§ 2.2 Sistemas de coordenadas de los espacios puntuales $\mathbb{E}_2$ y $\mathbb{E}_3$: (panorama)

- **Repaso: Sist. coord. cartesianas**
  - se presentan como esquema-modelo de los demás sist. curvilíneos.
  - Representaciones gráficas usuales: lug. geom. coordenados: lín. coord. y planos coord. de cada P; *isocuantas* de campos esc.; *lín. de campo* o lín. de acción de c. vect.
- **a)Sist. coord. curvilíneas: Definiciones básicas**
  - introducción por *relaciones de transformación* : $x_i = x_i(u^1, u^2, u^3)$
  - *bases natural* y *recíproca*: interpr. geométrica y l.g. coordenados del sist. curvilíneo: matrices jacobianas J y J^{-1}.
  - matriz fundamental o *matriz de Gram* del sist. curvilíneo, G
  - c. vect.: comp. naturales contra variantes y covariantes
  - c. tens.: comp. nat. contra-cova, cova-cova, etc…
- **b)Derivación de la base natural: símbolos de Christoffel**
  - definición de símbolos de Christoffel: comptes. de las deriv. bases
  - cálculo matricial de los símbolos: dos métodos
- **c)Cambios de sistemas de coordenadas**
  - Relaciones de transformación entre coordenadas curvilíneas
  - Matriz del cambio de las bases naturales de dos sistemas curv.

Repaso: Sistema de coordenadas cartesianas

- **Elementos básicos** (Apuntes, §2.2a)
  - **líneas coordenadas** y **planos coordenados** por un punto P_0.
  - **base cartesiana,** constante *en cada punto*, $\{\underline{e}_i\}$ o $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$, ortonormal y bien orientada

    Obs.: $\underline{e}_i = \partial_{x_i} \underline{r}$ = deriv. de la traza o trayectoria de $\underline{r}$ cuando sólo varía la coord. x_i.
- **Campos** escalares, vectoriales y tensoriales en cartesianas:
  - $U = U(x,y,z) \rightarrow$ se representa gráficamente mediante *sup. de nivel*, determinadas por cumplir U = cte. = $U(P_0)$ (o *isocuantas*)
  - $\underline{u} = \underline{u}(x,y,z) = U_i(x,y,z)\, \underline{e}_i \rightarrow$ se representa graf. mediante las *líneas de acc.* o *lín. de campo*, curvas determinadas por cumplir $d\underline{r} / dt = \underline{u}(P(t))$, que es la ec. dif. vc. de las lín. de c. y puede separarse por componentes cartesianas: $U_i(x(t),y(t),z(t)) = dx_i / dt$, siendo $x_i(t)$ las func. incógn.
- **Ejemplos**:
  - *líneas de nivel* de un c. escalar plano: $U(x,y) = c$
  - *líneas de campo* de un c. vect. en el plano: $d\underline{r}/dt = \underline{v}(t)$
  - *aljabas* de un c. vect.

a) Sistemas de c. curvilíneas: elementos básicos

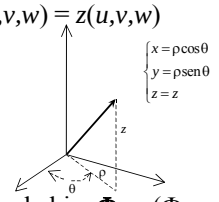
Dado sist. cartesiano $\{O; \underline{e}_i\}$ o bien $\{O; (x, y, z)\}=\{O; (x_i)\}$ (subyacente o asociado), se define:

• **Coord. curvilíneas** : (u,v,w) o u^i o x^i son coord. curvilíneas de P si determinan P *biunívocamente* y de forma *diferenciable* en una *región* $\Omega \subset \mathbb{E}_3$, es decir:

$\exists \mathcal{D}$ = región $\subset \mathbb{R}^3$, $\exists$ biy. diferenciable $\mathbf{\Phi} : \mathcal{D} \to \Omega$, tales q. $(x, y, z) = \mathbf{\Phi}(u, v, w)$, o sea

$$x = \Phi_1(u,v,w) = x(u,v,w)\ ,y = \Phi_2(u,v,w) = y(u,v,w),\ z = \Phi_3(u,v,w) = z(u,v,w)$$

o bien: $$x_i = \Phi_i(x^1,x^2,x^3) = x_i(x^1,x^2,x^3).$$



$\mathcal{D}$:= *dominio* de la parametrización de Ω en (u,v,w) o x^i.

Ω := *región parametrizada* del espacio $\mathbb{E}_3$ en (x,y,z) o x_i.

NOTA: es análogo en el plano $\mathbb{E}_2$.

Entonces: $\forall P \in \Omega$: $\underline{r}(P) = x_i(u,v,w)\ \underline{e}_i := \underline{r}(u,v,w)$

• **relaciones de transformación de coordenadas**: las dadas por la biy. $\mathbf{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ y su inversa $\mathbf{\Phi}^{-1} = \mathbf{\Psi}\ (\Psi^1, \Psi^2, \Psi^3)$, que da las coord. curv. en func. de las cart.: $x^i = \Psi^i(x_1,x_2,x_3)$: ambas determinan el sistema de referencia curvilíneo. La matriz jacobiana de $\mathbf{\Phi}$, $J(\mathbf{\Phi}) := [\partial(x,y,z)/\partial(u,v,w)]$; la de $\mathbf{\Psi}$, $[\partial(u,v,w)/\partial(x,y,z)] = J^{-1}$, es la inversa de la J de $\mathbf{\Phi}$.

• **dominio de regularidad** del sist. curv. es el de las relaciones $\mathbf{\Phi}$, o sea

$$\mathcal{D} = \{(u,v,w) \mid \mathbf{\Phi} \text{ es dif. } \&\ \det J(\mathbf{\Phi}) = \det[\partial(x,y,z)/\partial(u,v,w)] \neq 0\}$$

(condiciones de existencia de *función inversa diferenciable* $\mathbf{\Phi}^{-1} = \mathbf{\Psi}$).

Ejemplo: región de regularidad de las coordenadas esféricas del espacio

• **lug. geom. coordenados**: determinados haciendo constantes coordenadas *curvilíneas*:

• ***Líneas coordenadas*** por $P(u_0,v_0,w_0) \in \Omega \subset \mathbb{E}_3$: son las curvas dadas por las ecs. paramétricas curvilíneas sgtes.:

$$\mathcal{L}_u(P) := \{u = t,\ v = v_0,\ w = w_0\} \text{ y análogas } \mathcal{L}_v\ ,\ \mathcal{L}_w$$

y consisten en las curvas $\underline{r} = \underline{r}(t)$ descritas en cart. como:

$$\mathcal{L}_u(P) = \{x_i = \Phi_i(t,\ v_0,\ w_0);\ t \in I_t\} \text{ y análogas } \mathcal{L}_v\ ,\ \mathcal{L}_w$$

Son, pues, las trazas de $\underline{r}(u,v,w)$ cuando varía unilateralmente cada coord. curv. por separado (l.g. unidimensionales). Son además la imagen por $\underline{\mathbf{\Phi}}$ de las líneas coord. de $\mathcal{D}$ en $\mathbb{R}^3$.

• ***Superf. coordenadas***: por $P(u_0,v_0,w_0)$:

$$\mathcal{S}_{uv}(P) := \{u = \alpha,\ v = \beta,\ w = w_0;\ (\alpha,\ \beta) \in \mathcal{D} \cap \{w = w_0\}\} \text{ y análogas } \mathcal{S}_{uw\,y}\ \mathcal{S}_{vw}\ .$$

y consisten en las superficies $\underline{r} = \underline{r}(\alpha,\ \beta)$ descritas en cart. como:

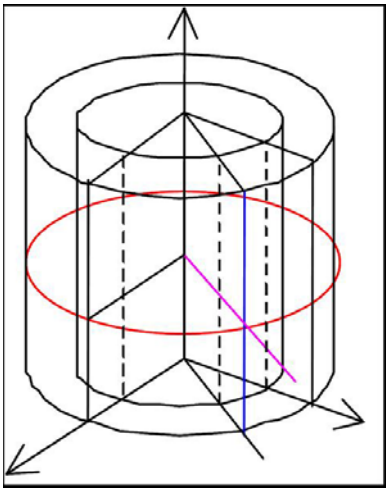
$$\mathcal{S}_{uv}(P) = \{x_i = \Phi_i(\alpha,\ \beta,\ w_0);\ (\alpha,\ \beta) \in \mathcal{D} \cap \{w = w_0\}\} \text{ y análogas } \mathcal{S}_{uw\,y}\ \mathcal{S}_{vw}.$$

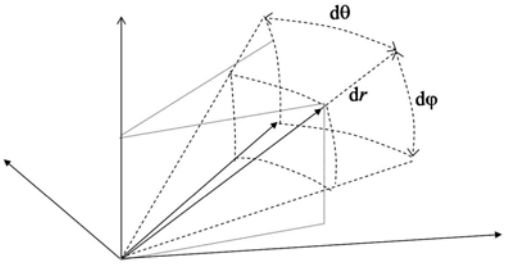
Son, pues, los l.g. descritos (bidimensionales) por $\underline{r}(u,v,w)$ cuando permanece constante cada coord. curv. por separado; tamb. son la traza bidim. de $\underline{r}$ cuando varían sólo dos coord. curv.

•Obs.: 1) los vectores $\partial_u \underline{r}(P)$, $\partial_v \underline{r}(P)$, $\partial_w \underline{r}(P)$ dirigen las líneas coord. $\mathcal{L}_u$, $\mathcal{L}_v$, $\mathcal{L}_w$ del sist. curv. en cada punto P del dom. de regularidad.: por el concepto e interpretación geométrica de cada derivada parcial.

2) En el dominio de regularidad, esos tres vectores son lin. indep. y formarán la base natural del sist. curvilíneo (N.: esta base será variable de un punto a otro de Ω).

- **Aplicaciones: Parametrización de l. g. en curvilíneas**: análogo a cartesianas
  - *curvas* $C \equiv \{u^i = u^i(t);\ t \in I_C \subset \mathbb{R}\} \rightarrow$ P genérico en función de *un* parámetro
  - *superficies* $S \equiv \{u^i = u^i(\alpha, \beta);\ (\alpha, \beta) \in D_S \subset \mathbb{R}^2\} \rightarrow$ P genérico en func. de *dos* parámetros
  - *sólidos* $V \equiv \{u^i = u^i(\alpha, \beta, \gamma);\ (\alpha,\beta,\gamma) \in D_V \subset \mathbb{R}^3\} \rightarrow$ P genérico en función de *tres* parámetros
  - **celda elemental curvilínea**: dV en curvilíneas = $[\underline{g}_u, \underline{g}_v, \underline{g}_w]dudvdw$
- **Base natural** *del sist. curvilíneo*:
  Def.: dom. de regularidad ,$\Omega := \{P / \underline{g}_i(u,v,w) := \partial \underline{r} / \partial x^i$ es una base de $\mathbb{V}$, $\{\underline{g}_i(P)\}$, asociada al punto P, llamada *base natural* del sistema curvilíneo
  obs: cada vector $\underline{g}_i(u,v,w)$ expresado en $\{\underline{e}_i\}$ es una columna de la matriz jacobiana, J ,de $\boldsymbol{\Phi}$, cuyo determ. es $\neq 0$ en los P del dom. reg., debido a la condición de biyección diferenciable de $\boldsymbol{\Phi}$.
- **Matriz fundamental** *del sist. curv.*
  def.: Es la matriz de Gram de la base natural: $G(u,v,w) = [g_{ij}(u,v,w)] = [\underline{g}_i(u,v,w)\cdot\underline{g}_j(u,v,w)]$
  cálculos: $G(u,v,w) = J^t \cdot J$; $g = \det G(u,v,w) = (\det J)^2$.
- **Base natural recíproca** *del sist. curvilíneo*:
  Def.: La base recíproca de la natural, $\{\underline{g}^i(u,v,w)\}$, se llama base recíproca nat. y se obtiene en la filas de $J^{-1}(u,v,w)$.
- *Sist. de coordenadas ortogonales*: **base física**
  Def.: Si la base natural $\{\underline{g}_i(P)\}$ es *ortogonal* el sist. de coord. se dice *ortogonal* y la base ortonormal que resulta al normalizarla se llama *base física* del sist. y se denota $\{\hat{\underline{e}}_i(u,v,w)\}$. Cálculo a partir de J.
- **Ejemplos: sist. de coordenadas clásicos**
  - *polares*: $\{x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\,\mathrm{sen}\theta;\ \rho > 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi\}$
  - *cilíndricas*: $\{x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\,\mathrm{sen}\theta,\ z = z;\ \rho > 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi\}$
  - *esféricas*: $\{x = r\,\mathrm{sen}\varphi\cos\theta,\ y = r\,\mathrm{sen}\varphi\,\mathrm{sen}\theta,\ z = r\cos\varphi;\ r > 0,\ 0 < \varphi < \pi,\ 0 \leq \theta < 2\pi\}$





$$\underbrace{\begin{bmatrix} | & | & | \\ \hat{\underline{e}}_u & \hat{\underline{e}}_v & \hat{\underline{e}}_w \\ | & | & | \end{bmatrix}_{\{\underline{e}_i\}}}_{\text{base física en base cartesiana}} = \underbrace{J(u,v,w)}_{\text{base nat. en cartes.}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{|\underline{g}_u|} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{|\underline{g}_v|} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{|\underline{g}_w|} \end{bmatrix}}_{\text{factores de escala}=\sqrt{G}} = \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & | \\ \frac{\underline{g}_u}{|\underline{g}_u|} & \frac{\underline{g}_v}{|\underline{g}_v|} & \frac{\underline{g}_w}{|\underline{g}_w|} \\ | & | & | \end{bmatrix}_{\{\underline{e}_i\}}}_{\text{base nat. normalizada en cartes.}}$$

b) Derivación de la base natural: símbolos de Christoffel

•Se *definen* Γ^k_{ij} como la k^a compte. contra de $\partial \underline{g}_i/\partial x^j$ en la base natural $\{\underline{g}_k\}$, es decir, por def.:

$$\frac{\partial \underline{g}_i}{\partial x^j} := \Gamma^k_{ij}(x^1,x^2,x^3)\underline{g}_k(x^1,x^2,x^3) \Rightarrow \Gamma^k_{ij} = \underline{g}^k \cdot \frac{\partial \underline{g}_i}{\partial x^j} = \frac{\partial x^k}{\partial x_h}\frac{\partial^2 x_h}{\partial x^i \partial x^j}$$

•*Propiedades*: i) $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$; ii) $\frac{\partial \underline{g}^i}{\partial x^j} = -\Gamma^i_{jk}\underline{g}^k$

•Se pueden *calcular* por cajas a partir de la matriz jacobiana J

$$[\Gamma^k_{ij}]_{k=f,\ i=c,\ j=m} = J^{-1}\cdot\frac{\partial J}{\partial x^j}(x^1,x^2,x^3)$$

Ejemplos: Cilíndricas y esféricas. PR2.1 á 7

La disposición alternativa $[\Gamma^k_{ij}]_{k=m,\ i=f,\ j=c}$ se puede obtener de la anterior (como con los tens. de 3er. orden). Se puede obtener cada caja, una a una, en las dos formas de disposición matricial: ▶

•Se pueden *calcular* tb. a partir del tensor métrico o matriz de Gram, G

si $A_i = \partial_i(G)$, B_i = tres i^{mas} cols.de las A's, $C_i = B_i^t$ entonces: ▶

$[\Gamma^k_{ij}]_{k=f,i=c,j=m} = \frac{1}{2}G^{-1}\cdot[A_j+B_j-C_j]$; $[\Gamma^k_{ij}]_{k=m,i=f,j=c} = \frac{1}{2}G^{-1}*[\![B_h+C_h-A_h]\!]_{i=cm}$;

Expresiones matriciales (1)

$$J(u,v,w) = \left[\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right] = \left[\begin{matrix} | & | & | \\ \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} & \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} & \frac{\partial \underline{r}}{\partial w} \\ | & | & | \end{matrix}\right]_{\{\underline{e}_i\}} = \left[\begin{matrix} | & | & | \\ \underline{g}_u & \underline{g}_v & \underline{g}_w \\ | & | & | \end{matrix}\right]_{\{\underline{e}\}} ;G = J^t\cdot J$$

$$J^{-1} = \left[\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right]^{-1} = \left[\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right] = \left[\begin{matrix} | & | & | \\ \underline{g}_u & \underline{g}_v & \underline{g}_w \\ | & | & | \end{matrix}\right]^{-1}_{\{\underline{e}_i\}} = \left[\begin{matrix} | & | & | \\ \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ | & | & | \end{matrix}\right]_{\{\underline{g}_i\}} = \left[\begin{matrix} - & \underline{g}^u & - \\ - & \underline{g}^v & - \\ - & \underline{g}^w & - \end{matrix}\right]_{\{\underline{e}_i\}}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \underline{g}_i}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij}\underline{g}_k \\ \frac{\partial \underline{g}^i}{\partial x^j} = -\Gamma^i_{jk}\underline{g}^k \end{cases}$$

$$\left[\Gamma^k_{ij}\right]_{k=f,i=c,j=m} = J^{-1}\cdot\frac{\partial J}{\partial x^j} \ (\Leftrightarrow \text{pasar a curv. contras las derv. parc. de los } \underline{g}\text{'s})$$

$$\left[\begin{matrix}\Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{21} \\ \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{21}\end{matrix}\right]_{j=1}, \left[\begin{matrix}\Gamma^1_{12} & \Gamma^1_{22} \\ \Gamma^2_{12} & \Gamma^2_{22}\end{matrix}\right]_{j=2} \leftrightarrow \left[\Gamma^k_{ij}\right]_{k=f,i=c,j=m}$$

$$\left[\begin{matrix}\Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} \\ \Gamma^1_{21} & \Gamma^1_{22}\end{matrix}\right]_{k=1}, \left[\begin{matrix}\Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} \\ \Gamma^2_{21} & \Gamma^2_{22}\end{matrix}\right]_{k=2} \leftrightarrow \left[\Gamma^k_{ij}\right]_{k=m,i=f,j=c}$$

Expresiones matriciales (2): Símbolos de Christoffeln desde la matriz de Gram (en dimensión n = 2; análogo, si n = 3)

$$G = [g_{ij}(u,v,w)]$$

$$A_1 := \frac{\partial}{\partial u} G = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} g_{11} & \frac{\partial}{\partial u} g_{12} \\ \frac{\partial}{\partial u} g_{21} & \frac{\partial}{\partial u} g_{22} \end{bmatrix}; A_2 := \frac{\partial}{\partial v} G = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial v} g_{11} & \frac{\partial}{\partial v} g_{12} \\ \frac{\partial}{\partial v} g_{21} & \frac{\partial}{\partial v} g_{22} \end{bmatrix}; \left(A_3 := \frac{\partial}{\partial w} G \right)$$

$$B_1 := \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} g_{11} & \frac{\partial}{\partial v} g_{11} \\ \frac{\partial}{\partial u} g_{21} & \frac{\partial}{\partial v} g_{21} \end{bmatrix}; B_2 := \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} g_{12} & \frac{\partial}{\partial v} g_{12} \\ \frac{\partial}{\partial u} g_{22} & \frac{\partial}{\partial v} g_{22} \end{bmatrix}; (B_3 = \ldots)$$

$$C_1 := B_1' = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} g_{11} & \frac{\partial}{\partial u} g_{21} \\ \frac{\partial}{\partial v} g_{11} & \frac{\partial}{\partial v} g_{21} \end{bmatrix}; C_2 := B_2' = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} g_{12} & \frac{\partial}{\partial u} g_{22} \\ \frac{\partial}{\partial v} g_{12} & \frac{\partial}{\partial v} g_{22} \end{bmatrix}; (C_3 = B_3' = \ldots)$$

$$[\Gamma^k_{ij}]_{k=f,\, i=c,\, j=m} = \tfrac{1}{2}\, G^{-1} \cdot [A_j + B_j - C_j],\ (\text{para } j = 1, 2, (3))$$

$$\begin{bmatrix} [\Gamma^1_{ij}] \\ [\Gamma^2_{ij}] \end{bmatrix}_{k=m,\, i=f,\, j=c} = \tfrac{1}{2}\, G^{-1} * \begin{bmatrix} B_1 + C_1 - A_1 \\ B_2 + C_2 - A_2 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} g^{11}[B_1 + C_1 - A_1] + g^{12}[B_2 + C_2 - A_2] \\ g^{21}[B_1 + C_1 - A_1] + g^{22}[B_2 + C_2 - A_2] \end{bmatrix}$$

Nota: Por la simetría de *G*, también se pueden obtener las B_i = 2 i-ésimas filas de las A's puestas en columnas

Expresiones matriciales (2: Símbolos de Christoffeln desde la matriz de Gram, alternativa válida para las cajas B_i)

$$G = [g_{ij}(u,v,w)]$$

$$A_1 := \frac{\partial}{\partial u} G = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} g_{11} & \frac{\partial}{\partial u} g_{12} \\ \frac{\partial}{\partial u} g_{21} & \frac{\partial}{\partial u} g_{22} \end{bmatrix}; A_2 := \frac{\partial}{\partial v} G = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial v} g_{11} & \frac{\partial}{\partial v} g_{12} \\ \frac{\partial}{\partial v} g_{21} & \frac{\partial}{\partial v} g_{22} \end{bmatrix}; \left(A_3 := \frac{\partial}{\partial w} G \right)$$

$$B_1 := \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} g_{11} & \frac{\partial}{\partial v} g_{11} \\ \frac{\partial}{\partial u} g_{12} & \frac{\partial}{\partial v} g_{12} \end{bmatrix}; B_2 := \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} g_{21} & \frac{\partial}{\partial v} g_{21} \\ \frac{\partial}{\partial u} g_{22} & \frac{\partial}{\partial v} g_{22} \end{bmatrix}$$

$$C_1 := B_1' = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} g_{11} & \frac{\partial}{\partial u} g_{12} \\ \frac{\partial}{\partial v} g_{11} & \frac{\partial}{\partial v} g_{12} \end{bmatrix}; C_2 := B_2' = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} g_{21} & \frac{\partial}{\partial u} g_{22} \\ \frac{\partial}{\partial v} g_{21} & \frac{\partial}{\partial v} g_{22} \end{bmatrix}$$

$$[\Gamma^k_{ij}]_{k=f,\, i=c,\, j=m} = \tfrac{1}{2}\, G^{-1} \cdot [A_j + B_j - C_j],\ (\text{para cada } j = 1, 2, (3))$$

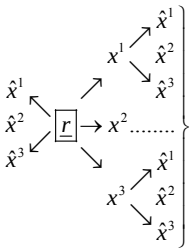
$$\begin{bmatrix} [\Gamma^1_{ij}] \\ [\Gamma^2_{ij}] \end{bmatrix}_{k=m,\, i=f,\, j=c} = \tfrac{1}{2}\, G^{-1} * \begin{bmatrix} B_1 + C_1 - A_1 \\ B_2 + C_2 - A_2 \end{bmatrix};$$

N.: Por la simetría de *G*, también se pueden obtener las B_i = dos (tres) i-ésimas filas de las A's puestas en columnas

d) Cambio de sist. de coordenadas: relaciones de transf.

Dado un sist. curv. $\{O; x^i\}$, de base natural $\{\underline{g}_i(x^1,x^2,x^3)\}$, se introduce un sist. curv. nuevo $\{O; x\hat{}^i\}$ si se tienen func. diferenc. de clase 2 al menos, $x^i = x^i(x\hat{}^1,x\hat{}^2,x\hat{}^3) = \xi^i(x\hat{}^1,x\hat{}^2,x\hat{}^3)$ cumpliendo: el jacobiano $F(\xi) = \det[\partial x^i / \partial x\hat{}^j] \neq 0$.

• <u>*Matriz de cambio de bases naturales*</u>:



$$\Rightarrow \frac{\partial \underline{r}}{\partial \hat{x}^j} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^j} \Leftrightarrow \hat{\underline{g}}_j = \frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^j}\underline{g}_i \Leftrightarrow \begin{bmatrix} | & | & | \\ \hat{\underline{g}}_1 & \hat{\underline{g}}_2 & \hat{\underline{g}}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}_{\{\underline{g}_i\}} = \left[\frac{\partial(x^1,x^2,x^3)}{\partial(\hat{x}^1,\hat{x}^2,\hat{x}^3)}\right] := F$$

F = matriz del c. de base entre las bases naturales de los dos sistemas.

• Las fórmulas del c. de b. son las vistas en álgebra tens., aplicadas punto a punto, es decir, en un punto genérico.

• <u>Ejemplo</u>: 1) Obtener la matriz del c. de base al sist. de coord. esféricas (r,φ,θ) desde coord. cilíndricas (ρ,θ,z)

• otros ejemplos de cambio de sist.: PR2, ejercicios 6, 7, 11 y apartados de varios de la PR3

e) Aplicaciones: en lugres geométricos y en Tª de Campos

1) Velocidad y aceleración de una trayectoria en curvilíneas

Dada curva C en curv. C: $\{u^i = u^i(t) / t \in [a\ ,\ b] \subset \mathbb{R}\}$, su velocidad y acelaración son:

$$t \leftarrow \underline{r} \begin{matrix} \nearrow u \to t \\ \searrow v \to t \\ \quad w \to t \end{matrix} \Rightarrow \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial u^i}\frac{du^i}{dt} = \frac{du^i}{dt}\underline{g}_i\left(u(t),\, v(t),\, w(t)\right) = \frac{du^i}{dt}(t)\underline{g}_i(t)$$

$$\frac{d^2\underline{r}}{dt^2} = \frac{d^2u^i}{dt^2}\underline{g}_i + \frac{du^i}{dt}\frac{d\underline{g}_i}{dt} = \frac{d^2u^i}{dt^2}\underline{g}_i + \frac{du^i}{dt}\frac{\partial \underline{g}_i}{\partial u^j}\frac{du^j}{dt} = \frac{d^2u^k}{dt^2}\underline{g}_k + \frac{du^i}{dt}\Gamma^k{}_{ij}\frac{du^j}{dt}\underline{g}_k =$$

$$\left(\frac{d^2u^k}{dt^2} + \frac{du^i}{dt}\Gamma^k{}_{ij}\frac{du^j}{dt}\right)\underline{g}_k \Leftrightarrow a^k(t) = \frac{d^2u^k}{dt^2}(t) + \frac{du^i}{dt}(t)\Gamma^k{}_{ij}(t)\frac{du^j}{dt}(t)$$

2) Líneas de campo de un c. vectorial

Def. (intrínseca): $C : \{\underline{r} = \underline{r}(\alpha)\ ;\ \alpha \in I \subset \mathbb{R}\}$ es una línea de campo de un c. v. $\underline{v} : \mathbb{E}_3 \to \mathbb{V}_3$ que pasa por P_0 si $\forall \alpha : \frac{d\underline{r}}{d\alpha}(\alpha) \,||\, \underline{v}(P(\alpha)), \exists \alpha_0 \,/\, \underline{r}(\alpha_0) = OP_0$

i) En cartesianas, bastará exigir $\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$ a la curva C : $\{x_i = x_i(\alpha)\}$

ii) En curvilíneas, bastará exigir: $\frac{du}{v^1} = \frac{dv}{v^1} = \frac{dw}{v^3}$ a la curva C : $\{x^i = x^i(\alpha)\}$

En ambos casos son un sistema de e.d.o. que deben conducir a cálc. de primitivas elemental cuyas constantes de integración se ajuntan para que C pase por P_0.

3) Derivación de campos en curv.: derivada covariante

Los símb. de Chr. permiten deducir expresiones de las derivadas resp. x^j de los campos vect. y tensoriales en curv.:

i) c. v. en contras:

$$\underline{v} = v^i(u,v,w)\underline{g}_i(u,v,w) \Rightarrow \frac{\partial \underline{v}}{\partial x^j} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j}\underline{g}_i + v^i\frac{\partial \underline{g}_i}{\partial x^j} =$$

$$= \frac{\partial v^i}{\partial x^j}\underline{g}_i + v^i\Gamma^k{}_{ij}\underline{g}_k = \left(\frac{\partial v^k}{\partial x^j} + \Gamma^k{}_{hj}v^h\right)\underline{g}_k := v^k{}_{,j}\,\underline{g}_k \Rightarrow v^k{}_{,j} = \frac{\partial v^k}{\partial x^j} + \Gamma^k{}_{hj}v^h$$

Los escalares $v^k{}_{,j}$ se llaman *deriv. covariantes* de las cptes. contras de $\underline{v}$

ii) c.v. en covas es análogo: la *derivada covariante* de las comptes. covas se denota $v_{i\,,\,j}$ y es:

$$\underline{v} = v_i\underline{g}^i \Rightarrow \frac{\partial \underline{v}}{\partial x^j} = \frac{\partial v_i}{\partial x^j}\underline{g}^i - v_i\Gamma^i{}_{jk}\underline{g}^k = \left(\frac{\partial v_k}{\partial x^j} - v_h\Gamma^h{}_{jk}\right)\underline{g}^k := v_{k\,,\,j}\underline{g}^k$$

Ambas derivadas covariantes se pueden obtener matricialmente, tanto para cada j como para todos ellos simultáneamente. Por ejemplo:

$$\left[v^k{}_{,j}\right]_{k=f} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left[v^k\right]_{k=f} + \left[\Gamma^k{}_{hj}\right]_{k=f,\,h=c}\cdot\left[v^h\right]_{h=f}$$

$$\left[v^k{}_{,j}\right]_{k=f,\,j=c} = \left[\frac{\partial v^k}{\partial x^j}\right]_{k=f,\,j=c} + v^h\left[\Gamma^k{}_{jh}\right]_{k=f,\,j=c,\,h=m} \qquad \text{(y análogo para } v_{k\,,\,j}\text{)}$$

Análogamente se puede razonar con los campos tensoriales:

i) En componentes contra-cova:

$$\underline{\mathbf{T}} = t^i{}_j(u,v,w)\underline{g}_i \otimes \underline{g}^j \Rightarrow \frac{\partial \underline{\mathbf{T}}}{\partial x^k} = \frac{\partial t^i{}_j}{\partial x^k}\underline{g}_i \otimes \underline{g}^j + t^i{}_j\frac{\partial \underline{g}_i}{\partial x^k} \otimes \underline{g}^j + t^i{}_j\underline{g}_i \otimes \frac{\partial \underline{g}^j}{\partial x^k} =$$

$$= \frac{\partial t^i{}_j}{\partial x^k}\underline{g}_i \otimes \underline{g}^j + t^i{}_j\Gamma^h{}_{ik}\underline{g}_h \otimes \underline{g}^j - t^i{}_j\underline{g}_i \otimes \Gamma^j{}_{kh}\underline{g}^h =$$

$$= \left(\frac{\partial t^i{}_j}{\partial x^k} + t^h{}_j\Gamma^i{}_{hk} - t^i{}_h\Gamma^h{}_{kj}\right)\underline{g}_i \otimes \underline{g}^j := t^i{}_{j\,,\,k}\underline{g}_i \otimes \underline{g}^j \Rightarrow \boxed{t^i{}_{j\,,\,k} = \frac{\partial t^i{}_j}{\partial x^k} + \Gamma^i{}_{hk}t^h{}_j - t^i{}_h\Gamma^h{}_{jk}}$$

la *derivada covariante* también puede expresarse matricialmente para cada k.

ii) Es análogo en las otras componentes tensoriales posibles. Por ejemplo en covas puras sería:

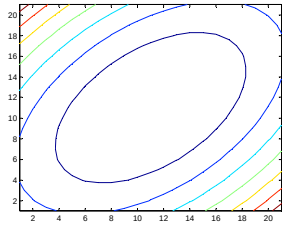
$$\underline{\mathbf{T}} = t_{ij}(u,v,w)\underline{g}^i \otimes \underline{g}^j \Rightarrow \frac{\partial \underline{\mathbf{T}}}{\partial x^k} = \frac{\partial t_{ij}}{\partial x^k}\underline{g}^i \otimes \underline{g}^j + t_{ij}\frac{\partial \underline{g}^i}{\partial x^k} \otimes \underline{g}^j + t_{ij}\underline{g}^i \otimes \frac{\partial \underline{g}^j}{\partial x^k} =$$

$$= \frac{\partial t_{ij}}{\partial x^k}\underline{g}^i \otimes \underline{g}^j - t_{ij}\Gamma^i{}_{hk}\underline{g}^h \otimes \underline{g}^j - t_{ij}\underline{g}^i \otimes \Gamma^j{}_{hk}\underline{g}^h =$$

$$= \left(\frac{\partial t_{ij}}{\partial x^k} - t_{hj}\Gamma^h{}_{ik} - t_{ih}\Gamma^h{}_{jk}\right)\underline{g}^i \otimes \underline{g}^j := t_{ij\,,\,k}\underline{g}^i \otimes \underline{g}^j \Rightarrow \boxed{t_{ij\,,\,k} = \frac{\partial t_{ij}}{\partial x^k} - t_{hj}\Gamma^h{}_{ik} - t_{ih}\Gamma^h{}_{jk}}$$

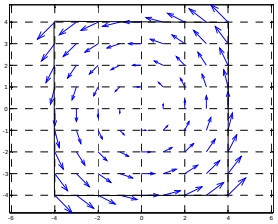
En análogo en los restantes tipos de componentes (formulario). Todas estas fórmulas pueden expresarse matricialmente para cada k.

Algunas figuras (1)



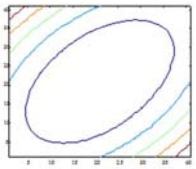
ISOCUANTAS

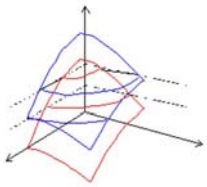
de $U(x,y) = x^2 + xy + y^2$

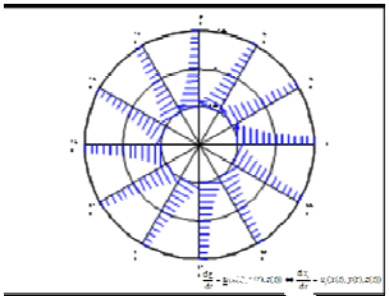


LÍNEAS DE CAMPO

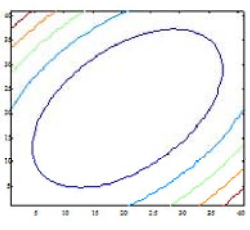
de $\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r}$ con $\underline{\omega} = \omega \underline{k}$

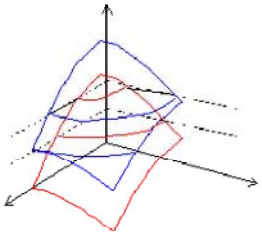




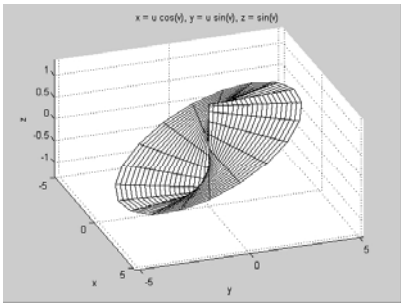


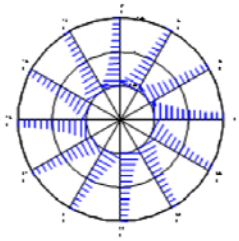
Algunas figuras (2)



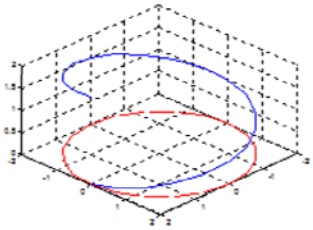


•Isocuantas de c. esc. en $\mathbb{E}_2$ y en $\mathbb{E}_3$



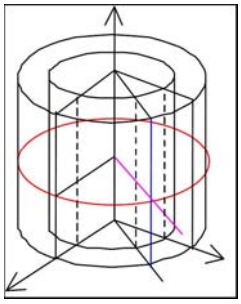


•Líneas de campo en $\mathbb{E}_2$

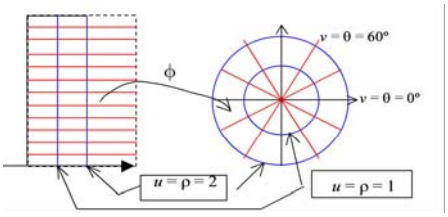


•curva en cilíndricas: $\{\rho = 2, \theta = t, z = t/\pi\}$

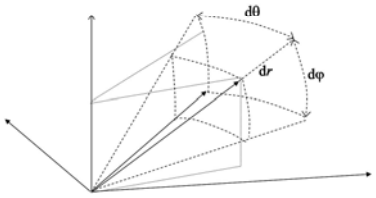
Algunas figuras (3)



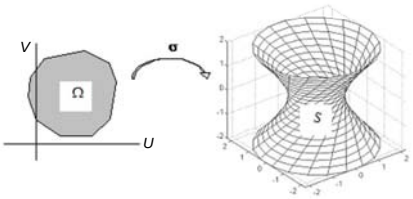
•Lin. y Sup. Coord. del Sist. Cilíndrico



•lín. coordenadas del sist. coordenadas polares



celda elemental esférica



Parametrización de una superficie en $\mathbb{E}_3$