CAPÍTULO 2º - Elementos de análisis tensorial y sistemas de coordenadas

2.1 Elementos de Análisis Tensorial: repaso

a) Espacio y plano puntuales: $\mathbb{E}_3$ y $\mathbb{E}_2$.

- son espacios puntuales (espacios afines euclídeos tridimensional y bidimensional)
- referencia vectorial mediante punto *origen*, $O \in \mathbb{E}_3$.
- $\forall P \in \mathbb{E}_3$: $\underline{r}(P) := \underline{OP} \rightarrow$ *vector de posición* del punto P resp. de O.
- lugares geométricos de $\mathbb{E}_3$ y $\mathbb{E}_2$.: recta afín o puntual, plano afín, curva *C*, superficie *S*. (¡¡)
- ecuación vectorial de un l.g. (¡¡): dar $\underline{r}(X)$ para todo X (punto genérico del l.g.)

b) Funciones escalares, vectoriales y tensoriales: campos (pto. vista intrínseco)

- en general: magnitudes variables (U, $\underline{v}$, $\underline{\mathbf{T}}$) si dependen unívocamente de *una* variable real ("$\alpha \in [a\ ,\ b] \subset \mathbb{R}$", o "$t$ …", ...) o *varias* variables reales ("$(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$ ", …) se llaman funciones (escalares, vectoriales o tensoriales) de esas variables α_i.
- campos: son magnitudes variables (U, $\underline{v}$, $\underline{\mathbf{T}}$, …) que dependen de los puntos P de una región $\Omega \subset \mathbb{E}_{3(o\ 2)}$ (*dominio* o *región de influencia* de la magnitud campo).

c) Límites y continuidad de vectores o tensores variables (intr.)

- Def. Límite: $\lim_{\alpha \to \alpha_0} \underline{u}(\alpha) = \underline{u}_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $|\alpha - \alpha_0| < \delta \Rightarrow |\underline{u}(\alpha) - \underline{u}_0| < \varepsilon$
- $\underline{u}$ es continua en $\alpha_0 \Leftrightarrow \lim_{\alpha \to \alpha_0} \underline{u}(\alpha) = \underline{u}(\alpha_0)$
- Es análogo para tensores, usando como *norma* (módulo):

$$||\underline{\mathbf{T}}|| := \text{máx}\{|\underline{\mathbf{T}} \cdot \underline{e}| : |\underline{e}| = 1\} = \text{máx}\{\lambda_i \in \sigma((\underline{\mathbf{T}}^t \cdot \underline{\mathbf{T}})^{1/2})\}$$

- Es análogo si $\underline{u} = \underline{u}(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n)$ depende de varias variables (límite múltiple)

d) Derivada de un vector o tensor variable

- Si $\underline{v}$ es función continua de α en $\alpha = \alpha_0$, se define *derivada total*

$$\underline{v}'(\alpha_0) = \frac{\mathrm{d}\,\underline{v}}{\mathrm{d}\,\alpha}(\alpha_0) = \lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{\Delta \underline{v}}{\Delta \alpha} = \lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{\underline{v}(\alpha_0 + \Delta\alpha) - \underline{v}(\alpha_0)}{\Delta\alpha}$$

cuando el límite existe.

- Análoga la derivada total para tensores o escalares.

- Si $\underline{v} = \underline{v}(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n)$ es continua en $(\alpha_1, .., \alpha_n)$ se define *1ª der. parcial*

$$\partial_1 \underline{v}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \frac{\partial \underline{v}}{\partial \alpha_1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \lim_{\Delta\alpha_1 \to 0} \frac{\underline{v}(\alpha_1 + \Delta\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) - \underline{v}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}{\Delta\alpha_1}$$

(cuando el límite existe); análogas las demás derivadas parciales

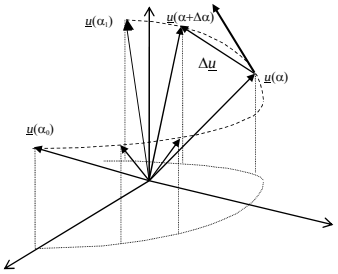
$$\partial_i(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \frac{\partial \underline{v}}{\partial \alpha_i}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

- Análogas, las derivadas parciales para tensores $\underline{\mathbf{T}}$ o escalares U.

- Dimensionalmente, la derivada $\partial_\alpha \underline{u}$ se mide en (uds. de $\underline{u}$)÷(uds. de α)
- Geométricamente, la derivada se relaciona con una recta tangente →

•Interpretación geométrica de la derivada

- •Caso de una variable independiente
  - •trayectoria vectorial de $\underline{u}(\alpha)$ en $\mathbb{V}$.
  - •tangente a la trayectoria
- •Caso de varias variables independientes
  - •trayectoria vectorial de $\underline{u}(\alpha_1,...,\alpha_n)$ cuando varía *unilateralmente* una variable.
  - •ejemplo: $\partial_\rho \underline{r}(\rho,\theta)$ y $\partial_\theta \underline{r}(\rho,\theta)$ en $\mathbb{E}_2$.



•Cálculo de derivadas: reglas de derivación

- •Linealidad de la derivación de una c. l. (coeficientes constantes)
- •Reglas de Leibnitz para la derivada de un producto
- •*Regla de la cadena* para derivar función de función
- •Derivación en componentes

•**Ejemplos**: a) derivada de vector con módulo constante; b) derivada de $\underline{r}\otimes\underline{r}$ con respecto a *x, y, z* y con respecto a ρ, θ; c) Derivar respecto de α el tensor $\underline{\mathbf{T}}(\alpha)$ dado en el Ejercicio PR1.31; d) velocidad de P si $\rho = 2t^2$, $\theta = 2\pi t/3$ y parte del origen.

•Derivación sucesiva: derivadas de orden superior

- •se suponen conocidas las derivadas de orden superior al primero.

• Uso de la Regla de la cadena: árbol de dependencia

El *árbol (o cadena) de dependencia* es un esquema de las *conexiones* de las variables *dependientes*, *intermedias* e *independientes*.

Ejemplos:

•1) Un vector $\underline{u}$ del plano $\mathbb{E}_2$, inicialmente unitario, gira alrededor de su origen, a razón de ω rad/sec, a la vez que se alarga a razón de μ cm/sec. Calcular el vector $\underline{u}'(t)$ en una base ortonl. polar.

•2) Si $\underline{w} = (u^2+v)\underline{i} + (u+v^2)\underline{j} + uv\underline{k}$ y además $u = a\cos t$, $v = a\operatorname{sen} t$, calcular $\underline{w}'_t$ en el punto en que $t = 0$ y en t genérico.

$$t \leftarrow \underline{v} \begin{cases} \alpha_1 \to t \\ .... \to t \\ \alpha_m \to t \end{cases} \Rightarrow \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial \alpha_1}\frac{d\alpha_1}{dt} + ... + \frac{\partial \underline{v}}{\partial \alpha_m}\frac{d\alpha_m}{dt}$$

una variable independiente, t; varias variables intermedias α_i

$$\underline{w} \begin{cases} u \leftarrow \alpha_1 \leftarrow u \\ \qquad\quad \alpha_1 \to v \\ v \leftarrow \alpha_1 \leftarrow u \\ \qquad\quad \alpha_1 \to v \\ u \leftarrow \alpha_m \leftarrow u \\ \qquad\quad \alpha_m \to v \\ v \leftarrow \alpha_m \leftarrow u \\ \qquad\quad \alpha_m \to v \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial \underline{w}}{\partial u} = \frac{\partial \underline{w}}{\partial \alpha_i}\frac{\partial \alpha_i}{\partial u} = \frac{\partial \underline{w}}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial u} + ... + \frac{\partial \underline{w}}{\partial \alpha_m}\frac{\partial \alpha_m}{\partial u}$$

dos var. independientes, u, v; varias v. intermedias

e) Func. de más interés: (1) lugares geométricos

•Descripción analítica de *lugares geométricos*: vec. posición

Si $\Omega \subset \mathbb{E}_{3\ (\text{ó}\ 2)}$ es un l.g. *regular* (o regular *a trozos*), es decir, un *arco de curva* C, un *casquete de superficie*, S, o un *volumen sólido*, V, encerrado por una sup. cerr.) es posible dar el vector posición $\underline{r}(P)$ de $\forall P \in \Omega$ en función de uno, dos o tres variables (parámetros). Así:

Ecuación vectorial: Dar $\underline{r} = \underline{r}(P)$, $\forall P \in \Omega$; *Ecs. paramétricas*: la vectorial separada por coordenadas de P (cartesianas o curvilíneas):

•1) una **curva *C*** : $\underline{r}(P) = \underline{r}(\alpha)$ si la relación $\alpha \rightarrow P := \gamma(\alpha)$ es biunívoca, al menos en un intervalo $[a_0, a_1] \subset \mathbb{R}$. La traza de la func. vect. $\underline{r}(\alpha)$ en $\mathbb{E}_3$ es la curva C.

- •La ec. vect. puede separarse por coordenadas cartesianas, $x_i = x_i(\alpha)$, y resultan las llamadas *ecs. paramétricas cartesianas* de *C*. También se pueden separar por coordenadas curvilíneas
  - •Ejemplo: la hélice circular de radio R y paso *p*: definición, ecuación y parametrización

•2) una **superficie** ***S*** : $\underline{r}(P) = \underline{r}(\alpha,\beta)$ si la rel. $(\alpha,\beta) \rightarrow P := \sigma(\alpha,\beta)$ es biunívoca, al menos en un región D (= abierto conexo) de $\mathbb{R}_2$, dominio de las (α,β). La traza bidim. de la función $\underline{r}(\alpha,\beta)$ en $\mathbb{E}_3$ es la superficie S; tamb. es la imagen de σ.

- •La ec. vectorial puede separarse análogamente y se obtienen las ecs. paramétricas de *S*, del tipo $x_i = x_i(\alpha,\beta)$
  - •Ejemplo: parametrizar de dos modos la *superficie* exterior de una *bóveda semicilíndrica* de longitud *L* y radio exterior *R*.

•3) **sólidos** o reg. tridim. del espacio, se parametrizan en coord. curv. (→§2.2)

•Campos

•Campos son funciones escalares, vectoriales o tensoriales de $\mathbb{E}$ en $\mathbb{R}$, $\mathbb{V}$ o $\mathbb{T}^{(p)}$, resp., y representan magnitudes que dependen del punto en que se midan

e) Funciones de más interés: (2) Campos

•*Campos* escalares, vectoriales y tensoriales (en cartesianas)

Campo = magnitud física que varía en el e.g.o. de un punto a otro. Matemáticamente son funciones de P, que en cartesianas es (x,y,z) ó (x_1,x_2,x_3)

• CAMPO ESCALAR: func. $P \rightarrow U = U(P) \in \mathbb{R}$, definida en $\forall P$ de una cierta región $D \subset \mathbb{E}_3$ (dominio o reg. de influencia).

- • Si $P = (x,y,z)$, la expresión cartesiana de U será de la forma $U = U(x,y,z)$
- • Ejemplo: temperatura alr. de un foco de calor puntual en O: $U = K/(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$

• C. VECTORIAL: func. $P \rightarrow \underline{u} = \underline{u}(P) \in \mathbb{V}_{3ó2}$, definida en $\forall P$ de una cierta región $D \subset \mathbb{E}_{3ó2}$ (dominio o reg. de influencia).

- • Si $P = (x,y,z)$, la expr. cartesiana de $\underline{u}$ será de la forma $\underline{u} = \underline{u}(x,y,z) = U_i(x,y,z)\underline{e}_i$
- • Ejemplo: velocidad de un punto P de la tierra, supuesta esférica, de radio *R*.

• C. TENSORIAL: func. $P \rightarrow \underline{\mathbf{T}} = \underline{\mathbf{T}}(P) \in \mathbb{T}^{(2)}$, definida en $\forall P$ de una cierta región $D \subset \mathbb{E}_3$ (domino o reg. de influencia).

- • Si $P = (x,y,z)$, la expresión cartesiana de $\underline{\mathbf{T}}$ será de la forma $\underline{\mathbf{T}} = \underline{\mathbf{T}}(x,y,z) = T_{ij}(x,y,z)\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$.
- • Ejemplo: campo tensorial $\underline{\mathbf{T}}(P) = \underline{r}(P) \otimes \underline{e}_r$, siendo éste último el unitario del vec. posición.

•Regularidad matemática de los campos: clase diferencial

•concepto de *clase* de una función en un punto: el órden de la derivada sucesiva *continua* de mayor orden que admite la func. en ese punto.

- •En una región D, la clase es la del punto en que sea menor. Para un campo vect. o tens., la clase dif. es la de la compte. de menor clase.

f) Diferenciales de vectores o tensores variables

•Aproximación del incremento: Diferencial

1. Una variable independiente:

$\Delta\underline{u}(\alpha;\Delta\alpha) = \underline{u}(\alpha+\Delta\alpha) - \underline{u}(\alpha) = \underline{u}'(\alpha)\,\Delta\alpha + \tfrac{1}{2}\,\underline{u}''(\alpha)\,(\Delta\alpha)^2 + \underline{\varepsilon}(\alpha,\Delta\alpha)(\Delta\alpha)^2$ (Fórmula de Taylor, versión infinitesimal para $\Delta\alpha \to 0$)

$d\underline{u}(\alpha;\Delta\alpha) := \underline{u}'(\alpha)\,\Delta\alpha$; $\therefore$ si $\underline{u}'(\alpha) \neq \underline{0}$ entonces $\Delta\underline{u}(\alpha;\Delta\alpha) = d\underline{u}(\alpha;\Delta\alpha) + \underline{o}(\alpha,\Delta\alpha)$;, donde $\underline{o}(\alpha,\Delta\alpha)$ indica un infinitésimo de orden superior a 1 cuando $\Delta\alpha \to 0$, o sea, despreciable frente al propio $\Delta\alpha$. O sea: $\Delta\underline{u} \cong \underline{u}'(\alpha)\,\Delta\alpha = d\underline{u}$: el diferencial de una función es una aproximación de su incremento.

•Lo mismo para las derivadas parciales respecto increm. *unilaterales: diferc. parcial*

2. Varias variables independientes (incrementos simultáneos):

$\Delta\underline{u}(\alpha,\beta;\Delta\alpha,\Delta\beta) = \underline{u}(\alpha+\Delta\alpha,\, \beta+\Delta\beta) - \underline{u}(\alpha,\beta) = \partial_\alpha\underline{u}(\alpha,\beta)\Delta\alpha + \partial_\beta\underline{u}(\alpha,\beta)\Delta\beta + \underline{\varepsilon}(\alpha,\beta;\Delta\alpha,\Delta\beta)$

diferencial total: $d\underline{u}(\alpha,\beta;\Delta\alpha,\Delta\beta) := \partial_\alpha\underline{u}(\alpha,\beta)\Delta\alpha + \partial_\beta\underline{u}(\alpha,\beta)\Delta\beta$; $\underline{u}$ *diferenciable total*:

$$\Delta\underline{u} \cong \partial_\alpha\underline{u}(\alpha,\beta)\Delta\alpha + \partial_\beta\underline{u}(\alpha,\beta)\Delta\beta, \text{ si alguna } \partial_\iota\underline{u}(\alpha,\beta) \neq 0$$

Ejemplo: 1)Expresar el diferencial del campo $\underline{u}(x,y) = (2x^2 - y^2)\underline{i} + xy\underline{j}$ en el pto. (2,–3)

2) Aproximar la longitud diferencial del arco de curva C, dada por la ec. vect. $\underline{r} = \underline{r}(\alpha)$.

g) Integrales de vectores o tensores resp. una var. ind.

•*Integral indefinida* de un vector o tensor respecto de una variable

definición y propiedades → análogas a la int. unidim. de Riemann

cálculo → ejemplo: Calcular $\int\underline{u}(x)dx$ siendo $\underline{u}(x) = x\underline{e}_1 + 2x^{1/2}\underline{e}_2$

•*Integral definida* de un vector o tensor respecto de una variable

definición y propiedades: como las funciones reales de 1 variable:

cálculo (Regla de Barrow componente a componente, si la base es constante)

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \underline{u}(\alpha)\,d\alpha = \left(\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} u_i(\alpha)\,d\alpha\right)\underline{e}_i$$

•*Ecuaciones diferenciales* en términos vectoriales

e.d.o. cuya función incógnita es un vector

reducción a e.d.o. escalares por separación de componentes

Ejemplo: líneas de campo de un campo vectorial $\underline{v}(x,y,z) = V_i(x,y,z)\underline{e}_i$ son las curvas $\underline{r} = \underline{r}(\alpha)$ / $\underline{r}'(a) = \underline{v}(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$ → se separa en un sistema de 3 e.d.o.

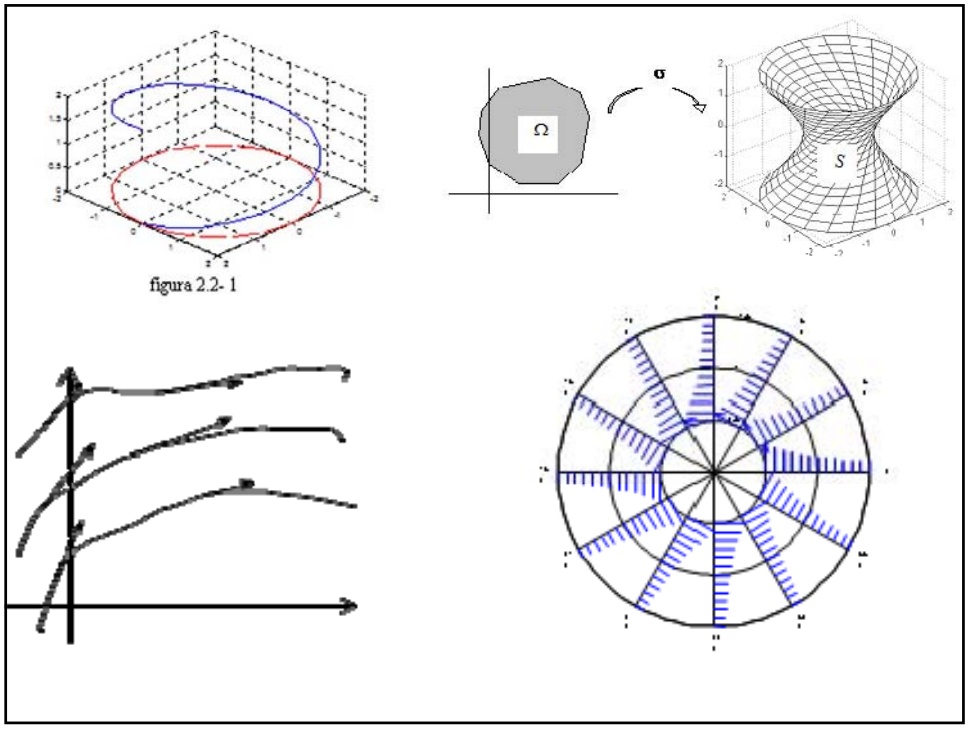


figura 2.2- 1