Obs.: Diferencial de una magnitud variable en $\mathbb{E}_{3(\text{ó } 2)}$

•1) **En general** (Análisis): Si f depende de $(y_1, \dots y_m)$, $\mathrm{d}f := \partial_{y_1} f\, \mathrm{d}y_1 + \dots + \partial_{y_m} f\, \mathrm{d}y_m$

Lo mismo ocurre si se trata de una magnitud vectorial de n componentes, $\underline{F}$:

$\mathrm{d}\underline{F} := \partial_{y_1} \underline{F}\, \mathrm{d}y_1 + \dots + \partial_{y_m} \underline{F}\, \mathrm{d}y_m$. El $\mathrm{d}f$ o el $\mathrm{d}\underline{F}$ son los términos de primer orden en el desarrollo de Taylor de f o de $\underline{F}$ alrededor del punto y constituyen una aprox. del Δf o $\Delta \underline{F}$

•2) **En $\mathbb{E}_3$: Diferencial del vector posición $\underline{r}$(P) en cart. y en curv.**

• def.: En cartesianas, al pasar de $P(x,y,z)$ a $Q(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z)$, se define

$$\mathrm{d}\underline{r} = \mathrm{d}x\, \underline{i} + \mathrm{d}y\, \underline{j} + \mathrm{d}z\, \underline{k} = \mathrm{d}x_i\, \underline{e}_i = \underline{PQ} = \text{desplazamiento vectorial real} = \Delta \underline{r} = \underline{OQ} - \underline{OP}$$

En curvilíneas, al pasar de $P(u,v,w)$ a $Q(u+\mathrm{d}u, v+\mathrm{d}v, w+\mathrm{d}w)$, el Análisis asegura:

$$\mathrm{d}\underline{r} = \tfrac{\partial \underline{r}}{\partial u} \mathrm{d}u + \tfrac{\partial \underline{r}}{\partial v} \mathrm{d}v + \tfrac{\partial \underline{r}}{\partial w} \mathrm{d}w = \mathrm{d}x^i\, \underline{g}_i \;\cong\; \underline{PQ} = \Delta \underline{r}$$

El $\mathrm{d}\underline{r}$ es, pues, análogo, pero resulta el desarrollo *contravariante* del vector $\mathrm{d}\underline{r}$, y sólo se aproxima ($\cong$) el desplazamiento real, $\Delta\underline{r}$, en lugar de coincidir con él.

Pero el vector $\mathrm{d}\underline{r}$ es *intrínseco* (el mismo vector, expresado en los dos sistemas) porque:

$$\mathrm{d}\underline{r} = \mathrm{d}x_i\, \underline{e}_i = \mathrm{d}x_i \overbrace{\frac{\partial x^k}{\partial x_i}}^{\text{col. i}^{\text{a}}\ J^{-1}} \underline{g}_k = \left(\tfrac{\partial x^k}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i \right) \underline{g}_k = \mathrm{d}x^k\, \underline{g}_k$$

– Obs. (!!!): la expresión de un producto escalar $\underline{u}\cdot\mathrm{d}\underline{r}$ en curvilíneas necesita las componentes *covas* del campo $\underline{u}$, para operar con las componentes *contras* del $\mathrm{d}\underline{r}$. Así:

$$\underline{u}\cdot\mathrm{d}\underline{r} = u_i\, \mathrm{d}x^i = u_1(x^1,x^2,x^3)\, \mathrm{d}x^1 + u_2(x^1,x^2,x^3)\, \mathrm{d}x^2 + u_3(x^1,x^2,x^3)\, \mathrm{d}x^3 \;;$$

una contracción $\underline{\mathbf{T}}\cdot\mathrm{d}\underline{r}$ necesita componentes $t^i{}_j(x^1,x^2,x^3)$ para producir contras del resultado.

§3.1 OPERADORES DIFERENCIALES

a) *Gradiente de un c. escalar, U*:

– 1) ***definición***: dado $U : \mathcal{A} \subset \Omega \subset \mathbb{E}_3 \to \mathbb{R}$, en $\mathbb{E}_3$ con refers. cartesiana $\{O; x_i\}$ y curvilínea $\{O; x^i\}$ asociadas en un punto origen O de cierta región Ω. Se estudia la variación de U respecto del punto P, o sea, al variar la posición del punto en el espacio. De Cálculo sabemos:

– el incr. de U: $\Delta U := U(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z) - U(x,y,z) \cong \tfrac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x + \tfrac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y + \tfrac{\partial U}{\partial z}\mathrm{d}z = \mathrm{d}U$

– es análogo en curvilíneas, con $\mathrm{d}U = \tfrac{\partial U}{\partial u}\mathrm{d}u + \tfrac{\partial U}{\partial v}\mathrm{d}v + \tfrac{\partial U}{\partial w}\mathrm{d}w \cong \Delta U$.

– en ambos casos se puede entender $\mathrm{d}U$ como resultado (escalar) de la acción de un *tensor de orden 1* (forma lineal) sobre el vector $\mathrm{d}\underline{r}$:

- en cart.: $\mathrm{d}U = (\partial_x U\, \underline{i} + \partial_y U\, \underline{j} + \partial_z U\, \underline{k}) \cdot \mathrm{d}\underline{r}$
- y en curv. : $\mathrm{d}U = (\partial_{x^1} U\, \underline{g}^1 + \partial_{x^2} U\, \underline{g}^2 + \partial_{x^3} U\, \underline{g}^3)\cdot(\mathrm{d}x^i \underline{g}_i)$ (¡Obs.: *prefactor* en covas!)

Se observa que se trata del *mismo vector* expresado en los dos sist. Se llama *vector gradiente* de U y es el vector:

$$\underline{\nabla} U = \boxed{\frac{\partial U}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\underline{k}} = \frac{\partial U}{\partial x_i} \overset{\text{a covas}}{\underline{e}_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} \overbrace{\frac{\partial x_i}{\partial x^k}}^{\text{fila i de } J} \underline{g}^k = \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x^k} \right) \underline{g}^k = \boxed{\frac{\partial U}{\partial x^k} \underline{g}^k}$$

el símbolo "nabla", ∇, (o "atled") es la delta may. griega invertida, debido a Hamilton

– 2) *Propiedades del gradiente de un c. escalar de clase C^1* :

i) *Prop. fundamental*: el vector $\underline{\nabla}U$ regula la variación de U en el espacio,
pq. $\Delta U \cong dU = \underline{\nabla}U \cdot d\underline{r}$, como se ha visto.

ii) *Naturaleza tensorial*: porque la derivada direccional $\partial_{\underline{e}}U(\mathrm{P})$ de un c. esc. de clase 1 en cualquier dirección $\underline{e}$ tomada en P es: $\partial_{\underline{e}}U(\mathrm{P}) = \underline{\nabla}U(\mathrm{P}) \cdot \underline{e}$

dem: $\partial_{\underline{e}}U(P) := \lim_{\lambda\to 0} \frac{U(P+\lambda\underline{e})-U(P)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\underline{\nabla}U(P)\cdot\lambda\underline{e}}{\lambda} = \underline{\nabla}U(P)\cdot\underline{e}$

y esto sugiere considerarlo como un tensor de primer orden: $\underline{\nabla}U \in \mathbb{T}^{(1)}$.

iii) las lín. de campo de $\underline{\nabla}U$ son ortogonales a las superf. isocuantas U = cte.

dem: si $\underline{e}$ es tangte. a la sup. $\{U = c\}$ en P, entonces $\partial_{\underline{e}}U(\mathrm{P}) = 0$, luego $\underline{\nabla}U(\mathrm{P})\cdot\underline{e} = 0$

Como ocurre $\forall \underline{e}$ tgte. A la sup., resulta que $\underline{\nabla}U(\mathrm{P}) \perp \Pi_{\mathrm{tgte}}(\mathrm{P})$

iv) la máxima derivada direccional de U en P es $|\,\underline{\nabla}U(\mathrm{P})\,|$ en la propia dir. $\underline{e}_{\nabla U}$ del gradiente $\underline{\nabla}U(\mathrm{P})$.

dem: $\partial_{\underline{e}}U(\mathrm{P}) = \underline{\nabla}U(\mathrm{P}) \cdot \underline{e} = |\,\underline{\nabla}U(\mathrm{P})\,| \cos\langle\, \underline{\nabla}U(\mathrm{P}), \underline{e}\,\rangle \Rightarrow$ máximo si el ángulo es 0.

–3) *El operador diferencial nabla:* $\boxed{\underline{\nabla} := \frac{\partial}{\partial x_i}\underline{e}_i = \frac{\partial}{\partial x^i}\underline{g}^i}$

–Es ventajoso considerar $\underline{\nabla}$ como un *operador* diferencial vectorial que produce el *gradiente* al "multiplicarse" por campos escalares.

–Las Reglas de actuación de $\underline{\nabla}$ sobre *campos escalares* que se operan entre sí: son las mismas de la derivada, es decir: …/…

–linealidad frente a comb. lin. *con coef. constantes*, a, b:

$$\underline{\nabla}(aU+bV) = a\,\underline{\nabla}U + b\,\underline{\nabla}V$$

–gradiente del producto o cociente de campos escalares

$$\underline{\nabla}(UV) = (\underline{\nabla}U)\,V + U\,(\underline{\nabla}V)\,,$$

$$\underline{\nabla}(U/V) = [(\underline{\nabla}U)V - U\,(\underline{\nabla}V)]/V^2$$

–gradiente de una potencia: $\underline{\nabla}(U^m) = mU^{m-1}\underline{\nabla}U$

–otras reglas de actuación $\longrightarrow$ en **b)** operadores relacionados con $\underline{\nabla}$

– Ejemplos:

1) En cartesianas se cumple $\underline{\nabla}x_i = \underline{e}_i$

2) En curvilíneas: $\underline{\nabla}x^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^j}\underline{g}^j = \delta^i{}_j\underline{g}^j = \underline{g}^i$ (alternativa para calcular $\underline{g}^i$)

3) $\underline{\nabla}x$ en cil.: $\underline{\nabla}x = \frac{\partial x}{\partial\rho}\underline{g}^\rho + \frac{\partial x}{\partial\theta}\underline{g}^\theta + \frac{\partial x}{\partial z}\underline{g}^z = \cos\theta\,\underline{g}^\rho - \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\underline{g}^\theta$

4) $\underline{\nabla}(\underline{a}\cdot\underline{r}+c)$, donde $\underline{a}$ es un vec. cte. y c = cte. escalar: $\underline{\nabla}(\underline{a}\cdot\underline{r}+c) = \underline{a}$

5) $\underline{\nabla}(\underline{a}\cdot\underline{r}\,/r^2)$ = ...

De Pr2.12, apartados:1, 2, 3, y 7

•b) Operadores diferenciales relacionados con nabla $\underline{\nabla}$

Se llama operador nabla al vector simbólico: $\underline{\nabla} := \partial_x\, \underline{i} + \partial_y\, \underline{j} + \partial_z\, \underline{k} = \partial_{x_i}\, \underline{e}_i$, que resulta al *abstraer* el campo esc. U del gradiente $\underline{\nabla}U$.

En curv. es análogo: $\underline{\nabla} := \partial_{x^i}\, \underline{g}^i = \partial_u\, \underline{g}^u + \partial_v\, \underline{g}^v + \partial_w\, \underline{g}^w$ (¡covas!)

o sea: $$\boxed{\underline{\nabla} := \frac{\partial}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\underline{k} = \frac{\partial}{\partial u}\underline{g}^u + \frac{\partial}{\partial v}\underline{g}^v + \frac{\partial}{\partial w}\underline{g}^w}$$

Cuando actúa sobre un campo escalar da el gradiente $\underline{\nabla}U$ y la forma de tratarlo es: *vector simbólico cuyas componentes* se "multiplican" por U produciendo la derivada parcial que indican. En curv. $\underline{\nabla}$ es *covariante* pero se entiende igual.

Otros operadores: el operador $\underline{\nabla}$ se combina con otros productos * de vectores o tensores y la acción del *operador* resultante se determina en general así:

- en cartes. se define: $\underline{\nabla}*\underline{u} := \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\underline{e}_i\right)*\underline{u} := \underline{e}_i * \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial x_i}\right) \rightarrow \begin{cases} 1^{\text{o}})\ \text{se deriva el } 2^{\text{o}} \text{ factor} \\ 2^{\text{o}})\ \text{se efectua el producto q.sea } * \end{cases}$
- en curv. es análogo: $\underline{\nabla}*\underline{u} := \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\underline{g}^i\right)*\underline{u} := \underline{g}^i * \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial x^i}\right) \rightarrow \begin{cases} 1^{\text{o}})\ \text{se deriva (deriv. covariante)} \\ 2^{\text{o}})\ \text{se efectua el producto } * \end{cases}$

Casos más importantes:

- op. ***divergencia*** := $\underline{\nabla}\cdot$
- op. ***rotacional*** := $\underline{\nabla}\times$
- op. ***laplaciano*** := $\underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla} = \underline{\nabla}^2$
- op. ***gradiente-tensor***: $\underline{\nabla}\otimes$

} → se aplica la norma general anterior y resulta:…

Si $\underline{u} = U_i\, \underline{e}_i = u^i\, \underline{g}_i = u_i\, \underline{g}^i$, se tiene:

●1) **divergencia** de $\underline{u}$: $\underline{\nabla}\cdot\underline{u} = \ldots$

cartes.: $\ldots\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\underline{e}_i\right)\cdot\underline{u} := \underline{e}_i\cdot\frac{\partial \underline{u}}{\partial x_i} = \underline{e}_i\cdot\left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\underline{e}_j\right) = \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\delta_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = \boxed{\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = \underline{\nabla}\cdot\underline{u}}$

curv.: $\ldots\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\underline{g}^i\right)\cdot\underline{u} := \underline{g}^i\cdot\frac{\partial \underline{u}}{\partial x^i} = \underline{g}^i\cdot\left(u^h{}_{,i}\, \underline{g}_h\right) = u^h{}_{,i}\, \delta^i{}_h = u^i{}_{,i} = \boxed{u^1{}_{,1} + u^2{}_{,2} + u^3{}_{,3} = \underline{\nabla}\cdot\underline{u}}$

Forma práctica en curv.→ formlº: $\boxed{\underline{\nabla}\cdot\underline{u} = \frac{1}{\pm\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\pm\sqrt{g}\, u^i\right)\right]}$ obs: ¡ usa *contras* de $\underline{u}$!

dem: se observa: 1) $u^i{}_{,i} = u^k{}_{,i}\, \delta^i{}_k = [\partial_{x^i} u^k + u^h \Gamma^k{}_{hi}]\, \delta^i{}_k = \partial_{x^i} u^i + u^h \Gamma^i{}_{hi}$

2) $\partial_{x^k}(\pm\sqrt{g}) = \partial_{x^k}[\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3] = [\Gamma^i{}_{1k}\underline{g}_i, \underline{g}_2, \underline{g}_3] + [\underline{g}_1, \Gamma^i{}_{k2}\underline{g}_i, \underline{g}_3] + [\underline{g}_1, \underline{g}_2, \Gamma^i{}_{k3}\underline{g}_i] =$

$= [\Gamma^1{}_{1k}\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3] + [\underline{g}_1, \Gamma^2{}_{2k}\underline{g}_2, \underline{g}_3] + [\underline{g}_1, \underline{g}_2, \Gamma^3{}_{3k}\underline{g}_3] = \pm\sqrt{g}\,(\Gamma^1{}_{1k} + \Gamma^2{}_{2k} + \Gamma^3{}_{3k}) = \pm\sqrt{g}\,\Gamma^h{}_{hk}$

y se deduce: $\partial_{x^i}(\pm\sqrt{g}\, u^i) = \pm\sqrt{g}\,\Gamma^h{}_{hi} u^i \pm\sqrt{g}\partial_{x^i} u^i = \pm\sqrt{g}(u^i{}_{,i}) \Rightarrow \underline{\nabla}\cdot\underline{u} = 1/\sqrt{g}\,[\partial x^i(\sqrt{g}\, u^i)]$, c.q.d.

Ejemplos: Calcular la divergencia de: 1) $\underline{F}(x,y,z) = \frac{x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; 2) Mismo campo en esféricas ; 3) $\underline{u}(\rho, \theta, z) = \rho\underline{g}_\rho + \theta\underline{g}_\theta + z\underline{g}_z$ (¡ ojo, $\underline{u}$ no es $\underline{r}$!)

PR2.12, apartados 4 y 9

•2) **rotacional** de $\underline{u} = U_i\, \underline{e}_i = u_i\, \underline{g}^i$: $\underline{\nabla}\times\underline{u} = \ldots$

en cart.:… $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\underline{e}_i\right)\times\underline{u} := \underline{e}_i\times\frac{\partial \underline{u}}{\partial x_i} = \underline{e}_i\times\left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\underline{e}_j\right) = \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\varepsilon_{ijk}\underline{e}_k = \boxed{\begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ U_x & U_y & U_z \end{vmatrix} = \underline{\nabla}\times\underline{u}}$

en curv.: $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\underline{g}^i\right)\times\underline{u} := \underline{g}^i\times\frac{\partial \underline{u}}{\partial x^i} = \underline{g}^i\times\left(u_{j,i}\,\underline{g}^j\right) = u_{j,i}\left(\frac{1}{\pm\sqrt{g}}\right)\varepsilon^{ijk}\underline{g}_k = \ldots = e^{ijk}\frac{\partial u_j}{\partial x^i}\underline{g}_k$

q. conduce a la frmla. práctica (formulº): $\boxed{\underline{\nabla}\times\underline{u} = \frac{1}{\pm\sqrt{g}}\begin{vmatrix} \underline{g}_1 & \underline{g}_2 & \underline{g}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}}$ obs.: ¡*covas* de $\underline{u}$!

Ejemplos: Calcular el rotacional de los campos considerados en el ejemplo anterior:

1) $\underline{F}(x,y,z) = \frac{x\underline{i}+y\underline{j}+z\underline{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;

2) Mismo ejemplo pasándolo a esféricas ;

3) $\underline{u}(\rho, \theta, z) = \rho\underline{g}_\rho + \theta\underline{g}_\theta + z\underline{g}_z$

4) PR2.13, cuestión. PR2.18, cuestión

•3) **laplaciano** $:= \Delta U := \underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}U) = \underline{\nabla}^2 U\ldots$

en cartesianas: $\Delta U = \underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}U) = \ldots = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$

en curvilíneas: $\Delta U = \underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}U) = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\, g^{ij}\frac{\partial U}{\partial x^j}\right)\right]$

•4) **gradiente-tensor** $:= \underline{\nabla}\otimes = \ldots$

en cartesianas: $\underline{\nabla}\otimes\underline{u} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\underline{e}_i\right)\otimes\left(U_j\underline{e}_j\right) = \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\underline{e}_i\otimes\underline{e}_j$

en curvilíneas: $\underline{\nabla}\otimes\underline{u} = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\underline{g}^i\right)\otimes\left(u^j\underline{g}_j\right) = u^j{}_{,i}\,\underline{g}^i\otimes\underline{g}_j$

obs: el diferencial de un campo vectorial $\underline{u}$ es: $d\underline{u} = \underline{u}\otimes\underline{\nabla} = (\underline{\nabla}\otimes\underline{u})'$

•***Reglas de actuación de los operadores sobre productos*** → ¡formulario!

Ejemplo: Calcular div($\underline{a}\times\underline{r}$) siendo $\underline{a}$ un c. vectorial constante del espacio $\mathbb{E}_3$.

Otros ejercicios: PR212, cuestiones de los problemas PR2.13, 15, 18

c) Operadores diferenciales en base física curvilínea

Las fórmulas para calcular los op. diferenciales de campos en base física se adaptan con sencillez, cambiando las bases o componentes generales a aquélla : $h_i := |\underline{g}_i|$, $\underline{a} = \hat{a}_i\hat{\underline{e}}_i$, $\sqrt{g} = h_u h_v h_w$, $\underline{g}^i = \hat{\underline{e}}_i / h_i$ (para cada i), $a^i = \hat{a}_i / h_i$ (para cada i), $a_i = h_i\,\hat{a}_i$ (para cada i). Así:

$$\underline{\nabla} U = \frac{1}{h_u}\frac{\partial U}{\partial u}\hat{\underline{e}}_u + \frac{1}{h_v}\frac{\partial U}{\partial v}\hat{\underline{e}}_v + \frac{1}{h_w}\frac{\partial U}{\partial w}\hat{\underline{e}}_w$$

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{a} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\hat{a}_u h_v h_w\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(h_u \hat{a}_v h_w\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(h_u h_v \hat{a}_w\right)\right]$$

$$\underline{\nabla}\times\underline{a} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{\underline{e}}_u & h_v\hat{\underline{e}}_v & h_w\hat{\underline{e}}_w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_u\hat{a}_u & h_v\hat{a}_v & h_w\hat{a}_w \end{vmatrix}$$

$$\Delta U = \underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla} U = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_v h_w}{h_u}\frac{\partial U}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_u h_w}{h_v}\frac{\partial U}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_u h_v}{h_w}\frac{\partial U}{\partial w}\right)\right]$$

Ejemplos y ejercicios

•1) $\underline{\nabla}\cdot\underline{g}_u$ y $\underline{\nabla}\times\underline{g}_u$ siendo $\{x = \exp(u+v),\ y = \exp(u-v),\ z = w\}$

solución: $\underline{g}_u$ en contras es (1,0,0); y en covas, es $\underline{g}_1 = g_{1j}\,\underline{g}^j = (2e^{2u}\,\mathrm{Ch}2v,\ 2e^{2u}\,\mathrm{Sh}2v,\ 0)$

luego:

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{g}_u = \frac{1}{-2e^{2u}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(-2e^{2u}\cdot 1\right) + 0\right] = 2$$

$$\underline{\nabla}\times\underline{g}_u = \frac{1}{-2e^{2u}}\begin{vmatrix} \underline{g}^u & \underline{g}^v & \underline{g}^w \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ 2e^{2u}\,\mathrm{Ch}\,2v & 2e^{2u}\,\mathrm{Sh}\,2v & 0 \end{vmatrix} = \ldots = \underline{0}\,(\text{campo } \textit{irrotacional})$$

•2) Práctica 2b:

- Ejercicios: PR2.14, y PR2.15
- Problemas de examen: PR2.16 , PR2.17, PR2.18 .

(FIN DE LA MATERIA DEL PRIMER PARCIAL)