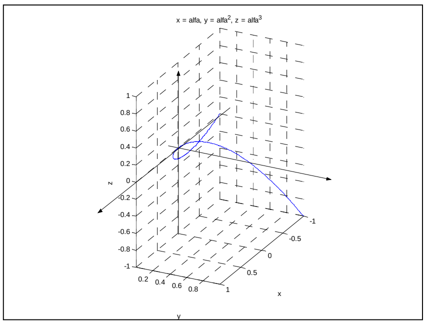
2) Parametrizar respecto al arco s una curva cuyas ecuaciones intrínsecas son $\{\kappa = \tau = 1 = \text{cte.}\}$, se inicia en $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dado y tiene vector de Darboux inicial $\underline{\mathcal{D}}(0) = \underline{k}$.

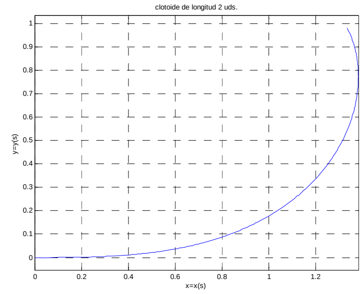
3) Pueden hacerse: PR3.1 a 15

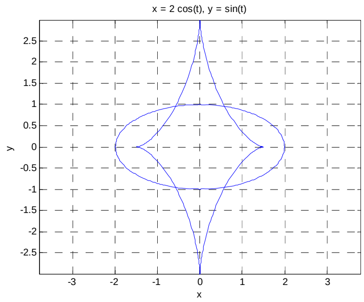


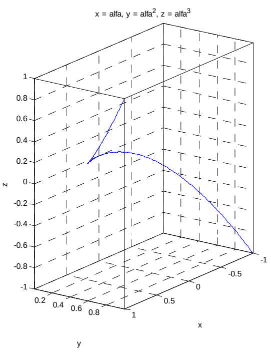


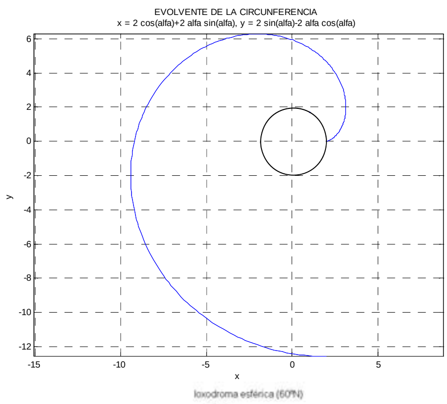
FIGURAS





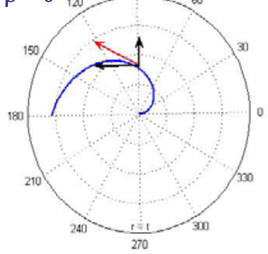


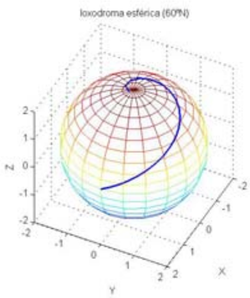




espiral de Arquímedes

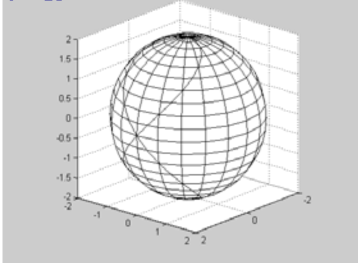
$\rho = \theta$

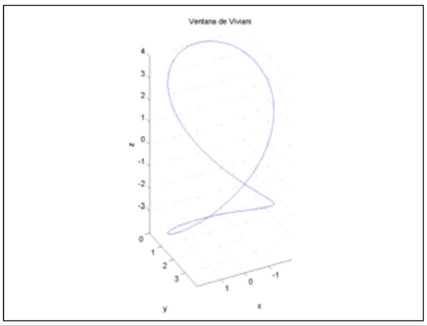




Vincenzo Viviani (1622-1703)

Ventana de Viviani $\varphi + \theta = \pi/2$, $r = R$





La hipocicloide parametrizada y dibujada con MatLab

```
%hipocicloide
clear all
intrbcart2
syms t
r=4*cos(t)^3*e1+4*sin(t)^3*e2
%con lo anterior se puede proceder a los cálculos (simbólicos) de la base
%de Frenet, curvatura...
%para la representación gráfica se discretiza el parámetro (llamándole T):
T=0:2*pi/100:2*pi;
plot(4*cos(T).^3,4*sin(T).^3)
```