GEOMETRÍA Y ARQUITECTURA

1. Sobre el espacio geométrico y arquitectónico.

El concepto de espacio debe abordarse con una gran apertura de ideas. El espacio arquitectónico no puede reducirse ni al espacio físico ni a la dualidad espacio interior-exterior, ni al concepto de parcelación habitable. "El espacio arquitectónico posee un rasgo absolutamente diferencial: es creado por el hombre para el uso del hombre" (Alsina-Trillas:Lecciones de Algebra y Geometría)
.

Por otro lado, la Geometría elabora modelos matemáticos capaces de describir parcelas concretas del espacio. Cabe considerar así el espacio geométrico como una aportación teórica, sugerente y clara, al estudio de ciertas facetas formales del espacio arquitectónico.

La realización de un proyecto arquitectónico introduce en el ambiente una alteración, una alteración espacial. Volúmenes, superficies, líneas y sus articulaciones plásticas y cromáticas concurren juntas al crear, tanto en el interior como en el exterior del edificio, espacios cuya calidad dependerá también de la relación dimensional con el hombre. El espacio es siempre, en alguna medida, dinámico, precisamente porque es visible y disfrutable desde diferentes puntos de vista, y porque nunca es posible hablar de un solo espacio: por lo menos son dos, el exterior y el interior; pero habitualmente son muchísimos, porque hasta un edificio sencillo presenta numerosas articulaciones.

Para entrar en la definición del concepto de espacio arquitectónico, daremos la definición de Nikolaus Pevsner (Storia dell'architettura europea, Bari,Laterza,1963): "Un cobertizo para guardar bicicletas es un edificio. La catedral de Lincoln es una obra de arquitectura. Todas o casi todas las estructuras que delimitan un espacio de medida suficiente para que se mueva un ser humano, son un edificio... Un edificio puede provocar sensaciones estéticas de tres maneras: 1) pueden ser producidas por el tratamiento de la superficie, por las proporciones, por las relaciones de los vacíos con los llenos y por la ornamentación; 2) es estéticamente significativo el tratamiento exterior de un edificio en su conjunto, sus contrastes, los efectos,... 3) el efecto en nuestros sentidos del tratamiento del interior, la sucesión de los ambientes, el ensanchamiento de una nave en el crucero, el movimiento majestuoso de una escalinata barroca... La primera de estas maneras es en dos dimensiones: es la manera propia del pintor. La segunda es en tres dimensiones, y como trata el edificio como un volumen, es la manera del escultor. La tercera manera también es en tres dimensiones, pero se refiere al espacio: más que las anteriores es propia del arquitecto. Lo que distingue la arquitectura de la pintura y de la escultura es su característica espacialidad. En este campo, y sólo en este campo, ningún otro artista puede emular al arquitecto. Por tanto, la historia de la Arquitectura es, ante todo, la historia del hombre que modela el espacio".

La definición la recoge también Bruno Zevi (Saper Vedere L'architettura, Torino, Einaudi,1949) : "...la pintura actúa en dos dimensiones, aunque pueda sugerir tres o cuatro. La escultura actúa en tres dimensiones, pero el hombre se queda en el exterior, separado. En cambio la arquitectura es como una gran escultura excavada en cuyo interior el hombre penetra y camina". Volviendo al proceso proyectual de un edificio, para formular su esquema, el arquitecto deberá emplear un medio de representación preciso y fiable. Este medio se lo proporciona la GEOMETRÍA DESCRIPTIVA, y sobre todo, la GEOMETRÍA EUCLIDIANA, que es la geometría base del arquitecto al tratar la economía del espacio, aunque también puede recibir ayuda de otra geometría, la GEOMETRÍA PROYECTIVA, que es la base matemática de la descriptiva.

La arquitectura no puede expresarse ni comunicarse más que con medios gráficos y éstos tienen gran importancia porque, convenientemente elegidos y usados con maestría, pueden efectivamente representar y simular la deseada realidad proyectual; pero hay que estar muy atentos para no confundir la geometría con la arquitectura.

2. Sobre el concepto de Geometría.

La Geometría siempre ha partido de la observación de la realidad. Diferentes realidades han motivado diferentes modelizaciones geométricas. Felix Klein (Vergleichende Betrachtungen űber neuere geometrische Forschungen, conocidoco mo el Programa de Erlangen), en 1872 sentó las bases de una definición unificadora de la Geometría. Para Klein, en una geometría existen dos bases fundamentales: un espacio E y un grupo G(E) de transformaciones de ese espacio. E puede ser un conjunto finito de elementos, R^2,R^3,.. El grupo G(E) está contenido en el grupo de biyecciones de E en E.

A partir de este par se clasifican las figuras en equivalentes si y sólo si existe una tranformación de G(E) que transforme una en otra. Como sobre un mismo espacio puedo considerar distintos grupos de transformaciones, existen tantas geometrías como posibles subgrupos del grupo de biyecciones del espacio en sí mismo. La distinción entre una y otra se basa en el conjunto de invariantes de cada geometría.

3. La geometría de la arquitectura.

Para proyectar se necesita poseer un instrumento gráfico de proyección: la geometría. Una geometría del diseño arquitectónico, en la que la palabra 'diseño' reviste el doble significado de invención-proyectación y de operación gráfica para la construcción de la propia invención.

La geometría es pues el instrumento con el que delimitamos, cortamos, precisamos y formamos el espacio. En palabras de Giancarlo De Carlo, L'idea plastica come sfida alla tecnologia, 1975: "La forma tridimensional de la arquitectura no es el exterior de un sólido, sino la envoltura cóncava y convexa de un espacio; y a su vez el espacio no es el vacío sino el lugar volumétrico en el que se desenvuelve toda una serie de actividades posibles y variadas. En consecuencia, en el caso de la arquitectura, la "invención" se refiere a un "sistema especial organizado" que experimentamos a través de su utilización y que percibimos a través de su forma".

Al ser la reconocibilidad de las formas una condición irrenunciable para que el mensaje arquitectónico sea recibido, las formas serán pues tanto más perceptibles y reconocibles cuanto más sencillas y regulares sean. Es más, los caracteres formales específicos, intrínsecos, de las figuras geométricas son tan fuertes que generan en el hombre, cualquiera que sea su grado de evolución, inmediatas e instintivas referencias simbólicas.

La geometría es la ciencia de las propiedades y relaciones de magnitudes en el espacio (Diccionario Oxford). La geometría es para el arquitecto una base y un medio disciplinar, un instrumento indispensable en el tratamiento de las formas que entran en la "composición" de los espacios. La geometría es una construcción del cerebro humano, si bien la observación de la naturaleza nos llevaría a considerarla como un conjunto de leyes que están fuera del hombre. Al observar los procesos de crecimiento de los minerales, de los vegetales y de los animales, la racionalidad humana, ha sido capaz de "reconocer" ciertas formas sencillas, hallando relaciones particulares entre ellas y en el interior de ellas, es decir, construyendo los sistemas de lógica matemática que se llaman geometrías.

Pero la Geometría y la Arquitectura son creaciones humanas distintas. La geometría, que es matemáticas, se ocupa en efecto del espacio abstracto, mientras que la arquitectura, que es técnica y arte, se ocupa del espacio concreto, del espacio en relación al hombre, a su presencia como observador, a su dimensión como beneficiario de ella.

4. Arquitectura y Proporción.

En la arquitectura no actúa más que el sentido de las proporciones .Bruno Taut Teoria dell' architettura, Estambul,1937 excluye para la arquitectura el uso del término 'espacio': "En arte interesa sólo la forma concreta... mientras que a nosotros nos interesa la sala en cuanto que su 'envoltura' tiene las propiedades justas". La teoría de la proporción tiene como objetivos básicos su intencionalidad visual, consistente en crear un orden aparente por repetición de figuras semejantes y su intencionalidad formal, basada, no en las formas mismas, sino en el ritmo entre tales formas.

Las proporciones clásicas son armónicas, mientras que la civilización actual, si es que es civilización, se caracteriza precisamente por las disarmonías. En arquitectura, las disonancias, es decir, las desproporciones, pueden reflejar la atmósfera dinámica, trágica y "descompuesta" del mundo actual; sin embargo en tiempos recientes, pero no demasiado recientes, la atención de los arquitectos, y en particular de Le Corbusier, se sintió atraída por las investigaciones llevadas a cabo por matemáticos acerca de las proporciones dinámicas y en particular sobre las propiedades de la relación áurea, es decir la relación que se establece entre la longitud de un segmento y la longitud de dos partes en que resulta dividido cuando la parte mayor resulta media proporcional entre la parte menor y todo el segmento.

Según Vitruvio De Architectura, libro I "la proporción es la conmensurabilidad de cada uno de los miembros de la obra y de todos los miembros en el conjunto de la obra mediante una determinada unidad de medida o módulo".

La teoría de las proporciones y de las medias proporcionales, cuyos tres tipos se atribuyen a Pitágoras, asumieron una particular importancia en el Renacimiento. Se trata de la proporción aritmética, la proporción geométrica y la proporción armónica.

Tres números enteros a,b,c están en:

$$\text{proporción aritmética si } b-a=c-b.$$
$$\text{proporción geométrica si } (a/b)=(b/c).$$
$$\text{proporción armónica si } (b-a)/a=(c-b)/c.$$
$$\text{media aritmética: } b=((a+c)/2)$$
$$\text{media geométrica: } b=\sqrt{(ac)}$$
$$\text{media armónica: } b=2((ac)/(a+c))$$

Definición y propiedades de la Proporción.

Dado un rectángulo, de lados a y b, se define la proporción del rectángulo como el cociente:

$$p(a,b)=((\text{Maximo}(a,b))/(\text{Mınimo}(a,b)))$$

La proporción por tanto, es siempre igual o mayor que 1, no depende del orden de los lados, es una función continua, es invariante por homotecias y semejanzas,...

Se dice que p(a,b) es conmensurable si es un número racional positivo.

Las proporciones entre las distintas partes de una obra arquitectónica se pueden expresar por relaciones de números enteros. Palladio dio gran importancia a estas relaciones estáticas. Su novedad fundamental consistió en conectar sistemáticamente una estancia con otra por medio de proporciones armónicas.

Se dice que p(a,b) es inconmensurable si es un número irracional positivo. Geométricamente esto indica que el rectángulo de proporción p(a,b) no es repetición de un cuadrado, o bien que sus lados no se pueden medir simultáneamente por repetición de una misma unidad. Vamos a considerar las proporciones del tipo $\sqrt{n}$ y la proporción aúrea.

· $p(a,b)=\sqrt{n}$.

-Los rectángulos de esta proporción forman una serie autogenerable.

-Estos rectángulos son los únicos que se pueden obtener como reunión de n veces el rectángulo recíproco, es decir, dividiendo estos rectángulos en n partes por el lado mayor, se obtienen n rectángulos de idéntica proporción al dado.

· $p(a,b)=((1+\sqrt{5})/2)=\varphi$.

Esta proporción ha mantenido un interés creciente y una constante actualidad con el paso de los siglos. Se simboliza con la letra griega φ, inicial de Fidias, escultor griego que la utilizó. Una primera definición se halla en Euclides Elementos, libro VI : "Un segmento se divide en media y extrema razón cuando todo el segmento es a su parte mayor como esta es a la menor".

-El rectángulo de proporción aúrea se construye a partir de un cuadrado, abatiendo sobre un lado, desde el punto medio de éste, el segmento que une dicho punto medio con un vértice cualquiera del cuadrado que no esté alineado con dicho punto.

-Si realizamos dos veces esa construcción se obtienen dos rectángulos aúreos superpuestos, que poseen en común el cuadrado inicial.

-El número aúreo se corresponde con la división aúrea de un segmento. Si el segmento AB pretende dividirse por un punto C tal que $((AB)/(AC))=((AC)/(CB))$,en ese segmento resulta que el total es al mayor como el mayor es al menor.

-El número de oro es el único que satisface: $\varphi^2=1+\varphi$.

A comienzos del siglo XIX los sencillas trazados geométricos son sustituidos por trazados más rigurosos basados en la sección aúrea. En lugar de la simetría bilateral y rotatoria, consideradas demasiado estáticas, los artistas prefieren la euritmia (eu=bien, ritmia=ritmo) generada a través de la composición equilibrada, pero no simétrica de elementos.

Las teorías proporcionales reservan una particular atención en el campo de la arquitectura a las técnicas de los trazados reguladores desarrollados en la segunda mitad del siglo XIX y principios del XX. Surge el deseo de controlar la composición con leyes matemáticas. Todos los artistas de los movimientos de vanguardia se interesaban por el instrumento geométrico y matemático, para investigar la estructura interna de la obra.

A mediados del siglo XX la aparición del Modulor (París, 1948)(module= unidad de medida y section d'or) de Le Corbusier, marca un punto culminante de la teoría de la proporción. La propuesta de diseño que hace Le Corbusier es el establecimiento de un módulo arquitectónico que contemple a la vez el dimensionado humano y la necesidad internacional de producción en serie. Propone para la arquitectura un sistema modular susceptible de crear armonía arquitectónica. A partir de rectángulos aúreos por superposición y división, construye la malla fundamental: fijada la unidad d, altura del hombre, considera dos series, la serie roja y la serie azul:

Serie roja: $d,\varphi d,\varphi^2 d,\varphi^3 d,...$

Serie azul: $2d,2\varphi d,2\varphi^2 d,2\varphi^3 d,...$

Este sistema proporcional es fuente de rectángulos aúreos y de cuadrados dobles. Uno de sus méritos es enlazar las series proporcionales y el mundo de la industrialización de la construcción.

A partir de la Convención sobre "La Divina Proporción", Milán,1951, disminuye gradualmente el interés por la teoría de la proporción para dejar paso a los problemas de coordinación modular, para evitar que sean sencillamente la repetición de un producto.

5. Simetría y Arquitectura.

"La Belleza está estrechamente ligada con la simetría" (Weyl).

Las primeras concepciones sobre simetría arquitectónica identificaban simetría con la proporción, el equilibrio y la belleza. Vitruvio la define como "el vínculo armónico de cada uno de los miembros del edificio respecto a la figura global de la obra". Esta concepción influyó notablemente en el Renacimiento: Durero, Miguel Angel, Piero de la Francesca, Paccioli, Leonardo da Vinci,...contribuyeron al estudio de la simetría sin desligarla del proporcionado de la obra. La referencia de Palladio I quattro libri dell'architettura: "entiendo que los edificios deben parecer un entero y bien definido cuerpo en el que un miembro convenga al otro y todos los miembros sean necesarios a aquel que se quiere hacer", sintetiza perfectamente esta vinculación arquitectónica de simetría y proporción en su aspecto global. Esta búsqueda constante del canon y el orden se reflejó no sólo en los diseños de plantas y fachadas sino en todos los elementos integrantes del edificio: frisos, columnatas, mosaicos,...Sigue Palladio " y se debe advertir que las estancias de la parte derecha respondan y sean iguales a las de la izquierda a fin de que la fábrica sea así en una parte como en la otra."

En Viollet le Duc Diccionario de Arquitectura encontramos una nueva conceptualización: "simetría significa hoy, en el lenguaje de los arquitectos, no un equilibrio ni relación armoniosa de las partes con el todo, sino una similitud de partes opuestas, la reproducción exacta, a la izquierda de un eje, de lo que hay a la derecha".

En el fondo, esta definición desmarca la teoría de la proporción de la teoría de la simetría, reduciendo ésta a su aspecto euclídeo puramente geométrico. En este sentido, la TEORIA DE LA SIMETRIA es una parte de la geometría que operando sobre el espacio euclídeo engloba como transformaciones a todas las isometrías, siendo su interés específico el estudio de los grupos de isometrías que dejan invariantes las figuras.

· Transformaciones ortogonales.

Un endomorfismo f: $R^n \rightarrow R^n$se dice ortogonal si conserva los productos escalares.

Por ser f una aplicación lineal y ortogonal conserva las normas, las distancias y los ángulos; transforma bases ortogonales en bases ortogonales; y si f admite un valor propio λ necesariamente es 1 o -1.

El conjunto $GO(R^n)=\{f/\ f: R^n \rightarrow R^n$ es lineal y ortogonal$\}$, es un grupo respecto de la composición de aplicaciones llamado grupo ortogonal de R^n.

Clasificación de transformaciones ortogonales.

En R^2 las únicas transformaciones ortogonales son los giros alrededor del origen y las simetrías axiales con ejes por el origen. En R^3 las únicas son la rotación alrededor de un eje por el origen, la simetría especular respecto a un plano que contiene al origen y la simetría rotacional.

· Isometrías.

Un movimiento rígido o isometría es una aplicación $F:R^n \rightarrow R^n$ que conserva las distancias.

Son isometrías las transformaciones ortogonales, las traslaciones y la composición de ambas.

Se demuestra que toda isometría es una transformación ortogonal o bien una traslación compuesta con una transformación ortogonal.

Grupo de simetría de una figura plana.

Entendemos por figura plana cualquier subconjunto de R^2. Una figura F puede ser estudiada "estáticamente", analizando sus propiedades métricas, o bien "dinámicamente", analizando bajo qué movimientos rígidos permanece invariante.

Consideramos todas las isometrías que transforman la figura en sí misma,

$$S\{F\} =\{f€GM(R^2)\text{tal que } f(F)=F\},$$

y lo llamamos grupo de simetría de la figura F.

-Grupos de simetría de Leonardo.

Se denomina así en honor de Leonardo da Vinci, quien lo utilizó en algunos diseños arquitectónicos de capillas.

Un grupo de simetría S{F} de una figura plana se llama grupo puntual o de Leonardo, si es un grupo finito y existe un punto de F fijo por todos los elementos de S{F}. A ese punto se le llama centro de simetría. de F.

Estos grupos tuvieron gran interés en el Renacimiento para diseñar plantas de capillas adyacentes a un núcleo central sin romper la simetría central de ese núcleo. Leonardo hizo un estudio sistemático con vistas a establecer los métodos óptimos para realizarlo.

Recientemente, el uso de estos grupos se ha visto enriquecido con una nueva idea: la existencia de un punto central de simetría en la planta permite localizar en el centro todos los servicios comunes e instalaciones de interés general.

-Grupos de simetría de los frisos.

Los frisos, elementos sustanciales de la ornamentación clásica, constan de un determinado módulo, figura o motivo que se repite a lo largo de una banda rectangular, dándose siempre una periodicidad sistemática en la repetición del módulo, que es la base del ritmo que el friso comunica. Por eso, en el diseño del friso existen dos grados de libertad: la elección del motivo y la de las transformaciones que aplicadas al motivo inicial permiten llenar la banda horizontal que contiene el friso. Estas transformaciones se limitan a una gama obtenida por los siete grupos de frisos. Esta limitación, lejos de frenar las posibilidades creativas muestra la esencia geométrica que se esconde detrás de esos diseños.

Sea una recta r con vector director a. Un grupo de simetría de un friso es cualquier grupo de isometrías del plano que deje fija r y que contenga como únicas traslaciones al grupo generado por la traslación T{a}.

Las únicas isometrías que pueden formar parte de un grupo de friso con recta fija r son las traslaciones de vector na; la simetría axial respecto de r ; las simetrías axiales con eje r' ortogonal a r ; los giros de centro un punto de r y ángulo π y las combinaciones de estos movimientos.

En el templo griego es donde el friso adquiere notoriedad constructiva: como banda que limita el acabamiento de los muros o las columnas sobre el arquitrabe, marcando la cornisa. Con ello comienza a desempeñar el doble papel de elemento arquitectónico construido y espacio susceptible de ornamentación. Aparece a lo largo de toda la historia de la Arquitectura, siendo notables los frisos árabes, como los existentes en la Alhambra de Granada.

Actualmente surge el friso de edificaciones enlazadas. Con ello, el clásico motivo geométrico que se repite a lo largo de una banda se sustituye por la planta de un edificio, capaz de generar por traslación horizontal, edificios en hilera.

-Grupos de simetría del plano.

Ciertas isometrías actúan sobre todo el plano. Fedorov demostró que existen únicamente 17 grupos de simetría. En 1869 Jordan había descrito 16 de esos grupos y en 1874, Sohncke reconoció el que faltaba.

En todos los casos se observa que a partir de una figura irregular, aplicando diversos tipos de isometrías se genera un paralelogramo que por repetición es susceptible de cubrir el plano, de forma que la distribución plana final es invariante por las mismas isometrías que generaron la figura inicial.

Un grupo G de isometrías del plano se dice grupo de simetría del plano si existe una figura F compacta y conexa (limitada por una curva cerrada) que verifique:

1. Todo el plano queda cubierto por todos los desplazamientos de la figura F según las isometrías de G.
2. F y sus imágenes se van acoplando correctamente, sin solapamientos.
3. Existen dos traslaciones independientes en G, es decir, existe una malla de paralelogramos subyacente.

Los únicos giros que pueden formar parte de un grupo de simetría G del plano, son los de orden 2, 3, 4 o 6. o sea, los ángulos de 180^0,120^0,90^0 y 60^0.

-Teoría de mosaicos.

Un tipo especial de recubrimiento del plano es el de mosaico. Surgen de añadir al principio general de repetición de un módulo en dos direcciones, condiciones restrictivas de acoplamiento y regularidad.

· Mosaicos regulares.

Resultan de acoplar entre sí una serie infinita de polígonos regulares idénticos. Los únicos son los cuadrangulares, triangulares y exagonales.

· Mosaicos semirregulares.

Combinan dos tipos de polígonos regulares. Existen 8 tipos.

· Mosaicos de Escher.

Somete a la figura generadora a una serie de transformaciones.

· Mosaicos de retícula china.(retículos para ventanas)

· Mosaico de la Alhambra de Granada.

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA.

· Alsina, C. / Trillas, E. Lecciones de Álgebra y Geometria,
Editorial Gustavo Gili, S.A.,Barcelona,1984.

· Coxeter, H.S.M. / Greitzer, S.L. Retorno a la Geometría,
DLS Euler, Editores,1993.

· Roanes Macías, E. / Roanes Lorenzo, E.,Nuevas tecnologías en Geometría,
Editorial Complutense, Madrid 1994.

· Quaroni, L. Proyectar un edificio. Ocho lecciones de arquitectura,
Xarait Ediciones. Madrid 1987.