CAPÍTULO 9.

Ecuaciones diferenciales de orden superior. Transformada de Laplace

El objetivo de este capítulo es introducir las ecuaciones diferenciales de orden superior y los sistemas, analizando métodos generales, teoremas, aplicaciones y la forma de pasar de unas a otros y viceversa. En los dos capítulos siguientes se estudiará todo lo referente a las ecuaciones diferenciales lineales de orden superior y a los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

Es habitual emplear la transformada de *Laplace* para resolver sistemas y ecuaciones diferenciales lineales no homogéneos de coeficientes constantes, siendo un método muy eficiente para simplificar los problemas.

La transformada de *Laplace* permite obtener soluciones explícitas en problemas con valores iniciales, y es especialmente útil cuando el término no homogéneo bien es discontinuo a trozos o es *impulsivo* o bien es periódico. También resuelve ecuaciones integrales y algunas ecuaciones en derivadas parciales. En concreto, convierte ecuaciones diferenciales ordinarias de coeficientes constantes en problemas algebraicos donde se incorporan de forma automática las condiciones iniciales, y permite transformar algunos problemas de ecuaciones en derivadas parciales en ecuaciones diferenciales ordinarias.

La transformada de Laplace es una de las denominadas transformaciones integrales, es decir, operadores que transforman una función en otra por medio de una integral. La conveniencia de su definición resulta de la analogía que la relaciona con las series de potencias. Si se considera que la análoga de una serie de potencias es una cierta integral impropia, en la que se sustituye la variable *x* por una exponencial se tendrá la transformada de *Laplace*, que puede por tanto interpretarse como *análoga continua* a una serie de potencias, y si éstas tienen tanta importancia en análisis cabe esperar que la transformada también la~~o~~ tenga.

Además de por sus muchas aplicaciones, la transformada de *Laplace* tiene estrechas relaciones con partes importantes de la matemática pura, y tiene interés en otras ramas de las matemáticas aplicadas. En Probabilidad y Estadística la transformada de *Laplace* de una distribución de probabilidad se denomina función característica, y es muy útil para estudiar funciones de distribución de sumas de variables aleatorias independientes, y por ejemplo, es habitual usar la transformada de *Laplace* para demostrar el teorema central del límite.

En las *secciones 1 y 2* de este capítulo se definen y se relacionan las ecuaciones diferenciales de orden superior con los sistemas de ecuaciones diferenciales, estudiando los teoremas de existencia y unicidad, en la *sección 3* se estudian métodos para reducir el grado de una ecuación diferencial en casos particulares y en la *sección 4* se introduce la transformada de Laplace. Al final de esta sección se desarrollan las aplicaciones de la transformada como procedimiento de resolución de ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones, y como método para resolver problemas concretos de física y de ingeniería.

9.1. ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR Y SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

9.1.1. Ejemplos

En esta sección se consideran ecuaciones diferenciales de orden superior al primero expresadas en la forma $y^{n)} = g(x, y, y', ..., y^{n-1)})$ o bien $F(x, y, y', ..., y^{n-1)}, y^{n)}) = 0$.

Los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias con *n* variables dependientes y una única variable independiente, pueden expresarse por: $\mathbf{y'} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ donde ahora $\mathbf{y}$ e $\mathbf{y'}$ representan vectores de $\mathfrak{R}^n$.

Ejemplos muy clásicos de estas ecuaciones surgen con frecuencia al modelar problemas físicos o técnicos. Entre ellos están:

Las ecuaciones que modelizan **la caída de los cuerpos**:

Caída libre $m\dfrac{d^2y}{dt^2} = mg$

Caída con resistencia $m\dfrac{d^2y}{dt^2} = mg - k\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2$

Estas ecuaciones fueron comentadas en el *capítulo 7*, *apartado* 7.2.2. Para resolverlas se expresaban en función de $v(t) = \dfrac{dy}{dt}$ y quedaban de la forma $m\cdot\dfrac{dv}{dt} = m\cdot g$ para la caída libre y $m\cdot\dfrac{dv}{dt} = m\cdot g - k\cdot v^2$ para la caída con resistencia. Ambas son ecuaciones diferenciales de primer orden, y después de resolverlas y calcular *v*(*t*), por integración se obtenía *y*(*t*).

Se verá más adelante en la *sección 3* que este método se puede generalizar y cuando se tiene una ecuación diferencial en la que no aparece la variable independiente, aunque sí sus derivadas, el cambio de variable $v(t) = \frac{dy}{dt}$ reduce una unidad el grado de la ecuación.

De esta forma se resuelve la ecuación de la catenaria $y'' = \frac{1}{a}\sqrt{1+(y')^2}$ que se obtuvo en el *capítulo 7* y que se resolverá en éste.

En la ecuación del **movimiento armónico simple** $\frac{d^2y}{dt^2} + k^2y = 0$, $k > 0$, no aparece la variable dependiente y suponiendo que la solución tiene inversa y es derivable, se puede expresar *y'* en función de *y*, de forma que el cambio de variable y' = *u*(*y*) reduce también el grado de la ecuación una unidad y se obtiene *u'*(y) *u*(*y*) = $-k^2y$. Integrando se obtiene *u*(*y*) y a partir de esta función la solución.

Se estudiará también en la *sección 3* este método de reducción de orden aplicable a la ecuación que permite calcular la **velocidad de escape de un cohete**: $\frac{d^2y}{dt^2} = -g\frac{R^2}{y^2}$ y la **ecuación de Van der Pol:** $y'' - a(1 - y^2)\cdot y' + y = 0$

Utilizando un método similar se resuelven ecuaciones del tipo:

$y'\cdot y'' = 2$

$y'\cdot y'' + (y')^2 = 0$.

Existen también otras muchas ecuaciones a las que no se les puede aplicar los métodos anteriores de reducción de orden, por lo que tiene especial importancia la transformada de Laplace como método para resolver ecuaciones diferenciales. En general permite resolver ecuaciones lineales como la ecuación de los **circuitos eléctricos**: $L\cdot\frac{d^2Q}{dt^2}(t) + R\cdot\frac{dQ}{dt}(t) + \frac{1}{C}\cdot Q(t) = E(t)$ o la equivalente de las **oscilaciones con resortes** $m\cdot y''(t) + b\cdot y'(t) + k\cdot y(t) = g(t)$. Estas ecuaciones que se plantearon en el *capítulo 7* serán resueltas por otros métodos en el siguiente capítulo suponiendo que las funciones $E(t)$ y $g(t)$ son funciones continuas. Cuando esto no ocurre, y estas funciones tienen discontinuidades de salto finito, el procedimiento más adecuado para resolverlas es mediante la transformada de Laplace.

En general, cuando una de las funciones que intervienen en la ecuación diferencial no es continua, pero sí continua a trozos, el primer método que conviene ensayar es el de la transformada de Laplace.

Aplicaciones de este tipo se presentan, por ejemplo, para resolver el problema de una **viga empotrada,** que tiene por ecuación: $E\cdot I\cdot\frac{d^4y}{(dx)^4} = w(x)$, siendo E el módulo de la elasticidad, I el momento de inercia y $w(x)$ una función continua a trozos.

Por otra parte existen ecuaciones cuyas soluciones no se pueden resolver mediante funciones elementales; algunas de ellas tienen mucha importancia en aplicaciones físicas, como son las **ecuaciones de Legendre y Bessel**.

Ecuación de Legendre: $(1 - x^2)\cdot y'' - 2x\cdot y' + p\cdot(p + 1)\cdot y = 0$, con p constante.

Ecuación de Bessel: $x^2\cdot y'' + x\cdot y' + (x^2 - p^2)\cdot y = 0$, siendo $p \geq 0$ constante.

Las soluciones de estas ecuaciones están expresadas en series de potencias y se estudiarán detenidamente en el *capítulo 10*.

También los sistemas de ecuaciones diferenciales aparecen de forma constante en las aplicaciones. En algunos de ellos como en el **sistema de ecuaciones de *Lotka-Volterra*** que ya se planteó en el *capítulo 7* y que tiene por ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \dfrac{dy}{dt} = -cy + dxy \end{cases}$$

un adecuado cambio de variable permite resolverlo con facilidad ya que en ninguna de las ecuaciones aparece la variable dependiente.

Un sistema de ecuaciones diferenciales de orden superior puede transformarse fácilmente en un sistema de primer orden sin más que añadir más variables. Por esta razón, sin pérdida de generalidad, se estudian los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Así, por ejemplo el movimiento de una partícula en el espacio mediante la segunda ley de *Newton*: ***F*** = *m.**a***, se representa mediante el siguiente sistema de tres ecuaciones diferenciales de segundo orden:

$$\begin{cases} m.x''(t) = F_1(t,x,y,z,x',y',z') \\ m.y''(t) = F_2(t,x,y,z,x',y',z') \\ m.z''(t) = F_3(t,x,y,z,x',y',z') \end{cases}$$

Este sistema de la segunda ley de *Newton* se puede escribir como un sistema de seis ecuaciones y seis incógnitas introduciendo las velocidades v_1, v_2, v_3 como tres nuevas variables.

Otro caso particular son los **sistemas lineales**, que se estudiarán más detenidamente en el *capítulo 11*. Un ejemplo es el sistema que determina el movimiento de dos masas m_1 y m_2, sobre las que actúan tres resortes de constantes k_1, k_2, k_3 y dos fuerzas externas $F_1(t)$ y $F_2(t)$ que está expresado por el sistema:

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2 y_1}{dt^2} = -(k_1 + k_2)y_1 + k_2 y_2 + F_1(t) \\ m_2 \dfrac{d^2 y_2}{dt^2} = k_2 y_1 - (k_2 + k_3)y_2 + F_2(t) \end{cases}$$

Cuando los coeficientes del sistema son constantes, como en el ejemplo anterior, existe un procedimiento general para calcular las soluciones. Sin embargo la mayor parte de los sistemas que aparecen en las aplicaciones no son lineales y ha sido necesario desarrollar métodos más sofisticados para resolverlos.

9.1.2. Conceptos previos

Es sencillo saber si una función dada $y(x)$ es **solución**, o no, de una ecuación diferencial, pues basta calcular las derivadas, sustituir en la ecuación diferencial y ver si se obtiene una identidad. Sin embargo resolver una ecuación diferencial de orden superior es todo un desafío pues, en general, no hay métodos generales para llegar a ella. Este capítulo contiene un enfoque elemental considerando métodos por reducción.

Definición 9.1.1:

Una ***ecuación diferencial de orden n*** es la que establece una relación entre una variable independiente x, la función buscada $y(x)$ y las derivadas de esta función hasta el orden n, lo que equivale, con $y = y(x)$, a una expresión de la forma $F(x, y, y', y'', ..., y^{n)}) = 0$.

Cuando es posible despejar $y^{n)}$, se obtiene: $y^{n)}(x) = g(x, y, y', y'', ..., y^{n-1)})$

Definición 9.1.2:

Un ***sistema de k ecuaciones diferenciales de orden n*** se puede expresar mediante una función vectorial **F**, de la forma **F**(x, **f**(x), **f’**(x), **f’’**(x), ..., **f**$^{n)}$(x)) = 0, donde la función buscada **f**(x) = ($f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_K(x)$) y las derivadas de esta función **f’**(x), **f’’**(x), **f’’’**(x), ..., **f**$^{n)}$(x), son funciones vectoriales de la variable independiente.

Definición 9.1.3:

Un ***sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden*** se puede expresar mediante una función vectorial **F**, de la forma **F**(x, **f**(x), **f’**(x)) = 0, donde la función buscada **f**(x) = ($f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$) y su derivada **f’**(x) son funciones vectoriales de la variable independiente.

Cuando es posible despejar **y’** = **f’**(x) el sistema se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= g_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2'(x) &= g_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \qquad (9.1.1) \\ &.............. \\ y_n'(x) &= g_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{aligned}$$

Definición 9.1.4:

La ***solución general*** del sistema de n ecuaciones diferenciales (9.1.1), esta formada por n funciones $\varphi_1(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, $\varphi_2(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, ..., $\varphi_n(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, que dependen de n constantes $C_1, C_2, ..., C_n$ y satisfacen las ecuaciones del sistema para todos los valores de las constantes $C_1, C_2, ..., C_n$.

Suponiendo que existen condiciones iniciales: $y_1(x_0) = b_1$, $y_2(x_0) = b_2$, ..., $y_n(x_0) = b_n$, se pueden elegir las constantes $C_1, C_2, ..., C_n$ para que las funciones $\varphi_k(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, $1 \le k \le n$, satisfagan estas condiciones.

Definición 9.1.5:

Una ***solución particular*** del sistema de n ecuaciones diferenciales (9.1.1) está formada por las n funciones de la solución general para valores concretos de las constantes C_1, C_2, ..., C_n.

9.1.3. Reducción de ecuaciones diferenciales a sistemas de ecuaciones

El procedimiento para expresar una ecuación diferencial de orden n como un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden consiste en añadir más variables que se identifican con las derivadas de la variable dependiente.

Se considera la ecuación $y^{n)}(x) = g(x, y, y', y'', ..., y^{n-1)})$. (9.1.2)

Se realiza un cambio de notación llamando:

$y_1 = y$; $y_2 = y'$; ...; $y_n = y^{n-1)}$, de donde se obtiene $y'_n = y^{n)}$. (9.1.3)

Por lo tanto la ecuación se transforma en el sistema:

$$\left\{\begin{array}{c} y_1'(x) = y_2(x) \\ y_2'(x) = y_3(x) \\ \dots \\ y_n'(x) = g(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{array}\right. \qquad (9.1.4)$$

Si se busca una solución particular de la ecuación diferencial que verifica las condiciones iniciales $y(x_0) = b_1$, $y'(x_0) = b_2$, ..., $y^{n-1)}(x_0) = b_n$, entonces en el sistema se buscan soluciones particulares que verifiquen $y_1(x_0) = b_1$, $y_2(x_0) = b_2$, ..., $y_n(x_0) = b_n$.

Una ecuación diferencial de orden superior se puede considerar, por tanto, un caso especial de sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden.

Recíprocamente si y_1, y_2, ..., y_n son soluciones del sistema (9.1.1) derivando la primera ecuación con respecto a x:

$$y''_1 = \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial y_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial g_1}{\partial y_2} \cdot \frac{dy_2}{dx} + ... + \frac{\partial g_1}{\partial y_n} \cdot \frac{dy_n}{dx}.$$

Sustituyendo las derivadas y'_1, y'_2, ..., y'_n por sus expresiones en el sistema (9.1.1) se obtiene $y_1''(x) = G_2(x, y_1, y_2, ..., y_n)$

Derivando esta expresión con respecto a x y sustituyendo del mismo modo, se halla $y_1'''(x) = G_3(x, y_1, y_2, ..., y_n)$

Repitiendo el proceso hasta la derivada de orden n se calcula:

$y_1^{n)}(x) = G_n(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, de esta forma se obtiene el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1'(x) = G_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_1''(x) = G_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ .... \\ y_1^{n)}(x) = G_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{array} \right. \tag{9.1.5}$$

De las $n - 1$ primeras ecuaciones se calculan $y_2, y_3, ..., y_n$ en función de x, la función y_1 y sus derivadas:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_2(x) = h_2(x, y_1, y_1', ..., y_1^{n-1)}) \\ y_3(x) = h_3(x, y_1, y_1', ..., y_1^{n-1)}) \\ .... \\ y_n(x) = h_n(x, y_1, y_1', ..., y_1^{n-1)}) \end{array} \right. \tag{9.1.6}$$

Introduciendo estas expresiones en la última ecuación de (9.1.5) se obtiene la ecuación diferencial de orden n:

$$y_1^{n)}(x) = H(x, y_1, y_1', y_1'', ..., y_1^{n-1)}). \tag{9.1.7}$$

Resolviendo esta ecuación diferencial se obtiene la solución general $y_1(x) = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ y calculando sus derivadas y sustituyendo en (9.1.6) se determinan $y_2, y_3, ..., y_n$ como funciones de $x, C_1, C_2, ..., C_n$:

$$\begin{cases} y_1(x) = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n) \\ y_2(x) = \varphi_2(x, C_1, C_2, ..., C_n) \\ ...... \\ y_n(x) = \varphi_n(x, C_1, C_2, ..., C_n) \end{cases} \tag{9.1.8}$$

Cuando se buscan soluciones particulares en el sistema que verifican las condiciones iniciales $y_1(x_0) = b_1$, $y_2(x_0) = b_2$, ..., $y_n(x_0) = b_n$, se sustituyen estos valores en (9.1.8) y se calculan los parámetros C_1, C_2, ..., C_n.

La afirmación de que el sistema y la ecuación son equivalentes se entiende en el sentido siguiente: Si $y(x)$ es una solución de la ecuación (9.1.2) entonces las funciones $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ definidas por (9.1.3) satisfacen el sistema (9.1.4). Y a la inversa, si $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ satisfacen el sistema (9.1.1) entonces $y(x) = y_1(x)$ es una solución de la ecuación (9.1.7).

Ejemplos resueltos

Ejemplo 9.1.1: Expresar mediante un sistema de ecuaciones de primer orden la ecuación diferencial: $y'' - x^2 \cdot y' - x \cdot y = 0$

En esta ecuación $y'' = x^2 \cdot y' + x \cdot y$.

Llamando $y_1(x) = y(x)$ e $y_2(x) = y'(x)$, se tiene $y_2'(x) = y''(x)$.

Se tiene el sistema:

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x) \\ y_2'(x) = x^2 \cdot y_2(x) + x \cdot y_1(x). \end{cases}$$

Ejemplo 9.1.2: Expresar mediante una ecuación diferencial el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x) + 1 \\ \end{cases}$$

$y_2'(x) = y_1(x) + 1$

Derivando la primera ecuación con respecto a x: $y_1''(x) = y_2'(x)$, y al sustituirlo en la segunda: $y_1''(x) = y_1(x) + 1$, siendo la ecuación buscada:

$$y_1''(x) - y_1(x) - 1 = 0.$$

Ejemplo 9.1.3: Expresar mediante una ecuación diferencial el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) + z(x) + x \\ z'(x) = y(x) - 2z(x) + 2x \end{cases}$$

Se deriva la primera ecuación respecto a x: $y''(x) = y'(x) + z'(x) + 1$, se sustituye $y'(x)$ y $z'(x)$ por sus expresiones en el sistema:

$y''(x) = (y(x) + z(x) + x) + (y(x) - 2z(x) + 2x) + 1 \Rightarrow$

$y''(x) = 2y(x) - z(x) + 3x + 1.$

Se despeja $z(x)$ en la primera ecuación del sistema: $z(x) = y'(x) - y(x) - x,$ y se sustituye en la última ecuación: $y''(x) = 2y(x) - (y'(x) - y(x) - x) + 3x + 1,$ con lo que se obtiene la ecuación buscada:

$$y''(x) = 3y(x) - y'(x) + 4x + 1.$$

Ejemplo 9.1.4: Dada la ecuación diferencial $y'' + 4y - 4x = 0$, su sistema asociado es: $\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x) \\ y_2'(x) = -4y_1(x) + 4x \end{cases}$. Comprobar que la solución general de dicho sistema es $\begin{cases} y_1(x) = C_1 \cos 2x + C_2 sen 2x + x \\ y_2(x) = -2C_1 sen 2x + 2C_2 \cos 2x + 1 \end{cases}$ y a partir de ella obtener la solución de la ecuación diferencial.

Se comprueba que la solución verifica las dos ecuaciones del sistema:

$y_1'(x) = -2C_1 sen\ 2x + 2C_2 cos\ 2x + 1 \Rightarrow y_1'(x) = y_2(x)$

$y_2'(x) = -4C_1 cos\ 2x - 4C_2 sen\ 2x = -4(C_1 cos\ 2x + C_2 sen\ 2x + x) + 4x \Rightarrow$

$y_2'(x) = -4y_1(x) + 4x$

Por lo tanto ($y_1(x)$, $y_2(x)$) es la solución general del sistema.

Al reducir la ecuación diferencial a un sistema de ecuaciones se ha considerado $y_1(x) = y(x)$, por lo que la función $y(x) = C_1 cos\ 2x + C_2 sen\ 2x + x$ es la solución de la ecuación diferencial.

Ejercicios

9.1. Expresar mediante un sistema de ecuaciones de primer orden la ecuación diferencial: $y''' = y'' - x^2 \cdot (y')^2$.

9.2. Expresar mediante una ecuación diferencial el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) + z(x) + x \\ z'(x) = -4y(x) - 3z(x) + 2x \end{cases}$$

9.2. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LAS SOLUCIONES

La relación establecida entre los sistemas de primer orden y las ecuaciones diferenciales de orden superior permiten relacionar los teoremas de existencia y unicidad de la solución de las ecuaciones y de los sistemas.

Los teoremas de existencia y unicidad se pueden adaptar tanto a los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden, como a las ecuaciones diferenciales lineales de orden *n*, obteniéndose los siguientes resultados, fáciles de aplicar desde un punto de vista práctico

9.2.1. Teoremas de existencia y unicidad para sistemas

Se considera el sistema:

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \quad ... \\ y'_n = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \tag{9.2.1}$$

Si para un valor de la variable independiente x_0 se asignan valores determinados a las funciones incógnitas, se obtienen las condiciones iniciales:

$y_1(x_0) = b_1$, $y_2(x_0) = b_2$, ..., $y_n(x_0) = b_n$. (9.2.2)

Se tiene entonces planteado un problema de valor inicial.

Teorema 9.2.1: ***Teorema de existencia para sistemas de primer orden***

Si las funciones f_1, f_2, ..., f_n son continuas en una región *B* del espacio $\Re\times\Re^n$, y si $(x_0, b_1, ..., b_n)$ pertenece al interior de *B,* entonces existe un entorno de x_0 en el que el sistema (9.2.1) tiene una solución que verifica las condiciones iniciales (9.2.2).

En el *capítulo 8* se han estudiado distintos teoremas que garantizan la unicidad de las soluciones, en los que se imponen condiciones suficientes a las funciones f_k, como ser funciones lipchizianas respecto de las variables y_j. El teorema que se va a enunciar, es un teorema de condiciones suficientes, aunque no necesarias, mucho más sencillas de aplicar en la práctica:

Teorema 9.2.2: ***Teorema de unicidad para sistemas de primer orden***

Si las funciones f_1, f_2, ..., f_n y las derivadas parciales $\frac{\partial f_1}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial f_1}{\partial y_n}, ..., \frac{\partial f_n}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial f_n}{\partial y_n}$, son continuas en una región *B* del espacio $\Re\times\Re^n$, y si $(x_0, b_1, ..., b_n)$ pertenece al interior de *B, e*ntonces existe un entorno de x_0 en el que el sistema (9.2.1) tiene una única solución que verifica las condiciones iniciales (9.2.2).

Las demostraciones de los teoremas de existencia y unicidad de soluciones se han estudiado en el *capítulo 8*. Se recuerda que el *teorema 8.2.1* de *Cauchy-Peano* garantiza la existencia de la solución en un cierto entorno imponiendo la continuidad de la función ***f***. La continuidad de ***f*** no es suficiente para garantizar la unicidad de las soluciones, por lo que se debe imponer alguna condición adicional. El teorema de *Picard-Lindelöf* garantiza la unicidad de la solución añadiendo nuevas condiciones como la lipschitzianidad de ***f*** respecto las variables y_k. Este teorema prueba no sólo la existencia y unicidad de las soluciones de un problema de valor inicial sino también la continuidad de la solución respecto de las condiciones iniciales.

Para demostrar el teorema anterior se utiliza el *corolario* 8.1.4 del *capítulo 8*, que garantiza la existencia y unicidad de las soluciones imponiendo condiciones suficientes (aunque no necesarias) como la continuidad de la función ***f*** y de sus derivadas parciales respecto de las variables y_k.

9.2.2. Teoremas de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales de orden *n*

Los siguientes teoremas para las ecuaciones diferenciales de orden *n* son una consecuencia de los anteriores.

Teorema 9.2.3: ***Teorema de existencia para ecuaciones diferenciales de orden n***

Si en la ecuación diferencial $y^{n)}(x) = f(x, y, y', y'', ..., y^{n-1)})$ la función f es continua en una región B del espacio $\mathfrak{R}\times\mathfrak{R}^n$, y si $(x_0, b_1, ..., b_n)$ pertenece al interior de B, entonces existe un entorno de x_0 en el que se puede garantizar la existencia de una solución $y(x)$ de la ecuación que verifica las condiciones iniciales $y(x_0) = b_1$, $y'(x_0) = b_2$, $y''(x_0) = b_3$, ..., $y^{n-1)}(x_0) = b_n$.

Teorema 9.2.4: ***Teorema de unicidad para ecuaciones diferenciales de orden n***

Si en la ecuación diferencial $y^{n)}(x) = f(x, y, y', y'', ..., y^{n-1)})$ la función f, y las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, ..., \frac{\partial f}{\partial y^{n-1)}}$ son continuas en una región B del espacio $\mathfrak{R}\times\mathfrak{R}^n$, y si $(x_0, b_1, ..., b_n)$ pertenece al interior de B, entonces existe un entorno de x_0 en el que se puede garantizar la existencia de una única solución $y(x)$ de la ecuación que verifica las condiciones iniciales $y(x_0) = b_1$, $y'(x_0) = b_2$, $y''(x_0) = b_3$, ..., $y^{n-1)}(x_0) = b_n$.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 9.2.1: Estudiar los teoremas de existencia y unicidad para un sistema lineal de coeficientes constantes: $\mathbf{y'} = A\mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$, con las condiciones iniciales: $y_1(x_0) = b_1$, $y_2(x_0) = b_2$, ..., $y_n(x_0) = b_n$.

En este caso las funciones f_k son:

$$\begin{cases} f_1(x, y_1, y_2, ...y_n) = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n + b_1(x), \\ f_2(x, y_1, y_2, ... y_n) = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n + b_2(x), \\ ..., \\ f_n(x, y_1, y_2, ... y_n) = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_n + b_n(x). \end{cases}$$

Cuando $b_1(x)$, ..., $b_n(x)$ son funciones continuas en $(a, b) \subset \mathfrak{R}$ entonces $f_k(x)$ son funciones continuas en $B = (a, b) \times \mathfrak{R}^n$.

Las derivadas parciales coinciden con los coeficientes a_{kj}, que al ser funciones constantes son siempre funciones continuas en todo $\mathfrak{R}\times\mathfrak{R}^n$. Al imponer n condiciones iniciales en un punto $x_0 \in (a, b)$, el teorema de unicidad permite garantizar la existencia y unicidad de la solución en el dominio de continuidad de las funciones $b_k(x)$. Si B coincide con $\mathfrak{R}\times\mathfrak{R}^n$ se puede asegurar la existencia y unicidad de solución en todo punto de $\mathfrak{R}\times\mathfrak{R}^n$.

Ejemplo 9.2.2: Estudiar los teoremas de existencia y unicidad para el problema de valor inicial: $y^{n)} = P_1(x)\cdot y^{n-1)} + ... + P_{n-1}(x)\cdot y' + P_n(x)\cdot y + G(x)$, con las condiciones iniciales: $y(x_0) = b_1$, $y'(x_0) = b_2$, $y''(x_0) = b_3$, ..., $y^{n-1)}(x_0) = b_n$.

En este caso $f(x, y, y', y'', ..., y^{n-1)}) = P_1(x)\cdot y^{n-1)} + ... + P_{n-1}(x)\cdot y' + P_n(x)\cdot y + G(x)$. Si $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_n(x)$ y $G(x)$ son funciones continuas en un intervalo abierto (a, b) y x_0 pertenece a ese intervalo, entonces se puede garantizar la existencia de solución en el intervalo (a, b).

Además las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, ..., \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ coinciden con $P_k(x)$ por lo que son continuas en un abierto (a, b) y se puede garantizar la unicidad de la solución al imponer n condiciones iniciales en un punto $x_0 \in (a, b)$. Es decir, si $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_n(x)$ y $G(x)$ son funciones continuas en un intervalo abierto (a, b) y x_0 pertenece a ese intervalo, entonces se puede garantizar la existencia de una única solución en el intervalo (a, b) del problema de valor inicial propuesto.

Ejercicios

9.3. Estudiar los teoremas de existencia y unicidad para la ecuación de Legendre: $(1 - x^2)\cdot y'' - 2x\cdot y' + p\cdot(p + 1) = 0$, siendo p constante.

9.4. Estudiar los teoremas de existencia y unicidad para la ecuación de Bessel: $(x - x_0)^2\cdot y'' - (x - x_0)\cdot y' + (x^2 - p^2)\cdot y = 0$, siendo $p \geq 0$ constante.

9.3. MÉTODOS DE REDUCCIÓN DE ORDEN EN CASOS PARTICULARES

En los capítulos 10 y 11 siguientes se estudia la resolución de las ecuaciones diferenciales lineales de orden *n* y los sistemas lineales. La teoría de ecuaciones diferenciales de orden *n* no lineales es bastante difícil pero existen algunos casos especiales en los cuales es posible simplificar la ecuación general de orden *n* no lineal, como por ejemplo, cuando la variable independiente *x*, o bien la variable dependiente *y*, no aparece explícitamente en la ecuación. En esos casos es siempre posible reducir el orden de la ecuación diferencial.

9.3.1. Ecuaciones en las que falta la función incógnita

El caso más sencillo para reducir el orden de una ecuación diferencial de orden *n* es el de **las ecuaciones que no dependen de la variable dependiente *y***, aunque sí de sus derivadas. Para reducirla a ecuaciones de orden $n - 1$ se define una nueva variable $u(x) = y'(x)$.

Así, si una ecuación diferencial es de la forma $y^{n)} = F(x, y', ..., y^{n-1)})$, el cambio de variable $u(x) = y'(x)$ reduce el orden de la ecuación en una unidad.

Efectivamente si $\frac{dy}{dx} = u$, entonces $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{du}{dx}$ y $\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}$ y la ecuación que resulta, $u^{n-1)} = F(x, u, u', ..., u^{n-2)})$, es de orden $n - 1$.

Análogamente si en la ecuación diferencial falta la función *y* y sus derivadas hasta el orden *k*, realizando el cambio de variable *u*(*x*) = $\frac{d^k y}{dx^k}$ se reduce el orden de la ecuación en *k* unidades.

Como ejemplo clásico de utilización de este método se resuelve la ecuación de la catenaria que se estudió en el *capítulo 7*.

La catenaria

Esta curva tiene la forma que adopta un hilo flexible homogéneo suspendido entre sus dos extremos y que cuelga por su propio peso.

Si *P*(*x*, *y*) es un punto cualquiera de la catenaria, *p* es el peso del hilo, *H* la componente horizontal de la tensión del hilo, *M*(0, *b*) el punto más bajo de la curva y *a* = $\frac{H}{p}$, entonces la ecuación de la catenaria es:

$$y'' = \frac{1}{a}\sqrt{1+(y')^2}$$

Haciendo el cambio de variable *y'*(*x*) = *u*(*x*) se obtiene *u'*(*x*) = $\frac{1}{a}\sqrt{1+u^2}$ que se integra por separación de variables:

$$ln\left| u+\sqrt{1+u^2}\right| = \frac{x}{a} + C.$$

Al aplicar la condición inicial *u*(0) = 0 se obtiene: $ln\left| u+\sqrt{1+u^2}\right| = \frac{x}{a}$, y al despejar la función *u*(*x*) resulta: *u*(*x*) = $\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}})$, que al integrar de nuevo se obtiene: *y*(*x*) = $\frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ + K.

Al imponer la condición de que pase por el punto *M*(0, *b*) se tiene la solución particular:

$$y(x) = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) + b - a = a\, cosh(\frac{x}{a}) + b - a.$$

Si la ordenada del punto M es a la ecuación se simplifica:

$$y(x) = a \cdot cosh(\frac{x}{a}).$$

9.3.2. Ecuaciones en las que falta la variable independiente

También se puede reducir el orden si la ecuación de partida **no depende** de manera explícita **de la variable independiente**, pues localmente y en los puntos en que y' sea distinto de cero, donde se puede aplicar el teorema de la función implícita, se puede utilizar como variable independiente la y, y como nueva variable dependiente $y' = u$, con lo que realizando los cambios, se observa que la derivada de orden k únicamente depende de u y de sus derivadas de orden $k-1$, por lo que se logra reducir el orden como se pretendía.

Ejemplos clásicos en los que se aplica este método son la ecuación del movimiento armónico simple, el cálculo de la velocidad de escape en el movimiento de un cohete y la ecuación de *Van der Pol*.

El movimiento armónico simple

Se considera la ecuación del movimiento armónico simple $y'' + k^2 \cdot y = 0$ con $k > 0$. Se supone que existe una solución $y = \varphi(x)$ que en un intervalo (a, b) tiene función inversa derivable $x = \varphi^{-1}(y)$, por lo tanto $y' = \varphi'(x) = \varphi'(\varphi^{-1}(y))$ por lo que y' puede expresarse como una función de y. Si se escribe $\varphi'(\varphi^{-1}(y)) = u(y)$ se tiene que $y' = u(y)$, entonces $y'' = u'(y) \cdot y' = u'(y) \cdot u(y)$. Al sustituirlo en la ecuación diferencial se tiene que $u'(y) \cdot u(y) = -k^2 \cdot y$, que equivale a decir que

$\frac{1}{2}(u^2(y))' = -k^2y$. Integrando respecto a y se obtiene que $u^2(y) = -k^2 \cdot y^2 + C$. Ya que la constante C es una suma de cuadrados se puede expresar por $C = k^2 \cdot A^2$, siendo A una constante. Al sustituir: $u^2(y) = -k^2 \cdot y^2 + k^2 \cdot A^2 \Rightarrow u(y) = k\sqrt{A^2 - y^2}$.

Sustituyendo y' por $u(y)$ se tiene una ecuación de primer grado con variables separadas. Al integrarla se obtiene como solución $arcsen\frac{y}{A} = Kx + B$, $\Rightarrow y = A \cdot sen(kx + B) = A \cdot sen(kx) \cdot cos\ \mathrm{B} + A cos(kx) \cdot sen\ B$, lo que se puede expresar como:

$y = C_1 \cdot sen(kx) + C_2 \cdot cos(kx)$, con C_1 y C_2 constantes.

Si se imponen las condiciones iniciales: $y_0 = \varphi(x_0)$ e $y_1 = \varphi'(x_0)$, para encontrar una solución particular $y = \varphi(x)$ tal que en un punto x_0 verifique dichas condiciones, siendo y_0, y_1 valores cualesquiera, basta con determinar las constantes C_1 y C_2 que verifican el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y_0 = C_1 \cdot sen(kx_0) + C_2 \cdot cos(kx_0) \\ y_1 = k \cdot C_1 \cdot cos(kx_0) - k \cdot C_2 \cdot sen(kx_0) \end{cases}$$

Como el determinante de la matriz de los coeficientes es $-k \neq 0$, el sistema tiene solución única y por lo tanto existe una única solución de la ecuación diferencial que verifica las condiciones iniciales.

Movimiento de un cohete. Velocidad de escape

Si se dispara un cohete en dirección vertical desde la superficie de la Tierra, la ecuación del movimiento después de quemar el combustible es:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g\frac{R^2}{y^2},$$

siendo $y(t)$ la distancia del cohete al centro de la Tierra.

Como en la ecuación no aparece la variable t, llamando $v(y) = y'$:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy}\cdot\frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dy}\cdot v,$$

sustituyendo en la ecuación se obtiene la ecuación de primer orden:

$$v\cdot\frac{dv}{dy} = -g\frac{R^2}{y^2}.$$

Separando las variables e integrando:

$$\frac{v^2}{2} = g\cdot\frac{R^2}{y} + C.$$

Suponiendo que cuando se acaba el combustible $v = v_0$ e $y \approx R$, se calcula $C = -g\cdot R + \frac{v_0^2}{2}$, al sustituirlo en la ecuación se obtiene:

$$v^2 = 2g\cdot\frac{R^2}{y} - 2g\cdot R + \frac{v_0^2}{2},$$

que indica la velocidad de escape o velocidad mínima necesaria para que un cohete salga de la atracción gravitatoria terrestre.

Ecuación de *Van der Pol*

La ecuación de *Van der Pol* se presenta en el estudio de los circuitos eléctricos. La ecuación diferencial que la define es:

$$y'' - a\cdot(1 - y^2)\cdot y' + y = 0.$$

En la ecuación no aparece la variable t. Se hace el cambio $v(y) = y'$:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dy} \cdot v\,.$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$v \cdot \frac{dv}{dy} - a \cdot (1 - y^2) \cdot v + y = 0.$$

Si se supone que la derivada de *v* respecto de *y* es una constante *k* se obtiene:

$$v = \frac{y}{a(1 - y^2) - k}\,.$$

9.3.3. Reducción de orden en sistemas autónomos

En el *capítulo 12* se estudiarán con más detenimiento los sistemas dinámicos y, entre ellos, los sistemas autónomos.

Definición 9.3.1:

Se dice que un sistema de ecuaciones diferenciales es ***autónomo*** si en sus ecuaciones no aparece de forma explícita la variable independiente.

La idea subyacente al método que permite resolver estos sistemas es similar a la expuesta anteriormente para reducir el orden de una ecuación diferencial en la que no aparece la variable dependiente.

El sistema $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = g(x,y) \end{cases}$, se puede reducir a la ecuación diferencial de primer orden: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{g(x,y)}{f(x,y)}$.

Como ejemplo clásico de utilización de este método, se resuelve el sistema que se planteó en el *capítulo 7* para las ecuaciones de rapaz y presa de *Lotka-Volterra*.

Ecuaciones de rapaz y presa de *Lotka-Volterra*

En el *capítulo 7, apartado 7.2.6* se estudiaron las ecuaciones que *Lotka* y *Volterra* propusieron para modelizar un ecosistema formado por conejos y zorros, con sus interacciones:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \dfrac{dy}{dt} = -cy + dxy \end{cases}$$

donde las constantes *a, b, c* y *d* son positivas.

Este sistema no se puede resolver en términos elementales, pero por el procedimiento anterior se obtiene:

$$\frac{(a - b.y)dy}{y} = \frac{-(c - d.x)dx}{x},$$

que es una ecuación lineal de variables separadas. Al resolverla se tiene:

$$y^a \cdot e^{-by} = kx^{-c} \cdot e^{dx}.$$

La barca en el río

Una barca entra en el río en el punto (*c, 0*) y se dirige hacia el origen con una velocidad *b* con relación al agua. Suponiendo que las rectas *x = 0* y *x = c* son las orillas de un río cuya corriente tiene una velocidad uniforme *a* en la dirección negativa del eje de ordenadas, se pretende determinar la trayectoria de la barca.

Al escribir las componentes de la velocidad de la barca se tiene:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -b\cos\theta \\ \dfrac{dy}{dt} = -a + b\,sen\theta \end{cases}$$

Utilizando el procedimiento anterior para resolver este sistema se tiene que $\frac{dy}{dx} = \frac{-a + b\,sen\theta}{-b\cos\theta} = \frac{a\sqrt{x^2 + y^2} + by}{bx}$, ecuación de primer orden que es homogénea y cuya solución es $c^{\frac{a}{b}}(y + \sqrt{x^2 + y^2}) = x^{\frac{a}{b}+1}$.

El destino de la barca depende de la relación entre *a* y *b*.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 9.3.1: Resolver la ecuación diferencial: $(y''')^2 + x \cdot y''' - y'' = 0$.

En la ecuación no aparecen ni la variable *y* ni su derivada por lo tanto realizando el cambio de variable $u = y''$ se reduce el orden dos unidades:

$(u')^2 + x \cdot u' - u = 0$ que es una ecuación de primer orden de Clairaut.

Con el cambio $u' = t$ se tiene $u = t^2 + x \cdot t$. Diferenciando y simplificando:

$(2t + x) \cdot dt = 0$, luego $t = C$ y $u = C^2 + x \cdot C$, y por lo tanto:

$$y' = C^2 x + C\frac{1}{2}x^2 + K_1.$$

Integrando se tiene la solución:

$$y(x) = \frac{C}{6}x^3 + \frac{C^2}{2}x^2 + K_1 x + K_2.$$

Ejemplo 9.3.2: Integrar la ecuación diferencial: $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$.

La ecuación no contiene a la variable *x,* por lo que se realiza el cambio $u = y'$: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{du}{dy} \cdot u$, sustituyendo en la ecuación:

$$u\frac{du}{dy}. + u^2 = 2e^{-y}.$$

Un nuevo cambio $z = u^2$ la transforma en lineal:

$$\frac{dz}{dy} + 2z = 4e^{-y}.$$

Su solución general es $z = 4e^{-y} + Ce^{-2y}$. Deshaciendo los cambios:

$$(y')^2 = 4e^{-y} + Ce^{-3y} \Rightarrow y' = \pm\sqrt{4e^{-x} + Ce^{-2x}}$$

Separando variables e integrando:

$$x + K = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4e^{x} + C}$$

La solución general de la ecuación es:

$$(x + K)^2 = e^y + \frac{C}{4}.$$

Ejemplo 9.3.3: Resolver la ecuación diferencial del movimiento pendular

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g\cdot sen\ \frac{s}{L},$$

La ecuación no contiene a la variable independiente *t,* por lo que se realiza el cambio $u = \frac{ds}{dt} \Rightarrow \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{du}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{du}{ds}\cdot u$, se sustituye:

$$\frac{du}{ds}\cdot u = -g\cdot sen\ \frac{s}{L}$$

por lo que al separar variables:

$$u\cdot du = -g\cdot sen\ \frac{s}{L}ds,$$

que al integrarla se obtiene:

$$\frac{u^2}{2} = g\cdot L\cdot cos\ \frac{s}{L} + C,$$

por lo tanto:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2gL \cdot cos\frac{s}{L} + C \ .$$

Ejercicios

9.5. Resolver la ecuación diferencial $2 \cdot y'' - (y')^2 + 4 = 0$.

9.6. Integrar la ecuación diferencial $y \cdot y'' - (y')^3 = 0$.

9.7. Determinar las condiciones sobre *a* y *b* para que en la trayectoria de la barca, que se expresaba por $c^{\frac{a}{b}}(y + \sqrt{x^2 + y^2}) = x^{\frac{a}{b}+1}$, permitan que la barca llegue a la otra orilla. ¿Dónde llegará?

9.4. TRANSFORMADA DE LAPLACE

El objetivo de esta sección es estudiar las propiedades y aplicaciones de una de las transformaciones integrales, *la transformada de Laplace*, donde una función dada *f*, que depende de la variable *x*, se transforma en otra función *F*, que depende de otra variable, *s*, por medio de una integral. La idea consiste en transformar un problema para *f* en otro más sencillo para *F*, seleccionado de forma apropiada el núcleo y los límites de integración. A modo de comparación intuitiva se puede poner el ejemplo de cómo los logaritmos transforman unos números en otros en los que las operaciones se simplifican. En nuestro caso lo que se transforman son funciones

La transformada de Laplace va a permitir desarrollar un método de resolución de ecuaciones diferenciales con valores iniciales donde, sin previamente determinar la solución general, directamente se transforma en un problema algebraico que depende de los valores iniciales, del que una vez resuelto mediante manipulaciones algebraicas, se obtiene la solución. Este método es especialmente adecuado cuando alguna de las funciones que intervienen en la ecuación es una función continua a trozos.

9.4.1. Definición, condiciones de existencia y primeras propiedades

Definición 9.4.1:

Una ***transformación integral*** es una relación de la forma:

$$\mathbf{T}\{f\} = \int_a^b K(s,x)\cdot f(x)\cdot dx\,.$$

Cuando esta integral existe es una función $F(s)$ de la variable s. Se dice, entonces que la función $F(s)$ es la ***transformada*** de $f(x)$, y se denomina ***núcleo de la transformación*** a la función $K(s, x)$.

Un tipo particular de transformación integral es la transformada de Laplace de núcleo $K(s, x) = e^{-sx}$, con $a = 0$ y b infinito.

Definición 9.4.2:

Dada una función f definida para $x \geq 0$, se define como su ***transformada de Laplace***, que se denota $\mathbf{L}\{f(x)\}$ a una función $F(s) = \lim_{k\to\infty}\int_0^k e^{-sx}f(x)dx = \int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx$, siempre que la integral sea convergente con $s \in \Re$.

La variable s puede ser compleja, pero para nuestro estudio sólo se necesita considerar valores reales de s, aunque algunas integrales o demostraciones resultan más simples en el campo complejo. Si la integral anterior se interpreta en el campo complejo estaría definida para todos los valores complejos tales que *Re*(*s*) > *c*, y utilizando el teorema de *Morera* es sencillo deducir bajo que condiciones **L**{*f*(*x*)} es analítica en dicha región.

A veces lo que se ha definido como transformada de Laplace se denomina *unilateral*, especialmente cuando es necesario estudiar la transformada de Laplace *bilateral* en cuya definición cambia el límite de integración inferior de la integral, que en vez de 0 es –∞ y por tanto ambas transformadas coinciden para funciones *f*(*x*) definidas en el semieje real positivo.

Definición 9.4.3:

Una función *f*(*x*) es de ***orden exponencial** c* si existen constantes reales *c, M > 0* tales que $|f(x)| \le M \cdot e^{cx}$.

En la siguiente proposición se expresan dos resultados sobre la definición anterior.

Proposición 9.4.1:

a) Si una función *f*(*x*) es de orden exponencial *c* entonces

$$\lim_{x \to \infty} e^{-sx} \cdot f(x) = 0, \forall s > c.$$

b) Toda función acotada es de orden exponencial.

El primer resultado es una consecuencia inmediata de la definición ya que $|e^{-sx} \cdot f(x)| \le M \cdot e^{(c-s)x}$ que tiende a cero cuando *s* > *c*.

El segundo también es evidente ya que una función acotada es de orden exponencial para todo *c* > 0, pues $|f(x)| \le M \le M \cdot e^{cx}$.

Definición 9.4.4:

Una función *f*(*x*) es ***continua a trozos*** en un intervalo [*a*, *b*] si tiene un número finito de discontinuidades de primera especie, es decir, de salto finito.

Teorema 9.4.2:

Si $f(x)$ es una función continua a trozos en el intervalo $[0, a]$, $\forall a > 0$ y $f(x)$ es de orden exponencial c, entonces la transformada de *Laplace de* $f(x)$, $F(s)$, existe para $s > c$.

Demostración:

Si $f(x)$ es de orden exponencial c entonces $|f(x)| \leq M \cdot e^{cx}$ y por tanto

$|e^{-sx} \cdot f(x)| \leq M \cdot e^{-(s-c)x}$.

$$|F(s)| = \left| \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot f(x)dx \right| \leq \int_0^{\infty} \left| e^{-sx} \cdot f(x) \right| dx \leq M \int_0^{\infty} e^{-(s-c)x} dx$$

Si $s - c < 0$ entonces, cuando x tiende a $+\infty$, $-(s - c)x$ tiende a $+\infty$ y la integral impropia es divergente. Pero si $s - c > 0$ entonces, cuando x tiende a $+\infty$, $-(s - c)x$ tiende a $-\infty$, $e^{-(s-c)x}$ tiende a uno y la integral impropia es convergente y vale $\frac{M}{s-c}$.

Por consiguiente, para todo $s > c$ la integral $\int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot f(x)dx$ es absolutamente convergente y por lo tanto convergente, lo que indica que $F(s) = \mathbf{L}\{f(x)\}$ existe para todo $s > c$. □

Corolario 9.4.3:

Si $f(x)$ es continua a trozos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial c, entonces su transformada de *Laplace,* $F(s)$, cuando s tiende a infinito tiende a cero.

Es una consecuencia inmediata de que $|F(s)| \leq \frac{M}{s-c}$.

El *teorema 9.4.2* demuestra que la continuidad a trozos y ser de orden exponencial son condiciones suficientes para que exista la transformada de Laplace de una función. Pero estas condiciones no son necesarias; así por ejemplo la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ no es continua a trozos ya que tiene un salto infinito en $x = 0$ y sin embargo existe su transformada de Laplace:

Transformada de Laplace de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Sea $\mathbf{L}\{f(x)\} = \mathbf{L}\{\frac{1}{\sqrt{x}}\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \cdot x^{-\frac{1}{2}} dx$

Se hace el cambio de variable $s \cdot x = t$:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot \left(\frac{t}{s}\right)^{-\frac{1}{2}} s^{-1} dt = s^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{-\frac{1}{2}} dt .$$

Al realizar el cambio $t = u^2$ se tiene:

$$F(s) = 2 s^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-u^2} \cdot du .$$

Teniendo en cuenta que $\int_0^\infty e^{-u^2} \cdot du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ se obtiene:

$$\mathbf{L}\{\frac{1}{\sqrt{x}}\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}} . \square \qquad (9.4.1)$$

Para garantizar la existencia de la transformada se supone que, salvo precisión aparte, todas las funciones consideradas verifican las condiciones del *teorema 9.4.2*.

Primeras propiedades:

Proposición 9.4.4: ***Linealidad***

La transformada de *Laplace* es un operador lineal:

$$\mathbf{L}\{a \cdot f(x) + b \cdot g(x)\} = a \cdot \mathbf{L}\{f(x)\} + b \cdot \mathbf{L}\{g(x)\}$$

Demostración:

Es una consecuencia inmediata de la linealidad de la integral, pues:

L{$a \cdot f(x) + b \cdot g(x)$} = $\int_0^\infty e^{-sx}(af(x)+bg(x))dx = a\cdot\int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx \ + b\cdot$

$\int_0^\infty e^{-sx} g(x)dx$ = $a\cdot$**L**{$f(x)$} + $b\cdot$**L**{$g(x)$}. □

Proposición 9.4.5: ***Cambio de escala***

Si $F(s)$ es la transformada de Laplace de una función $f(x)$ y $k > 0$ entonces:

$$\mathbf{L}\{f(kx)\} = \frac{1}{k}\cdot F\left(\frac{s}{k}\right).$$

Demostración:

L{$f(kx)$} = $\int_0^\infty e^{-sx} f(kx)dx$,

al hacer el cambio de variable $kx = t$, se obtiene:

L{$f(kx)$} = $\int_0^\infty \frac{1}{k}\cdot e^{-s\frac{t}{k}} f(t)dt \ = \ \frac{1}{k}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{k}t} f(t)dt \ = \ \frac{1}{k}\cdot F\left(\frac{s}{k}\right)$. □

Transformada de Laplace de algunas funciones

1. Transformada de las funciones constantes

Si $f(x) = k$, $k \in \Re$, entonces $\int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx \ = \ \int_0^\infty e^{-sx} k dx \ = \ \frac{k}{s}$. Por lo tanto:

$$\mathbf{L}\{k\} = \frac{k}{s},\ \forall s > 0.$$

2. Transformadas de las funciones trigonométricas *sen x* y *cos x*

Si $f(x) = senx \Rightarrow \int_0^\infty e^{-sx} senx dx \ = \ \left.\frac{e^{-sx}(-s\cdot senx - cos x)}{s^2+1}\right|_0^\infty = \frac{1}{s^2+1}$, $\forall s > 0$

Si $f(x) = cosx \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-sx} \cos xdx = \left.\frac{e^{-sx}(senx - s\cdot cosx)}{s^2+1}\right|_0^{\infty} = \frac{s}{s^2+1}$, $\forall s > 0$

Por lo tanto **L**$\{sen\ x\} = \frac{1}{s^2+1}$ y **L**$\{cos\ x\} = \frac{s}{s^2+1}$ $\forall s > 0$.

Aplicando la *proposición 9.4.5* de cambio de escala se tiene también:

L{*sen kx*} = $\frac{k}{s^2+k^2}$ y **L{*cos kx*} =** $\frac{s}{s^2+k^2}$**,** $\forall s > 0$.

3. Transformada de la función exponencial

Si $f(x) = e^{ax} \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-sx} e^{ax} dx = \left]\frac{e^{-(s-a)x}}{-(s-a)}\right]_a^{\infty} = \frac{1}{s-a}$, $\forall s > a$

Por lo tanto:

$$\mathbf{L}\{e^{ax}\} = \frac{1}{s-a}, \forall s > a.$$

Para una función exponencial de base $b > 0$, se tiene:

L$\{b^{ax}\}$ = **L**$\{(e^{lnb})^{ax}\}$ = **L**$\{e^{(lnb)ax}\} = \frac{1}{s - a\cdot lnb}$, $\forall s > a\cdot lnb$.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 9.4.1: Calcular las transformadas de Laplace de las funciones $f(x) = sen(7x)$ y $g(x) = cos(8x)$.

Al ser **L**$\{sen\ x\} = \frac{1}{s^2+1}$, $\forall s > 0$, al aplicar la *proposición 9.4.5* se tiene:

$$\mathbf{L}\{sen(7x)\} = \frac{1}{7}\frac{1}{\left(\frac{s}{7}\right)^2+1} = \frac{7}{s^2+7^2}, \forall s > 0.$$

Al ser **L**$\{cos\ x\} = \frac{s}{s^2+1}$, $\forall s > 0$, al aplicar la *proposición 9.4.5* se tiene:

$$\mathbf{L}\{cos(8x)\} = \frac{1}{8}\frac{\frac{s}{8}}{\left(\frac{s}{8}\right)^2+1} = \frac{s}{s^2+8^2},\ \forall s > 0.$$

Ejemplo 9.4.2: Hallar la transformada de Laplace de $f(x) = senh\ x$.

$$\mathbf{L}\{senh\ x\} = \mathbf{L}\left\{\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\ (\mathbf{L}\{e^x\} - \mathbf{L}\{e^{-x}\}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}\right) = \frac{1}{s^2-1},\ \forall s > 1.$$

Ejemplo 9.4.3: Calcular la transformada de Laplace de $f(x) = senh(kx)$, $k > 0$.

Por el ejemplo anterior se sabe que $\mathbf{L}\{senhx\} = \frac{1}{s^2-1}$, $\forall s > 1$, por lo que al aplicar la *proposición 9.4.5* se tiene:

$$\mathbf{L}\{senh(kx)\} = \frac{1}{k}\frac{1}{\left(\frac{s}{k}\right)^2-1} = \frac{k}{s^2-k^2},\ \forall s > 1.$$

Ejemplo 9.4.4: Demostrar que $\mathbf{L}\{x^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$, y aplicar este resultado para calcular la transformada de Laplace de $p(x) = x^2 - 2x + 3$.

Se demuestra por inducción sobre n:

La fórmula es cierta para $n = 0$ ya que $\mathbf{L}\{1\} = \frac{1}{s}$.

Supuesta cierta para $n - 1$, es decir $\mathbf{L}\{x^{n-1}\} = \frac{(n-1)!}{s^n}$, se utiliza este resultado para calcular $\mathbf{L}\{x^n\} = \int_0^\infty e^{-sx}x^n dx$.

Se integra por partes y se obtiene:

$$\mathbf{L}\{x^n\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} x^n dx = \left. \frac{-x^n \cdot e^{-sx}}{s} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} n \frac{e^{-sx}}{s} x^{n-1} dx =$$

$$\frac{n}{s} \int_0^{\infty} e^{-sx} x^{n-1} dx = \frac{n}{s} \mathbf{L}\{x^{n-1}\}.$$

Aplicando la hipótesis de inducción, $\mathbf{L}\{x^{n-1}\} = \dfrac{(n-1)!}{s^n}$ se obtiene:

$$\mathbf{L}\{x^n\} = \frac{n}{s} \mathbf{L}\{x^{n-1}\} = \frac{n}{s} \frac{(n-1)!}{s^n} = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Se utiliza este resultado y la linealidad de la transformada:

$$\mathbf{L}\{p(x)\} = \mathbf{L}\{x^2\} - 2\mathbf{L}\{x\} + 3\mathbf{L}\{1\} = \frac{2!}{s^3} - 2\frac{1!}{s^2} + 3\frac{1}{s} = \frac{3s^2 - 2s + 2}{s^3}.$$

Ejercicios

9.8. Demostrar que $\mathbf{L}\{\cosh x\} = \dfrac{s}{s^2 - 1}$, $\forall s > 1$.

9.9. Verificar que $\mathbf{L}\{\cosh(kx)\} = \dfrac{s}{s^2 - k^2}$, $\forall s > 1$.

9.10. Calcular $\mathbf{L}\{\cos^2 x\}$.

9.11. Hallar la función $f(x)$ cuya transformada $F(s)$ sea $\dfrac{1}{s} - \dfrac{s}{s^2 + 4}$.

9.12. Calcular la función $f(x)$ cuya transformada $F(s)$ sea $\dfrac{3}{s^2} - \dfrac{6}{s^2 + 9}$.

9.13. Hallar la función $f(x)$ cuya transformada $F(s)$ sea $\dfrac{3s + 5}{s^2 + 7}$.

9.4.2. La función de Heaviside y la delta de Dirac

Para modelar señales y en general funciones que pueden estar encendidas o apagadas se usa la **función de *Heaviside*** o función salto, o función escalón unidad, ya que al multiplicar una función de *Heaviside* por otra función, ésta queda apagada hasta un valor determinado lo que permite también expresar las funciones definidas a trozos.

Definición 9.4.5:

Se denomina función escalón unidad o ***función de Heaviside*** a la definida por $u_a(x) = \begin{cases} 0 & x<a \\ 1 & x\geq a \end{cases}$.

En ocasiones se denomina a esta función utilizando la letra H en honor al ingeniero Heaviside, $H_a(x) = \begin{cases} 0 & x<a \\ 1 & x\geq a \end{cases}$.

Sea $u(x) = u_0(x)$; esta función en el intervalo $[0, \infty)$ coincide con la función constante 1. A partir de ella, y mediante una traslación, se puede expresar $u_a(x)$, es decir, $u_a(x) = u(x - a)$.

Transformada de Laplace de la función de Heaviside

Si $a > 0 \Rightarrow \int_0^\infty e^{-sx} u_a(x)dx = \int_a^\infty e^{-sx}dx = \left.\frac{e^{-sx}}{-s}\right]_a^\infty = \frac{e^{-sa}}{s}$, $\forall s > 0$.

Si $a \leq 0 \Rightarrow \int_0^\infty e^{-sx} u_a(x)dx = \int_0^\infty e^{-sx} \cdot 1 \cdot dx = \frac{1}{s}$, $\forall s > 0$.

Por lo tanto:

Si $a > 0$ entonces **L{*u*a(*x*)} =** $\frac{e^{-sa}}{s}$**,**

Si $a \leq 0$ entonces **L{*u*a(*x*)} =** $\frac{1}{s}$**,** definidas para todo $s > 0$.

En particular si $a = 0$, entonces **L**$\{u(x)\} = \frac{1}{s}$, definida para todo $s > 0$.

Distribución delta de *Dirac*

La delta de Dirac se utiliza para representar fuerzas externas de gran magnitud aplicadas durante un intervalo de tiempo muy breve, es decir, aplicadas en un instante.

En términos matemáticos se puede definir como el límite de una sucesión de funciones definidas en intervalos que contengan a un determinado punto *a* cuya longitud tiende a cero, de manera que la integral de cada una de ellas vale 1. Este límite no es una función, sino una distribución, (ver el *capítulo de historia de las ecuaciones diferenciales*), ya que la sucesión de funciones en cada punto distinto de *a* tiende a cero mientras que en *a* tiende a infinito, mientras que se impone que la integral valga uno.

De manera formal se puede definir como:

Definición 9.4.6:

La ***delta de Dirac*** es una distribución δ_a, $a \in \mathfrak{R}$ definida por:

1. $\delta_a(x) = 0$, $x \neq a$.

2. $\delta_a(a) = \infty$.

3. $\int_b^c \delta_a(x).dx = \begin{cases} 1 & si\, a \in [b,c] \\ 0 & si\, a \notin [b,c] \end{cases}$

Si se define $\delta(x) = \delta_0(x)$, entonces se observa que: $\delta_a(x) = \delta(x - a)$.

Transformada de Laplace de la delta de Dirac

Para todo $a > 0$ se considera la función $p_h(x) = u_a(x) - u_{a+h}(x)$, $h > a$. Esta función se anula en todos los puntos excepto en el intervalo $[a, a + h)$ que toma el valor 1. Para que en este intervalo tome el valor $\frac{1}{h}$, se considera la función $q_h(x) = \frac{1}{h}(u_a(x) - u_{a+h}(x))$. De esta forma $\int_0^\infty q_h(x)dx = 1$, se tiene que el límite de las funciones $q_h(x)$ cuando h tiende a 0^+ es $\delta_a(x)$.

Se calculan la transformada de Laplace de la función $q_h(x)$:

$$\mathbf{L}\{q_h(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} q_h(x)dx = \frac{1}{h}\cdot\int_a^{a+h} e^{-sx}dx = \frac{-1}{sh}(e^{-s(a+h)} - e^{-sa}).$$

Se calcula el límite cuando h tiende a 0^+:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{e^{-sa}(1-e^{-sh})}{sh} = e^{-sa} \lim_{h\to 0^+} \frac{se^{-sh}}{s} = e^{-sa}.$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{L\{\delta_a(x)\} = e^{-sa}},$$

para todo $s > 0$ y

$$\mathbf{L\{\delta(x)\} = 1.}$$

Ejemplos resueltos

Ejemplo 9.4.5: Calcular las transformadas de Laplace de las funciones $f(x) = \frac{|x-a|}{x-a}$ y $g(x) = \frac{|x+a|}{x+a}$ para $a > 0$.

$$\mathbf{L}\left\{\frac{|x-a|}{x-a}\right\} = \int_0^{\infty} e^{-sx}\frac{|x-a|}{x-a}dx = \int_0^{a} e^{-sx}(-1)dx + \int_a^{\infty} e^{-sx}dx = \left.\frac{e^{-sx}}{s}\right]_0^a + \left.\frac{e^{-sx}}{-s}\right]_a^{\infty} = \frac{e^{-sa}-1}{s} + \frac{e^{-sa}}{s} = \frac{2e^{-sa}-1}{s},\ s > 0.$$

$$\mathbf{L}\left\{\frac{|x+a|}{x+a}\right\} = \int_0^{\infty} e^{-sx}\frac{|x+a|}{x+a}dx = \int_0^{\infty} e^{-sx}dx = \frac{1}{s},\ s > 0.$$

Ejemplo 9.4.6: Calcular la transformada de Laplace de la función $f(x) = E[x]$ (parte entera de x) definida en $[0, \infty)$.

$$\mathbf{L}\{E[x]\} = \int_0^{\infty} e^{-sx}E(x)dx = \int_1^{2} e^{-sx}dx + 2\int_2^{3} e^{-sx}dx + 3\int_3^{4} e^{-sx}dx + \ldots +$$

$$n\int_n^{n+1} e^{-sx}dx + ... = \left.\frac{e^{-sx}}{-s}\right]_1^2 + 2\cdot\left.\frac{e^{-sx}}{-s}\right]_2^3 + 3\cdot\left.\frac{e^{-sx}}{-s}\right]_3^4 + ... + n\cdot\left.\frac{e^{-sx}}{-s}\right]_n^{n+1} + ... =$$

$$= \frac{-1}{s}\,(e^{-2s} - e^{-s} + 2e^{-3s} - 2e^{-2s} + 3e^{-4s} - 3e^{-3s} + ... + e^{-(n+1)s} - e^{-ns} + ...) =$$

$$= \frac{1}{s}(e^{-s} + e^{-2s} + e^{-3s} + ... + e^{-ns} + ...) = \frac{1}{s}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} e^{-ns} = \frac{1}{s}\cdot\frac{e^{-s}}{1-e^{-s}} = \frac{1}{s(e^{s}-1)}.$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{L}\{E[x]\} = \frac{1}{s(e^{s}-1)}.$$

Ejemplo 9.4.7: Expresar mediante la función de Heaviside la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ 0 \le x < 3 \\ 2 & si\ x \ge 3 \end{cases}$$

y calcular su transformada.

La función $f(x)$ se puede expresar por $f(x) = 2u_3(x) = 2u(x - 3)$, por lo tanto: $\mathbf{L}\{f(x)\} = 2\mathbf{L}\{u(x-3)\} = 2\dfrac{e^{-3s}}{s}$.

Ejercicios

9.14. Comprobar que la función de Heaviside se puede expresar por:

$$u_a(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{|x-a|}{x-a} + \dfrac{1}{2} & \text{si } x \neq a \\ 1 & \text{si } x = a \end{cases}.$$

Calcular su transformada utilizando esta expresión.

9.15. Calcular la trasformada de Laplace de la función $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x-2} + \dfrac{|x+2|}{x+2}$.

9.16. Calcular la transformada de Laplace de la función $f(x) = x - E[x]$ definida en $[0, \infty)$.

9.17. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ -1 & 0\leq x<2 \\ -3 & 2\leq x<3 \\ 0 & x\geq 3 \end{cases}$,

Expresar mediante la función de Heaviside, $u(x)$, la función $f(x)$ y calcular su transformada de Laplace.

9.4.3. Teoremas de traslación y transformada de una función periódica

Teoremas de traslación

Teorema 9.4.6: ***Primer teorema de traslación***

Si $F(s)$ es la transformada de Laplace de una función $f(x)$ entonces $F(s - a)$ es la transformada de la función $g(x) = e^{ax}\cdot f(x)$, es decir,

$$\mathbf{L}\{e^{ax}\cdot f(x)\} = F(s - a).$$

Demostración:

Si $F(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\cdot f(x)dx$ entonces $\mathbf{L}\{e^{ax}\cdot f(x)\} = \int_0^\infty e^{-sx}\cdot e^{ax} f(x)dx = \int_0^\infty e^{-(s-a)x}\cdot f(x)dx = F(s - a)$. □

Teorema 9.4.7: ***Segundo teorema de traslación***

La transformada de Laplace de la función $f(x - a)\cdot u_a(x)$ es igual a e^{-sa} por la transformada de Laplace de $f(x)$, es decir,

$$\mathbf{L}\{f(x - a)\cdot u_a(x)\} = e^{-sa}\cdot\mathbf{L}\{f(x)\}.$$

Demostración:

La función $f(x - a)\cdot u_a(x) = \begin{cases} 0 & si\, x<a \\ f(x-a) & si\, x\geq a \end{cases}$, por lo que:

$\mathbf{L}\{f(x - a)\cdot u_a(x)\} = \int_a^{\infty} e^{-sx} \cdot f(x-a)dx$,

haciendo el cambio $x = t + a$:

$= \int_0^{\infty} e^{-s(t+a)} \cdot f(t)dt = e^{-sa}\cdot \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t)dt = e^{-sa}\cdot\mathbf{L}\{f(x)\}$. □

Otra forma de expresar este teorema es:

$$\mathbf{L}\{g(x)\cdot u_a(x)\} = e^{-sa}\cdot\mathbf{L}\{g(x + a)\},$$

ya que $\mathbf{L}\{g(x)\cdot u_a(x)\} = \int_a^{\infty} e^{-sx} \cdot g(x)dx$, haciendo el cambio $x = t + a$:

$\mathbf{L}\{g(x)\cdot u_a(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-s(t+a)}\cdot g(t+a)dt = e^{-sa}\cdot \int_0^{\infty} e^{-st}\cdot g(t+a)dt = e^{-sa}\cdot\mathbf{L}\{g(x + a)\}$. □

Transformada de una función periódica

Proposición 9.4.8:

Sea $f(x)$ una función periódica de periodo T; se supone que $f(x)$ es continua a trozos en $(nT, (n + 1)T)$ y tiene límites finitos en los extremos de este intervalo; entonces:

$$\mathbf{L}\{f(x)\} = \frac{1}{1-e^{-Ts}}\int_0^T e^{-sx}f(x)dx\,.$$

Demostración:

$\mathbf{L}\{f(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-sx}f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{nT}^{(n+1)T} e^{-sx}f(x)dx$.

Para cada $n \geq 0$ se hace el cambio de variable $u = x - nT$ en la integral $\int_{nT}^{(n+1)T} e^{-sx}f(x)dx$. Se tiene:

$$\int_{nT}^{(n+1)T} e^{-sx} f(x)dx = \int_0^T e^{-s(u+nT)} f(u+nT)du = e^{-snT}\int_0^T e^{-su} f(u)du.$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{L}\{f(x)\} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT}\right)\cdot \int_0^T e^{-su} f(u)du.$$

La expresión $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT}$ es una serie geométrica de razón e^{-sT}. Para $s > 0$ se tiene $e^{-Ts} < 1$, por lo tanto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT} = \frac{1}{1-e^{-Ts}},$$

de lo que se deduce que:

$$\mathbf{L}\{f(x)\} = \frac{1}{1-e^{-Ts}}\int_0^T e^{-sx} f(x)dx. \; \square$$

Ejemplos resueltos

Ejemplo 9.4.8: Comprobar que $\mathbf{L}\{e^{ax}\cdot sen(bx)\} = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$ y que $\mathbf{L}\{e^{ax}\cdot cos(bx)\} = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$, $\forall s > 0$.

$\mathbf{L}\{sen(bx)\} = \frac{b}{s^2+b}$, $\forall s > 0$, aplicando el *teorema 9.4.6* se tiene que

$$\mathbf{L}\{e^{ax}\cdot sen(bx)\} = \frac{b}{(s-a)^2+b^2},\ \forall s > 0.$$

Análogamente $\mathbf{L}\{cos(bx)\} = \frac{s}{s^2+b}$, $\forall s > 0$, por el *teorema 9.4.6*:

$$\mathbf{L}\{e^{ax}\cdot cos(bx)\} = \frac{s}{(s-a)^2+b^2},\ \forall s > 0.$$

Ejemplo 9.4.9: Calcular la función $f(x)$ cuya transformada de Laplace es

$F(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+5}$.

La función $F(s)$ se puede expresar por:

$$\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} + \frac{1}{(s+1)^2+2^2} = \frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(s+1)^2+2^2}.$$

Por el primer teorema de traslación:

$$\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} = \mathbf{L}\{e^{-x}\cdot cos(2x)\},\ \frac{2}{(s+1)^2+2^2} = \mathbf{L}\{e^{-x}\cdot sen(2x)\}$$

Al aplicar la linealidad de la transformada de Laplace, se tiene que la función cuya transformada es $F(s)$ es $f(x) = e^{-x}\cdot cos(2x) + \frac{1}{2}e^{-x}\cdot sen(2x)\}$.

Ejemplo 9.4.10: Expresar mediante la función de Heaviside y calcular la transformada de Laplace de la función $f(x) = \begin{cases} 0 & x\in[0,1) \\ 2x-3 & x\in[1,\infty) \end{cases}$.

$f(x) = (2x - 3)\cdot u_1(x) = (2x - 3)\cdot u(x - 1)$.

Se aplica el segundo teorema de traslación:

$\mathbf{L}\{f(x)\} = \mathbf{L}\{(2x - 3)\cdot u(x - 1)\} = \mathbf{L}\{(2(x - 1) - 1)\cdot u(x - 1)\} = e^{-s}\cdot(2\mathbf{L}\{x\} - \mathbf{L}\{1\})$

$= e^{-s}\cdot\left(\frac{2}{s^2} - \frac{1}{s}\right)$.

Ejemplo 9.4.11: Calcular la transformada de Laplace de la función $f(x)$ periódica de periodo $T = 2$ definida en $[0, \infty)$ tal que $f(x) = \begin{cases} x & x\in[0,1) \\ x-2 & x\in[1,2) \end{cases}$.

$$\mathbf{L}\{f(x)\} = \frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2 e^{-sx} f(x)dx = \frac{1}{1-e^{-2s}}\left(\int_0^1 xe^{-sx}dx + \int_1^2 (x-2)e^{-sx}dx\right)$$

Estas dos integrales se calculan por partes:

$$\int_0^1 xe^{-sx}dx = \frac{1-(s+1)e^{-s}}{s^2},$$

$$\int_1^2 (x-2)e^{-sx}dx = \frac{-e^{-2s}-(s-1)e^{-s}}{s^2},$$

y por lo tanto:

$$\mathbf{L}\{f(x)\} = \frac{1}{1-e^{-2s}}\left(\frac{-e^{-2s}-(s+1+s-1)e^{-s}+1}{s^2}\right) = \frac{1-2se^{-s}-e^{-2s}}{s^2(1-e^{-2s})}.$$

Ejercicios

9.18. Calcular la función $f(x)$ cuya transformada de Laplace es $F(s)$ = $\dfrac{2}{s^2+10s+41}$.

9.19. Hallar la función $f(x)$ conociendo que su transformada de Laplace es $F(s)$ = $\dfrac{s-5}{s^2-6s+13}$.

9.20. Hallar la transformada de Laplace de la función $f(x) = senx\cdot u(x-2\pi)$.

9.21. Expresar mediante la función de Heaviside y calcular la transformada de Laplace de la función $f(x) = \begin{cases} -1 & si & 0\le x<2 \\ x-3 & si & 2\le x<3 \\ 0 & si & x\ge 3 \end{cases}$.

9.22. Calcular la transformada de Laplace de la función periódica $f(x) = \dfrac{|senx|}{senx}$.

9.23. Calcular la transformada de Laplace de la función periódica de periodo T = 2, tal que $f(x) = \begin{cases} x & x\in[0,1) \\ 1 & x\in[1,2) \end{cases}$.

9.4.4. Transformadas de derivadas e integrales

La transformada de Laplace tiene una especial importancia para la resolución de ecuaciones diferenciales porque, como se verá a continuación, transforma una ecuación diferencial en una ecuación algebraica, con lo cual se puede calcular fácilmente la transformada de Laplace de la solución de la ecuación diferencial y, utilizando el proceso inverso, obtener la solución buscada.

Para poder usar la transformada para resolver problemas de ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones es necesario, entonces, encontrar la relación entre la transformada de una función y la de su función derivada.

Transformada de una derivada

Proposición 9.4.9:

Si $f(x)$ es derivable hasta el orden n y $f(x)$ y sus derivadas son de orden exponencial entonces:

$$\mathbf{L}\{f^{n)}(x)\} = s^n\cdot\mathbf{L}\{f(x)\} - s^{n-1}\cdot f(0^+) - s^{n-2}\cdot f'(0^+) - \ldots - f^{n-1)}(0^+).$$

Demostración:

Se demuestra por inducción sobre n.

Para $n = 1$:

$$\mathbf{L}\{f'(x)\} = \int_0^\infty e^{-sx} f'(x)dx,$$

integrando por partes:

$$\int_0^\infty e^{-sx} f'(x)dx = e^{-sx}\cdot f(x)\Big]_0^\infty + s\cdot\int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx,$$

por ser $f(x)$ de orden exponencial $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-sx}f(x) = 0$; por lo tanto:

$$\mathbf{L}\{f'(x)\} = s\cdot\mathbf{L}\{f(x)\} - f(0^+),$$

que verifica la hipótesis de inducción.

Se supone cierta para $n - 1$, es decir:

$$\mathbf{L}\{f^{n-1)}(x)\} = s^{n-1}\cdot\mathbf{L}\{f(x)\} - s^{n-2}\cdot f(0^+) - s^{n-3}\cdot f'(0^+) - \ldots - f^{n-2)}(0^+),$$

y se comprueba que se verifica para n:

$$\mathbf{L}\{f^{n)}(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} f^{n)}(x)dx.$$

Al integrar por partes:

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} f^{n)}(x)dx = e^{-sx}\cdot f^{n-1)}(x)\Big]_0^{\infty} + s\cdot\int_0^{\infty} e^{-sx} f^{n-1)}(x)dx$$

aplicando que $f^{n-1)}(x)$ es de orden exponencial $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-sx} f^{(n-1)}(x) = 0$, se tiene:

$$\mathbf{L}\{f^{n)}(x)\} = -f^{n-1)}(0^+) + s\,\mathbf{L}\{f^{n-1)}(x)\}$$

por lo tanto:

$$\mathbf{L}\{f^{n)}(x)\} = s^{n}\cdot\mathbf{L}\{f(x)\} - s^{n-1}\cdot f(0^+) - s^{n-2}\cdot f'(0^+) - \ldots - f^{n-1)}(0^+).\ \square$$

Esta propiedad es muy importante ya que permite asegurar que la transformada de Laplace transforma derivadas en productos, lo que va a hacer posible transformar una ecuación diferencial en una ecuación algebraica, y resolverla a mediante simples operaciones algebraicas.

Además cuando $f(0^+) = f'(0^+) = \ldots = f^{n-1)}(0^+) = 0$ la fórmula se simplifica y se obtiene que $\mathbf{L}\{f^{n)}(x)\} = s^{n}\cdot\mathbf{L}\{f(x)\}$

Si la transformada de una derivada proporciona un producto, cabe esperar que la transformada de una integral, operación inversa de la derivada, proporcione una división.

Transformada de una integral

Proposición 9.4.10:

Si $f(x)$ es continua a trozos y de orden exponencial entonces $\int_0^{x} f(t).dt$ es de orden exponencial y verifica:

$$\mathbf{L}\left\{\int_0^x f(t).dt\right\} = \frac{1}{s}\cdot\mathbf{L}\{f(x)\}.$$

Demostración:

$\int_0^x f(t)dt$ es de orden exponencial ya que al serlo *f*(*t*) se cumple que:

$$\left|\int_0^x f(t)dt\right| \le \int_0^x |f(t)|dt \le M\int_0^x e^{ct}dt \le M' e^{cx}.$$

Para calcular su transformada:

$$\mathbf{L}\left\{\int_0^x f(t).dt\right\} = \int_0^\infty e^{-sx}\left(\int_0^x f(t)dt\right)dx,$$

se integra por partes:

$$\int_0^\infty e^{-sx}\left(\int_0^x f(t)dt\right)dx = \left.-\frac{1}{s}e^{-sx}\int_0^x f(t)dt\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty f(x)\cdot e^{-sx}dx.$$

Al aplicar que $\int_0^x f(t)dt$ es de orden exponencial, por lo que $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-sx}\int_0^x f(t)dt = 0$, se tiene que:

$$\mathbf{L}\left\{\int_0^x f(t).dt\right\} = \frac{1}{s}\ \mathbf{L}\{f(x)\}. \square$$

Si el límite inferior de la integral no es 0 sino *a* > 0, ésta se puede expresar como: $\int_a^x f(t)dt = \int_0^x f(t)dt - \int_0^a f(t)dt$. Como $\int_0^a f(t)dt$ es una constante

k y $\mathbf{L}\{k\} = \frac{k}{s}$, $s > 0$, se tiene que:

$$\mathbf{L}\left\{\int_a^x f(t).dt\right\} = \frac{1}{s}\cdot\mathbf{L}\{f(x)\} - \frac{1}{s}\cdot\int_0^a f(t)dt \text{ .}$$

Proposición 9.4.11:

Si $F(s)$ es la transformada de Laplace de una función $f(x)$ y $F(s)$ es derivable hasta el orden n, entonces:

$$F^{n)}(s) = (-1)^n\cdot\mathbf{L}\{x^n\cdot f(x)\}.$$

Demostración:

Se demuestra por inducción.

Se comprueba primero que $F'(s) = (-1)\cdot\mathbf{L}\{x\cdot f(x)\}$:

$F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$,

derivando con respecto a s:

$F'(s) = \int_0^\infty (-x)\cdot e^{-sx} f(x)dx = (-1)\cdot\int_0^\infty e^{-sx}(x\cdot f(x))dx = F'(s) = (-1)\cdot\mathbf{L}\{x\cdot f(x)\}$:

Supuesto cierto que $F^{n-1)}(s) = (-1)^{n-1}\cdot\mathbf{L}\{x^{n-1}\cdot f(x)\}$, al derivar con respecto a s en $F^{n-1)}(s) = (-1)^{n-1}\cdot\int_0^\infty e^{-sx}(x^{n-1}\cdot f(x))dx$, se obtiene que:

$F^{n)}(s) = (-1)^{n-1}\cdot\int_0^\infty (-x)\cdot e^{-sx}(x^{n-1}\cdot f(x))dx$,

por lo tanto $F^{n)}(s) = (-1)^n\cdot\mathbf{L}\{x^n\cdot f(x)\}$. □

Corolario 9.4.12:

La transformada de Laplace de la función $f(x) = x^n$, $n \in \mathbf{N}$ es la función: $F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$.

$$\mathbf{L}\{x^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Es una consecuencia inmediata de la proposición anterior ya que $\mathbf{L}\{x^n\}$ = $(-1)^n \cdot \frac{d^n}{ds^n}(\mathbf{L}\{1\}) = (-1)^n \cdot \frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s}\right) = (-1)^n \cdot \frac{(-1)^n \cdot n!}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}$. □

Este resultado ya se había demostrado de otra forma en el *ejemplo 9.4.4*.

Proposición 9.4.13:

Si $F(s)$ es la transformada de Laplace de una función $f(x)$ y existe la transformada de $\frac{f(x)}{x}$ entonces:

$$\int_s^\infty F(t)dt = \mathbf{L}\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}.$$

Demostración:

Sea $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ y $G(s) = \mathbf{L}\{g(x)\}$, entonces $f(x) = x \cdot g(x)$, por la proposición 9.4.11 se obtiene: $\frac{d}{ds}(\mathbf{L}\{g(x)\}) = (-1)\cdot\mathbf{L}\{x\cdot g(x)\} = (-1)\cdot\mathbf{L}\{f(x)\}$, es decir, $G'(s) = -F(s)$; integrando esta expresión entre s e ∞:

$$\int_s^\infty G'(t)dt = -\int_s^\infty F(t)dt \Rightarrow G(s) - \lim_{s\to\infty} G(s) = \int_s^\infty F(t)dt.$$

Al ser $G(s)$ la transformada de Laplace de una función por el *corolario 9.4.3* $\lim_{s\to\infty} G(s) = 0$, por lo tanto $G(s) = \int_s^\infty F(t)dt$. □

Proposición 9.4.14:

Si $F(s)$ es la transformada de Laplace de una función $f(x)$, entonces:

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{x}dx = \int_0^\infty F(s)ds,$$

siempre que estas dos integrales sean convergentes.

Demostración:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)dx .$$

Integrando respecto a s se tiene que:

$$\int_0^{\infty} F(s)ds = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)dxds .$$

Cambiando el orden de integración:

$$\int_0^{\infty} F(s)ds = \int_0^{\infty} f(x)\left(\int_0^{\infty} e^{-sx} ds\right)dx .$$

Como $\int_0^{\infty} e^{-sx} ds = \frac{1}{x}$ para x, $s > 0$ se tiene que:

$$\int_0^{\infty} F(s)ds = \int_0^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx . \square$$

Esta fórmula se utiliza para calcular el valor de ciertas integrales que no se pueden resolver por otros métodos.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 9.4.12: Sabiendo que **L**{$e^x \cdot f(x)$} = $\frac{1}{s^2 - 2s + 2}$. Calcular:

a) $\mathbf{L}\left\{\frac{e^{3x} f(x)}{x}\right\}$,

b) **L**{$x \cdot f(x)$}.

a) Si $F(s)$ = **L**{$f(x)$} entonces **L**{$e^x \cdot f(x)$} = $F(s - 1) = \frac{1}{(s-1)^2 + 1}$ por lo tanto

$F(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \Rightarrow$ **L**{$e^{3x} \cdot f(x)$} = $F(s - 3) = \frac{1}{(s-3)^2 + 1}$

por la *proposición 9.4.13*:

$$\mathbf{L}\left\{\frac{e^{3x}f(x)}{x}\right\} = \int_s^{\infty}\frac{1}{(t-3)^2+1}dt = arctg(t-3)\Big]_s^{\infty} = \frac{\pi}{2} - arctg(s-3).$$

b) $\mathbf{L}\{x\cdot f(x)\} = -F'(s)$ por lo tanto: $\mathbf{L}\{x\cdot f(x)\} = -\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{s^2+1}\right) = \dfrac{2s}{(s^2+1)^2}$.

Ejemplo 9.4.13: Utilizar la transformada de Laplace para calcular el valor de la integral $\int_0^{\infty}\frac{senx}{x}dx$.

Ya que $\mathbf{L}\{senx\} = \dfrac{1}{s^2+1}$, utilizando el resultado de la proposición 9.4.14, se tiene que $\int_0^{\infty}\frac{senx}{x}dx = \int_0^{\infty}\frac{ds}{s^2+1} = arctgs\Big]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}$.

Ejercicios

9.24. Sabiendo que $\mathbf{L}\{e^x\cdot f(x)\} = \dfrac{s+1}{s^2-2s+1}$. Calcular a) $\mathbf{L}\left\{\dfrac{f(3x)}{x}\right\}$, b) $\mathbf{L}\{f(3x)\}$.

9.25. Calcular la transformada de Laplace de $f(x) = \dfrac{1}{x}(\cos ax - \cos bx)$.

9.26. Utilizar la transformada de Laplace para demostrar que:

$$\int_0^{\infty}e^{-sx}\frac{1-\cos x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}+\frac{s}{2}ln\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right) - arctg\, s.$$

9.4.5. La convolución

La convolución aparece en numerosos contextos. Una interpretación habitual en la teoría de sistemas lineales es la siguiente: Si $g(x)$ mide el efecto de un sistema lineal independiente del tiempo cuando dicho sistema recibe un impulso en $x = 0$, la convolución mide el efecto de suministrar al sistema un impulso $f(x)$ distribuido a lo largo del tiempo. Es decir, la convolución se presenta en aplicaciones en las que el comportamiento del sistema no sólo depende de su estado en ese instante, sino también de su historia pasada.

Definición 9.4.9:

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones continuas definidas para todo $x \geq 0$ se define convolución de f y g, y se notará $f * g$, a la función definida por:

$$(\boldsymbol{f * g})(\mathbf{x}) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt .$$

La convolución tiene muchas de las propiedades de la multiplicación ordinaria, pero no es cierto que $f * 1$ sea igual a f.

Propiedades de la convolución

1. **Conmutativa:** $f * g = g * f$.

Demostración:

En $(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt$ se hace el cambio de variable $u = x - t$:

$$\int_0^x f(x-t)g(t)dt = \int_x^0 f(u)g(x-u)(-1)du = \int_0^x g(x-u)f(u)du = (g * f)(x),$$ por lo tanto $(f * g)(x) = (g * f)(x)$ para todo $x \geq 0$. □

2. **Asociativa:** $(f * g) * h = f * (g * h)$.

3. **Distributiva:** $f * (g + h) = f * g + f * h$.

Definición 9.4.9:

Se dice que θ es una ***función nula*** si $\int_0^x \theta(t)dt = 0$ para todo $x > 0$.

Es evidente que la función idénticamente 0 es una función nula, pero también son nulas las funciones que sólo tienen un número finito de valores distintos de cero o un número infinito pero numerable. De estas funciones sólo la idénticamente cero es continua.

4. Si $\theta(x) = 0\ \forall x \Rightarrow f * \theta = \theta * f = \theta$

Las demostraciones de que se verifican estas tres últimas propiedades se proponen como ejercicios.

En el siguiente teorema se observa como la convolución, que es una operación integral, se convierte mediante la transformada de Laplace en un producto, que es una operación algebraica.

Teorema 9.4.15: ***Transformada de Laplace y convolución***

El producto de las transformadas de Laplace de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ coincide con la transformada de la convolución de f y g, es decir:

$$\mathbf{L}\{f(x)\}\cdot\mathbf{L}\{g(x)\} = \mathbf{L}\{(f * g)(x)\}.$$

Demostración:

Si $F(s) = \mathbf{L}\{f(x)\}$ y $G(s) = \mathbf{L}\{g(x)\}$ entonces

$$F(s)\cdot G(s) = \left(\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt\right)\cdot\left(\int_0^\infty e^{-su} g(u)du\right) =$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(t+u)} f(t)g(u)dtdu = \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-s(t+u)} f(t)dt\right) g(u)du .$$

Se realiza el cambio de variable $x = t + u$, para un valor fijo de u, se tiene:

$$F(s)\cdot G(s) = \int_0^\infty \left(\int_u^\infty e^{-sx} f(x-u)dx\right) g(u)du =$$

$$\int_0^\infty \int_u^\infty e^{-sx} f(x-u)dxg(u)du .$$

La integración se realiza en la mitad del primer cuadrante xu que verifica $x \geq u$, al invertir el orden de integración $0 \leq u \leq x$, por lo tanto:

$$F(s)\cdot G(s) = \int_0^{\infty}\left(\int_0^{x} e^{-sx} f(x-u)g(u)du\right)dx =$$

$$\int_0^{\infty} e^{-sx}\left(\int_0^{x} f(x-u)g(u)du\right)dx = \mathbf{L}\{(f * g)(x)\},$$

de donde resulta que:

$$F(s)\cdot G(s) = \mathbf{L}\{(f * g)(x)\}. \square$$

El *teorema 9.4.15* permite obtener una función $f(x)$ cuya transformada $F(s)$ se puede expresar como un producto $G(s)\cdot H(s)$ de dos funciones que son transformadas de funciones conocidas, de forma que si $G(s) = \mathbf{L}\{g(x)\}$ y $H(s) = \mathbf{L}\{h(x)\}$, entonces $f(x) = (g * h)(x)$.

Para aplicar la transformada de Laplace en la resolución de ecuaciones diferenciales, sistemas con coeficientes constantes y ecuaciones integrales, es necesario un método que permita calcular la transformada inversa.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 9.4.14: Calcular la convolución de la función $f(x) = \cos x$ con la función $g(x)$ cuya transformada es $G(s) = \dfrac{1}{s-1}$.

Si $G(s) = \dfrac{1}{s-1} \Rightarrow g(x) = e^x$, por lo tanto:

$$(f * g)(x) = \cos x * e^x = \int_0^x \cos(x-t)\cdot e^t dt,$$

al integrar se obtiene:

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x + e^x).$$

Ejemplo 9.4.15: Si $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & si \quad 0 \le x \le a \\ 0 & si \ x > a \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} a & si \quad 0 \le x \le a \\ 0 & si \quad x > a \end{cases}$.

Calcular $\mathbf{L}\{(f * g)(x)\}$.

$$\mathbf{L}\{f(x)\} = \int_0^a \frac{1}{a} e^{-sx} dx = \frac{1 - e^{-as}}{as}$$

$$\mathbf{L}\{g(x)\} = \int_0^a a \cdot e^{-sx} dx = \frac{a(1 - e^{-as})}{s}$$

Por el *teorema 9.4.15*:

$$\mathbf{L}\{(f * g)(x)\} = \mathbf{L}\{f(x)\}\cdot\mathbf{L}\{g(x)\} = \frac{(1 - e^{-as})^2}{s^2}.$$

Ejercicios

9.27. Sean $f(x) = 1$, $g(x) = x$, $h(x) = x^2$ y $j(x) = \cos x$. Calcular:

a) $(f * f)(x)$, b) $(f * g)(x)$, c) $(g * g)(x)$, d) $(f * h)(x)$, e) $(j * j)(x)$.

9.28. Calcular la convolución de la función $f(x)$ cuya transformada es $F(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$ con $g(x) = e^{2x}$.

9.29. Demostrar las propiedades asociativa, distributiva y de la función idénticamente cero de la convolución.

9.4.6. La transformada inversa

Para que la transformada tenga utilidad es necesario que exista algún procedimiento para hallar la inversa de la misma. La transformada inversa es también un operador lineal y puede no ser única, aunque no puede diferir sobre un intervalo de longitud positiva puesto que sólo puede ser diferente en puntos aislados. Ahora bien, la transformada inversa de una función continua sí es única, como se prueba en el teorema siguiente, y éste es el tipo de solución que buscamos en muchas aplicaciones.

Teorema 9.4.16:

Si dos funciones continuas y de orden exponencial, $f(x)$ y $g(x)$, definidas en [0, ∞), tienen la misma transformada de Laplace entonces $f(x) = g(x)$ para todo $x \geq 0$.

Demostración:

Si **L**{$f(x)$} = ***L***{$g(x)$} entonces $\int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx = \int_0^\infty e^{-sx} g(x)dx$, por lo tanto $\int_0^\infty e^{-sx}(f(x) - g(x)) \quad dx = 0$, luego $e^{-sx}(f(x) - g(x))$ es una función nula, como es continua es idénticamente cero, por lo que $e^{-sx} \cdot (f(x) - g(x)) = 0$ para todo $x \geq 0$, entonces $f(x) = g(x)$, $\forall x \geq 0$. □

Este teorema garantiza la unicidad de la transformada para funciones continuas lo que va a permitir resolver problemas que se simplifican mediante esta transformación y obtener la solución a partir de su transformada.

Notación

Por convenio se suele utilizar la misma letra, pero en mayúsculas, para expresar la transformada inversa de una función: Así: **L**{$f(x)$} = $F(s)$; ***L***{$g(x)$} = $G(s)$; **L**{$y(x)$} = $Y(s)$...

Transformadas inversas de funciones racionales

Sea $F(s)$ = **L**{$f(x)$} y $F(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$, siendo $p(s)$ y $q(s)$ polinomios sin raíces comunes y *grado*($q(s)$) > *grado*($p(s)$), ya que por el *corolario 9.4.3* debe verificarse que $\lim_{s \to \infty} F(s) = 0$.

Para calcular $\mathbf{L}^{-1}\{F(s)\}$ se descompone $\frac{p(s)}{q(s)}$ en suma de fracciones simples. Según el tipo de raíces de la ecuación $q(s) = 0$ se pueden considerar los siguientes casos:

Caso 1º: Las raíces de $q(s) = 0$ son reales y simples.

En este caso las fracciones simples son de la forma $\frac{A}{s-a}$ y como $\mathbf{L}\{e^{ax}\} = \frac{1}{s-a}$, s > 0, se tiene que $\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s-a}\right\} = A \cdot e^{ax}$.

Caso 2º: Las raíces de $q(s) = 0$ son reales y múltiples.

Si a es una raíz múltiple la fracción correspondiente en la descomposición es de la forma $\frac{A}{(s-a)^m}$, $m \in \mathbf{N}$, $m > 1$.

Utilizando la expresión $\mathbf{L}\{x^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$ y el *primer teorema de la traslación 9.4.6*: $\mathbf{L}\{e^{ax} \cdot f(x)\} = F(s - a)$, se obtiene que $\mathbf{L}\{e^{ax} \cdot x^n\} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, por lo que $\mathbf{L}\{e^{ax} \cdot x^{n-1}\} = \frac{(n-1)!}{(s-a)^n}$. Se verifica que:

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{A}{(s-a)^m}\right\} = \frac{A}{(n-1)!} \cdot e^{ax} \cdot x^{n-1}.$$

Caso 3º: Las raíces de $q(s) = 0$ son complejas y simples.

Si $a \pm bi$ son raíces complejas conjugadas la fracción correspondiente en la descomposición es de la forma $\frac{Ms+N}{(s-a)^2+b^2}$ que se puede expresar:

$$\frac{Ms+N}{(s-a)^2+b^2} = \frac{M(s-a)+Ma+N}{(s-a)^2+b^2} = M\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2} + \frac{Ma+N}{b} \cdot \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$$

De las igualdades: $\mathbf{L}\{\cos bx\} = \frac{s}{s^2+b^2}$, $\mathbf{L}\{\text{sen } bx\} = \frac{b}{s^2+b^2}$, y del primer teorema de traslación, se deduce que:

$$\mathbf{L}\{e^{ax} \cdot \cos bx\} = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \quad \mathbf{L}\{e^{ax} \cdot \text{sen } bx\} = \frac{b}{(s-a)^2+b^2},$$

se obtiene entonces:

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}\right\} = e^{ax} \cdot \cos bx$$

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{b}{(s-a)^2+b^2}\right\} = e^{ax} \cdot \text{sen } bx$$

por lo tanto

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{Ms+N}{(s-a)^2+b^2}\right\} = M \cdot e^{ax} \cdot \cos bx + \frac{Ma+N}{b} \cdot e^{ax} \cdot \text{sen } bx.$$

Caso 4º: Las raíces de $q(s) = 0$ son complejas y múltiples.

Sin considerar el caso general se calcula la inversa de tres tipos de funciones que aparecen con mucha frecuencia:

$$F(s) = \frac{s}{(s^2+a^2)^2},\ G(s) = \frac{s^2}{(s^2+a^2)^2} \text{ y } H(s) = \frac{1}{(s^2+a^2)^2}.$$

$F(s)$ se puede descomponer en un producto de funciones de transformada conocida:

$$F(s) = \frac{s}{(s^2+a^2)^2} = \frac{1}{a}\cdot\frac{a}{s^2+a^2}\cdot\frac{s}{s^2+a^2}$$

Al ser **L**{*cos ax*} = $\frac{s}{s^2+a^2}$ y **L**{*sen ax*} = $\frac{a}{s^2+a^2}$, y al aplicar el *teorema de la convolución 9.5.15* se obtiene:

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\} = \frac{1}{a}(\cos ax * \operatorname{sen} ax) = \frac{1}{a}\int_0^x \cos a(x-t)\operatorname{sen}(at)dt =$$

$$\frac{1}{2a}\int_0^x (\operatorname{sen}(ax)-\operatorname{sen}(ax-2at))dt.$$

Basta entonces resolver la integral:

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\} = \frac{1}{2a}\boldsymbol{x\cdot \operatorname{sen} ax}.$$

Para calcular la transformada inversa de $G(s) = \frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$ se utiliza el resultado anterior, es decir:

$$\frac{1}{2a}\cdot\mathbf{L}\{x\cdot \operatorname{sen} ax.\} = \frac{s}{(s^2+a^2)^2},$$

al tener en cuenta que **L**{(*x*·*sen ax*)’.} = s·**L**{*x*·*sen ax*.} – 0, se tiene:

$$\frac{1}{2a}\cdot\mathbf{L}\{(x\cdot \operatorname{sen} ax)'.\} = \frac{s^2}{(s^2+a^2)^2},$$

por lo tanto:

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}\right\} = \frac{1}{2a}\boldsymbol{(\operatorname{sen} ax + ax\cdot\cos ax)}.$$

Para calcular la transformada inversa de $H(s) = \frac{1}{(s^2+a^2)^2}$ se vuelve a utilizar el teorema de la convolución descomponiendo la función en un producto de funciones de transformada conocida.

$$H(s) = \frac{1}{(s^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{a}{s^2+a^2}\cdot\frac{a}{s^2+a^2},$$

ya que **L**{*sen ax*} = $\frac{a}{s^2+a^2}$, se tiene que:

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+a^2)^2}\right\} = \frac{1}{a^2}(sen\ ax * sen\ ax) = \frac{1}{a^2}\int_0^x sena(x-t)sen(at)dt =$$

$$\frac{-1}{2a^2}\int_0^x (\cos ax - \cos(ax-2at))dt,$$

resolviendo la integral:

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+a^2)^2}\right\} = \frac{1}{2a^2}\cdot\left(\frac{1}{a}sen\ ax - x\cdot\cos\ ax\right).$$

Ejemplos resueltos

Ejemplo 9.4.16: Calcular la transformada inversa de la función $F(s) = \frac{s}{s^3-s^2+s-1}$.

Se factoriza el denominador: $s^3 - s^2 + s - 1 = (s-1)\cdot(s^2+1)$; por lo tanto:

$$\frac{s}{s^3-s^2+s-1} = \frac{1}{s-1}\cdot\frac{s}{s^2+1},$$

se utiliza que:

L{e^x} = $\frac{1}{s-1}$ y **L**{*cos x*} = $\frac{s}{s^2+1}$, se tiene que:

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^3-s^2+s-1}\right\} = \cos x * e^x = \int_0^x \cos(x-t)\cdot e^t dt,$$

al integrar se obtiene:

$$\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^3-s^2+s-1}\right\} = \frac{1}{2}(sen\ x - \cos x + e^x).$$

Ejemplo 9.4.17: Calcular $\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^4+s^2}\right\}$ utilizando el producto de convolución.

$$\mathbf{L}\{(f * g)(x)\} = \mathbf{L}\{f(x)\}\cdot\mathbf{L}\{g(x)\} = \frac{s+1}{s^4+s^2} = \frac{s+1}{s^2}\cdot\frac{1}{s^2+1},$$

$$\mathbf{L}\{f(x)\} = \frac{s+1}{s^2} = \frac{1}{s}+\frac{1}{s^2} \Rightarrow f(x) = 1 + x,$$

$$\mathbf{L}\{g(x)\} = \frac{1}{s^2+1} \Rightarrow g(x) = sen\ x.$$

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^4+s^2}\right\} = (f * g)(x) = \int_0^x (1+x-t)\cdot sen\,t\,dt.$$

Integrando por partes se obtiene:

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^4+s^2}\right\} = 1 + x - cos\ x - sen\ x.$$

Ejemplo 9.4.18: Sea $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & si \quad 0 \le x \le a \\ 0 & si x > a \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} a & si \quad 0 \le x \le a \\ 0 & si \quad x > a \end{cases}$.

Calcular $(f * g)(x)$.

En el *ejemplo 9.4.15* se había calculado $\mathbf{L}\{(f * g)(x)\} = \dfrac{(1-e^{-as})^2}{s^2}$, por lo tanto es suficiente calcular la transformada inversa de esta función.

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{(1-e^{-as})^2}{s^2}\right\} = \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - 2\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s^2}\right\} + \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2as}}{s^2}\right\},$$

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = x;$$

Por el *teorema 9.4.7* se tiene:

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s^2}\right\} = (x - a)\cdot u(x - a),$$

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2as}}{s^2}\right\} = 4\cdot\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2as}}{(2s)^2}\right\} = 2(2\cdot\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2as}}{(2s)^2}\right\}).$$

Aplicando ahora el *teorema de traslación 9.4.7* y la *proposición 9.4.5* para $k = \frac{1}{2}$,

$$\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2as}}{s^2}\right\} = 2\left(\frac{x}{2}-a\right)\cdot u(x-2a) = (x-2a)\cdot u(x-2a).$$

Por lo tanto:

$$(f * g)(x) = x - 2(x - a)\cdot u(x - a) + (x - 2a)\cdot u(x - 2a),\ \forall x > 0$$

Ejercicios

9.30. Calcular $\mathbf{L}^{-1}\left\{ln\left(\frac{2s-1}{2s+1}\right)^2\right\}$.

9.31. Sabiendo que $\mathbf{L}\{f(x)\} = \frac{1}{s^2}$ y $\mathbf{L}\{g(x)\} = \frac{e^{-sx}}{s^2+1}$. Calcular $(f * g)(x)$ de dos formas distintas:

a) Calculando $f(x)$ y $g(x)$ y aplicando la definición de convolución.

b) Descomponiendo en fracciones simples el producto $\mathbf{L}\{f(x)\}\cdot\mathbf{L}\{g(x)\}$ y calculando la transformada inversa de cada sumando de la descomposición.

9.4.7. Aplicaciones

1. Resolución de ecuaciones diferenciales lineales

Las características esenciales del método para resolver ecuaciones diferenciales lineales mediante la transformada de Laplace son las siguientes:

Paso 1: Aplicar la transformada de Laplace a los dos miembros de la ecuación diferencial.

Paso 2: Resolver el problema algebraico despejando la transformada de la función solución de la ecuación

Paso 3: Calcular la transformada inversa de la función obtenida.

Este procedimiento es especialmente útil en ecuaciones lineales completas, no homogéneas, cuando la función $b(x)$, que determina que la ecuación sea no homogénea, es una función continua a trozos, que se puede expresar mediante la función de *Heaviside*, o es la distribución delta de Dirac.

Así, si se aplica la transformada de Laplace a una ecuación lineal con coeficientes constantes de segundo orden:

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = b(x)$$

se obtiene:

$$\mathbf{L}\{y''(x) + py'(x) + qy(x)\} = \mathbf{L}\{b(x)\} \Rightarrow \mathbf{L}\{y''(x)\} + p\mathbf{L}\{y'(x)\} + q\mathbf{L}\{y(x)\} = \mathbf{L}\{b(x)\}$$

Las transformadas de las derivadas de $y(x)$ se pueden expresar en función de $Y(s) = \mathbf{L}\{y(x)\}$. Llamando $B(s)$ a $\mathbf{L}\{b(x)\}$ se tiene:

$$s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0) + p(s \cdot Y(s) - y(0)) + qY(s) = B(s)$$

Se despeja $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{B(s) + (p+s)y(0) + y'(0)}{s^2 + ps + q}.$$

Al aplicar la transformada inversa se obtiene:

$$y(x) = \mathbf{L}^{-1}\{Y(s)\}.$$

Para poder aplicar este método es necesario que $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ y $b(x)$ tengan transformada de Laplace, lo que se verifica siempre que exista la transformada de $b(x)$ y para esto es suficiente que $b(x)$ sea una función continua, o continua a trozos, y de orden exponencial.

También se puede aplicar la transformada de *Laplace* a ecuaciones que no tienen coeficientes constantes siempre que exista la transformada de las funciones que intervienen en la ecuación.

Con este método se obtiene una representación integral de las soluciones de la ecuación de *Airy*: $y'' = x \cdot y$. Para resolver este problema es conveniente hacer previamente el cambio de variable de x por $-x$ para evitar crecimientos más rápidos que el exponencial. La transformada de Laplace proporciona una representación integral de las funciones de *Airy* en el eje real negativo que es válida en todo el campo complejo mediante prolongación analítica.

2. Resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales

La transformada de Laplace también se utiliza para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes. El procedimiento es similar al que se ha expuesto para resolver ecuaciones diferenciales.

Paso 1: Aplicar la transformada de Laplace a las ecuaciones del sistema.

Paso 2: Resolver el sistema de ecuaciones algebraico para despejar las transformadas de las soluciones del sistema.

Paso 3: Calcular las transformadas inversas de las funciones obtenidas.

También en este caso cuando se conocen las condiciones iniciales no es necesario obtener primero la solución general y a partir de ella la solución particular que verifica dichas condiciones, ya que se incorporan de forma automática en las soluciones.

Este método se puede aplicar no sólo a los sistemas lineales de primer orden sino también a los de orden superior.

3. Resolución de ecuaciones integrales

Las buenas propiedades de la transformada de *Laplace* al actuar sobre la convolución permiten también resolver ecuaciones integrales.

El método es similar al estudiado para ecuaciones y sistemas lineales. Así, por ejemplo, para resolver la ecuación integral:

$$a \cdot y(x) + \int_0^x g(x-t) \cdot y(t) \cdot dt = f(x)$$

se sigue el siguiente procedimiento:

Paso 1º: Aplicar la transformada a la ecuación:

$$a\mathbf{L}\{y(x)\} + \mathbf{L}\{g(x)\}\cdot\mathbf{L}\{y(x)\} = \mathbf{L}\{f(x)\}.$$

Paso 2º: Despejar la transformada de la función incógnita:

$$\mathbf{L}\{y(x)\} = \frac{\mathbf{L}\{f(x)\}}{a + \mathbf{L}\{g(x)\}},$$

Paso 3º: Calcular la transformada inversa.

Esta técnica se utiliza para obtener la expresión la curva tautócrona, que es un caso particular del problema mecánico de Abel, y consiste en determinar la ecuación de la curva que adopta un hilo por el que se desliza sin fricción, hacia abajo, por la acción de su peso, una bola de masa *m,* a partir de una función dada que expresa el tiempo de bajada. En nuestro caso para calcular la ecuación de la curva tautócrona se supone que esta función es constante.

4. La curva tautócrona

Dado un hilo en forma de curva suave y un bola de masa *m* que parte del reposo y se desliza sin rozamiento hacia el origen de coordenadas bajo la acción de su propio peso, se trata de encontrar la ecuación de la curva para la que el tiempo de descenso, cualquiera que sea el punto de la curva en el que se coloca la bola, sea constante.

Sea $P(x, y)$ el punto de partida y $Q(z, u)$ cualquier punto intermedio. Si la forma del hilo viene dada por la función $y = y(x)$, el tiempo total de descenso $t(y)$ será una función que depende de la altura inicial y que se considera constante $t(y) = t_0$.

Para pasar de P a Q aplicando el principio de conservación de la energía se tiene que: $\frac{1}{2}m\cdot v^2 = m\cdot g\cdot(y - u)$. La velocidad es $v = \frac{ds}{dt}$, por lo tanto $\frac{ds}{dt} = -\sqrt{2g(y-u)} \Rightarrow dt = -\frac{ds}{\sqrt{2g(y-u)}}$. Aplicando que $ds = s'(u)\cdot du$ e integrando se obtiene:

$$t(y) = \int_0^y \frac{s'(u)du}{\sqrt{2g(y-u)}} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^y \frac{s'(u)du}{\sqrt{y-u}}.$$

Aplicando la transformada de Laplace a esta ecuación:

$$\mathbf{L}\{t(y)\} = \frac{1}{\sqrt{2g}}\mathbf{L}\left(\int_0^y \frac{s'(u)du}{\sqrt{y-u}}\right) \qquad (9.4.2)$$

La integral $\int_0^y \frac{s'(u)du}{\sqrt{y-u}}$ es la convolución de las funciones $s'(y)$ y $g(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$, utilizando (9.4.1) y el teorema de la convolución:

$$\mathbf{L}\{(s' * g)(y)\} = \mathbf{L}\{s'(y)\}\cdot\mathbf{L}\{g(y)\} = \mathbf{L}\{s'(x)\}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{s}}.$$

Se sustituye este resultado en (9.4.2) y se obtiene:

$$\mathbf{L}\{s'(y)\} = \sqrt{\frac{2gs}{\pi}}\,\mathbf{L}\{t(y)\} \qquad (9.4.3)$$

La función $t(y)$ es constante, $t(y) = t_0$, por lo que $\mathbf{L}\{t(y)\} = \frac{t_0}{s}$, por lo que:

$$\mathbf{L}\{s'(y)\} = \sqrt{\frac{2gs}{\pi}} \cdot \frac{t_0}{s} = \sqrt{2g} \cdot \frac{t_0}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{s}} = k\sqrt{\frac{\pi}{s}}, \text{ siendo } k = \sqrt{2g} \cdot \frac{t_0}{\pi}.$$

Se calcula la transformada inversa: $s'(y) = k\cdot\sqrt{\frac{1}{y}}$.

Como $s'(y) = \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \Rightarrow \frac{k^2}{y} = 1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{k^2-y}{y}} \Rightarrow x = \int\sqrt{\frac{k^2-y}{y}}dy$.

Se hace ahora el cambio de variable $y = k^2\cdot sen^2\,\alpha$:

$$x = 2k^2\int cos^2\,\alpha\cdot d\alpha = \frac{k^2}{2}(2\alpha + sen\ 2\alpha) + C,$$

se expresa y en función de 2α: $y = \frac{k^2}{2}\cdot(1 - \cos 2\alpha)$.

Se impone la condición de que la curva pase por el origen (0, 0) por lo que se obtiene que $C = 0$.

Llamando $r = \frac{k^2}{2}$ y $\theta = 2\alpha$ se tiene:

$$\begin{cases} x = r\cdot(\theta + sen\theta) \\ y = r\cdot(1 - cos\theta), \end{cases}$$

que son las ecuaciones paramétricas de la cicloide, la curva que describe un punto de una circunferencia de radio r que rueda bajo la recta $y = 2r$.

El radio está determinado por la constante t_0 ya que $r = \frac{k^2}{2} = g\cdot\frac{t_0^2}{\pi^2}$. Por tanto, si una cicloide está generada por una circunferencia de radio r entonces el tiempo constante de descenso es: $t_0 = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}$.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 9.4.19: Resolver la ecuación $y'' - y' - 2y = 0$, con $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$, utilizando la transformada de Laplace.

Paso 1: Calcular la transformada de Laplace de la ecuación $y'' - y' - 2y = 0$:

$[s^2 \cdot \mathbf{L}\{y\} - s \cdot y(0) - y'(0)] - [s \cdot \mathbf{L}\{y\} - y(0)] - 2\mathbf{L}\{y\} = 0.$

Se sustituyen los valores iniciales $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$, se obtiene:

$$(s^2 - s - s) \cdot \mathbf{L}\{y\} - s + 1 = 0.$$

Paso 2: Despejar $Y(s) = \mathbf{L}\{y(x)\}$:

$$Y(s) = \mathbf{L}\{y(x)\} = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)} = \frac{1/3}{s-2} + \frac{2/3}{s+1}.$$

Paso 3: Aplicar la transformada inversa $\mathbf{L}^{-1}$, para calcular la función $y(x)$ a partir de $\mathbf{L}\{y(x)\}$:

Al observar que $\mathbf{L}\{e^{ax}\} = \dfrac{1}{s-a}$ se deduce que la solución buscada es:

$$y(x) = \left(\frac{1}{3}\right)e^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)e^{-x}.$$

Ejemplo 9.4.20: Resolver la ecuación diferencial $y'' + 3y' + 2y = r(x)$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$, con $r(x) = 1$ en $0 < x < 1$, y cero en el resto.

Se resuelve aplicando la transformada de Laplace:

Paso 1: Calcular la transformada de Laplace de la ecuación:

Como $r(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases} = 1 - u(x-1) \Rightarrow \mathbf{L}\{r(x)\} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{e^{-s}}{s}$, por lo que:

$s^2 \cdot \mathbf{L}\{y(x)] + 3s \cdot \mathbf{L}\{y(x)\} + 2\mathbf{L}\{y(x)\} = \dfrac{1-e^{-s}}{s} \Rightarrow$

$s^2 \cdot Y(s) + 3s \cdot Y(s) + 2Y(s) = (s^2 + 3s + 2) \cdot Y(s) = \dfrac{1-e^{-s}}{s}.$

Paso 2: Despejar $Y(s)$ = **L**{$y(x)$}:

$$Y(s) = \mathbf{L}\{y(x)\} = \frac{1-e^{-s}}{s(s+1)(s+2)} = (1-e^{-s})\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2}\right).$$

Paso 3: Calcular la función $y(x)$ a partir de **L**{$y(x)$}:

Si **L**{$g(x)$} = $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2}$ entonces $g(x)$ = $\frac{1}{2}-e^{-x}+\frac{1}{2}e^{-2x}$.

Por el *teorema 9.4.7*, $y(x) = g(x) - g(x-1)\cdot u(x-1)$, por lo que:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}-e^{-x}+\frac{1}{2}e^{-2x} & 0 \le x < 1 \\ (e-1)e^{-x}-\frac{e^2-1}{2}e^{-2x} & x \ge 1 \end{cases}.$$

Ejemplo 9.4.21: Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left.\begin{array}{r} 2y_1'(x)+y_2'(x)-y_2(x)=x \\ y_1'(x)+y_2'(x)=x^2 \end{array}\right\}$$ con $y_1(0) = 1$ e $y_2(0) = 0$.

Paso 1: Aplicar al sistema la transformada de Laplace:

$$\left.\begin{array}{r} 2L\{y_1'(x)\}+L\{y_2'(x)\}-L\{y_2(x)\}=L\{x\} \\ L\{y_1'(x)\}+L\{y_2'(x)\}=L\{x^2\} \end{array}\right\}$$

Si **L**{$y_1(x)$} = $Y_1(s)$ y **L**{$y_2(x)$} = $Y_2(s)$ se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} 2(s\cdot Y_1(s)-1)+s\cdot Y_2(s)-0-Y_2(s)=\frac{1}{s^2} \\ s\cdot Y_1(s)-1+s\cdot Y_2(s)-0=\frac{2}{s^3} \end{cases}$$

Paso 2: Despejar $Y_1(s)$ e $Y_2(s)$:

Se resuelve este sistema:

$$s\cdot Y_1(s) = 1 - s\cdot Y_2(s) + \frac{2}{s^3}.$$

Al sustituir en la primera ecuación y despejar $Y_2(s)$ se obtiene:

$$Y_2(s) = \frac{4-s}{s^3(s+1)},$$

que se descompone en fracciones simples:

$$Y_2(s) = \frac{-5}{s+1} + \frac{5}{s} - \frac{5}{s^2} + \frac{4}{s^3},$$

Se despeja Y_1:

$$Y_1(s) = \frac{1}{s} - Y_2(s) + \frac{2}{s^4},$$

Paso 3: Aplicar la transformada inversa $\mathbf{L}^{-1}$, para obtener la solución pedida:

$$\begin{cases} y_1(x) = 5e^{-x} - 4 + 5x - 2x^2 + \dfrac{x^3}{3} \\ y_2(x) = -5e^{-x} + 5 - 5x + 2x^2. \end{cases}$$

Ejemplo 9.4.22: Calcular la solución particular de la ecuación diferencial $x \cdot y'' + 2y' + x \cdot y = sen\ x$, que verifica $y(0) = 0$.

Paso 1: Aplicar la transformada a la ecuación diferencial:

$$\mathbf{L}\{x \cdot y''] + \mathbf{L}\{2y'\} + \mathbf{L}\{x \cdot y] = \mathbf{L}\{sen\ x\}.$$

Si $\mathbf{L}\{y(x)\} = Y(s)$ entonces $\mathbf{L}\{y'(x)\} = s \cdot Y(s) - y(0) = s \cdot Y(s)$,

$\mathbf{L}\{y''(x)\} = s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0) = s^2 \cdot Y(s) - y'(0)$,

$$\mathbf{L}\{x \cdot y''(x)\} = -\frac{d}{ds}(s^2 \cdot Y(s) - y'(0)) = -(2s \cdot Y(s) + s^2 \cdot Y'(s))$$

$$\mathbf{L}\{x \cdot y(x)\} = -Y'(s) \text{ y } \mathbf{L}\{sen\ x\} = \frac{1}{s^2+1},$$

sustituyendo en la ecuación:

$$-(2s \cdot Y(s) + s^2 \cdot Y'(s)) + 2s \cdot Y(s) + (-Y'(s)) = \frac{1}{s^2+1}$$

$Y'(s)(-s^2 - 1) = \dfrac{1}{s^2+1}$,

por tanto:

$Y'(s) = \dfrac{-1}{(s^2+1)^2} \Rightarrow Y(s) = \mathbf{L}\{x \cdot y(x)\} = \dfrac{1}{(s^2+1)^2}$.

Paso 3: Aplicar la transformada inversa:

$x \cdot y(x) = \mathbf{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2+1)^2}\right\} = \dfrac{1}{2}(sen\ x - x \cdot cos\ x)$

La solución particular buscada es:

$$y(x) = \frac{1}{2x}(sen\ x - x \cdot cos\ x).$$

Ejemplo 9.4.23: Calcular la función $g(x)$ que verifica la siguiente ecuación integral: $g(x) = 3senx + 2\int_0^x cos(x-t)g(t)dt$.

Paso 1: Calcular la transformada de la ecuación:

$$\mathbf{L}\{g(x)\} = \mathbf{L}\{3senx\} + 2\mathbf{L}\{\int_0^x cos(x-t)g(t)dt\}.$$

Por la definición de convolución $\int_0^x cos(x-t)g(t)dt = cos\ x * g(x)$.

Por el *teorema 9.4.15*, $\mathbf{L}\{\int_0^x cos(x-t)g(t)dt\} = \mathbf{L}\{cos\ x\} \cdot \mathbf{L}\{g(x)\}$.

Paso 2: Despejar $G(s) = \mathbf{L}\{g(x)\}$.

Sustituyendo este resultado $\mathbf{L}\{g(x)\} = 3\mathbf{L}\{sen\ x\} + 2(\mathbf{L}\{cos\ x\} \cdot \mathbf{L}\{g(x)\})$.

Calculando transformadas:

$G(s) = \dfrac{3}{s^2+1} + 2\left(\dfrac{s}{s^2+1} \cdot G(s)\right) \Rightarrow (s^2 + 1)\ G(s) = 3 + 2s \cdot G(s) \Rightarrow$

$$G(s) = \frac{3}{(s-1)^2}.$$

Paso 3: Aplicar $\mathbf{L}^{-1}$.

$$g(x) = \mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s-1)^2}\right\} = 3\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\}.$$

Aplicando el primer teorema de traslación se obtiene la solución buscada:

$$g(x) = 3x\cdot e^x.$$

Ejercicios

9.32. Resolver la ecuación $x\cdot y'' + (3x - 1)\, y' - (4x + 9)\cdot y = 0$, con $y(0) = y'(0) = 0$.

9.33. Resolver la ecuación $x\cdot y' - 4y - x\cdot y = -6x\cdot e^x$ con $y(0) = y'(0) = 0$.

9.34. Resolver el sistema $\begin{cases} y_1''(x) + y_1(x) - y_2(x) = 0 \\ y_2''(x) + y_2(x) - y_1(x) = 0 \end{cases}$ con las condiciones iniciales $y_1(0) = y_2(0) = 0$, $y'_1(0) = -2$ e $y'_2(0) = 1$.

9.35. Resolver la ecuación $y' + y = f(x)$, con $y(0) = 0$ utilizando la transformada de Laplace sabiendo que $f(x) = 2x$ si $0 \le x \le 1$, $f(x) = 0$ si $x > 1$.

9.36. Resolver la ecuación $y'' + 16y = f(x)$, con $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, utilizando la transformada de Laplace sabiendo que $f(x) = cos(4x)$ si $0 \le x \le \pi$, $f(x) = 0$ si $x > \pi$.

9.37. Calcular la convolución de la función $f(x)$ con $g(x) = cos\ x$, sabiendo que $f(x)$ verifica la ecuación integral $f(x) = sen\ x\cdot u(x - \pi) - 2\int_0^x cos(x-t) f(t)\, dt$.

9.5. EJERCICIOS

9.38. Integrar la ecuación diferencial $y'' = (y')^3 + y'$.

(*Solución*: $y = arcsen(C_1 e^x) + C_2$)

9.39. Resolver la ecuación diferencial $y\cdot y'' = 2(y')^2 - 2y'$.

(*Solución*: $y = C$, $y = \dfrac{1}{C_2} tg(C_2\cdot x + C_1)$)

9.40. Calcular la solución general de la ecuación diferencial $y\cdot y'' + (y')^2 = y^2$.

(*Solución*: $y^2 = C_1 senh(\sqrt{2}x + C_2)$)

9.41. Integrar la ecuación diferencial $y \cdot y'' + (y')^2 = 2$.

(*Solución*: $y^2 = 2x^2 + C_1 x + C_2$)

9.42. Sabiendo que $\mathbf{L}\{e^x \cdot f(x)\} = ln\left(\frac{s+1}{s-1}\right)$, calcular $\mathbf{L}\{x \cdot f(2x)\}$ y $f(2x)$.

(*Solución*: $\mathbf{L}\{x \cdot f(2x)\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+4}\right)$ y $f(2x) = \frac{1}{2x}(1 - e^{-4x})$)

9.43. Demostrar que $\mathbf{L}\left\{\frac{sen^2 x}{x}\right\} = \frac{1}{4} ln\left(\frac{s^2+4}{s^2}\right)$.

9.44. Calcular la transformada de Laplace de la función $f(x)$ definida por:

$f(x) = u(x-1) \cdot e^{-2x+2} \cdot sen\, 3(x-3)$.

(*Solución:* $\mathbf{L}\{f(x)\} = \frac{3e^{-s}}{(s+2)^2+9}$)

9.45. Hallar $\mathbf{L}\{e^{-x} \cdot f(2x)\}$ sabiendo que $\mathbf{L}\{x \cdot f(x)\} = \frac{1}{s(s^2+1)}$.

(*Solución*: $\frac{1}{4} ln\left(\frac{(s+1)^2+4}{(s+1)^2}\right)$

9.46. Si $\mathbf{L}\{f(x)\} = arctg(\frac{1}{s})$. Calcular la función $f(x)$.

(*Solución*: $f(x) = \frac{senx}{x}$).

9.47. Calcular la transformada de Laplace de la función periódica de periodo $2T$ tal que $f(x) = \begin{cases} \pi & x \in [0, T) \\ -\pi & x \in [T, 2T) \end{cases}$.

9.48. Calcular la transformada de Laplace de la función periódica de periodo $2T$ tal que $f(x) = \begin{cases} 2T & x \in [0, T) \\ 2x - 2T & x \in [T, 2T) \end{cases}$.

9.49. Demostrar que $\int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{2}x} \cdot senhx \cdot senx}{x} dx = \frac{\pi}{8}$.

9.50. Hallar la transformada de Laplace de $f(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^1 \frac{\cos tx}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

(*Solución*: $\mathbf{L}\{f(x)\} = \frac{\sqrt{s^2+1}}{s^2+1}$)

9.51. Calcular la integral $\int_0^{\infty} \frac{2sen^2 x \cdot sen 2x}{x^2} dx$.

(*Solución*: $ln(4)$)

9.52. Calcular la transformada inversa de la función $F(s) = \frac{e^{-\frac{a}{s}}}{\sqrt{s}}$, sabiendo que **L** $\left\{\frac{\cos 2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi x}}\right\} = \frac{e^{-\frac{1}{s}}}{\sqrt{s}}$.

(*Solución*: $\mathbf{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\frac{a}{s}}}{\sqrt{s}}\right\} = \left\{\frac{\cos 2\sqrt{ax}}{\sqrt{\pi x}}\right\}$.

9.53. Resolver la ecuación diferencial $x \cdot y'' + (3x - 1) \cdot y' - (4x + 9) \cdot y = 0$, con las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 0$.

(*Solución*: $y(x) = \frac{k}{2!} \cdot e^x \cdot x^2$).

9.54. Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales: $\begin{cases} 3y_1' + 2y_1 + y_2' = 1 \\ y_1' + 4y_2' + 3y_2 = 0 \end{cases}$ con las condiciones iniciales $y_1(0) = 0$ e $y_2(0) = 0$.

(*Solución*: $y_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{e^{-x}}{5} - \frac{3e^{-\frac{6}{11}x}}{10}$, $y_2(x) = \frac{e^{-x}}{5} - e^{-\frac{6}{11}x}$)

9.55. Calcular la función $f(x)$ que verifica la siguiente ecuación integral:

$f(x) = 3x^2 - e^{-x} - \int_0^x e^{x-t} f(t) dt$.

(*Solución:* $f(x) = 3x^2 - x^3 + 1 - 2e^{-x}$)

9.56. Hallar la función $f(x)$ que verifica la siguiente ecuación integral:

$$e^{-x} = f(x) + 2\int_0^x cos(x-t)f(t)dt\ .$$

(*Solución*: $f(x) = (x-1)^2 \cdot e^{-x}$)

9.57. Resolver la ecuación $y''(x) + 2y(x) = \delta(x - 2\pi)$ con $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

(*Solución*: $y(x) = cos\ x + u(x - 2\pi)\cdot sen(x - 2\pi)$)

9.58. Calcular la solución de la ecuación $y'(x) + 2y(x) = f(x)$, con $y(0) = 0$, siendo $f(x) = e^{-2(x-2)}$ si $0 \le x \le 2$ y $f(x) = 0$ si $x > 2$.

(*Solución*: $y(x) = x\cdot e^{-2(x-2)} - u_2(x)\cdot(x-2)\cdot e^{-2(x-2)}$).

9.59. Resolver la ecuación $y''(x) + a^2y(x) = \delta(x)$, con $y(0) = 0$ $y'(0) = 1$.

(*Solución*: $y(x) = \frac{1}{a} senax$)

9.60. La ecuación diferencial de la corriente $i(t)$ en un circuito LR en serie es: $L\cdot\frac{di(t)}{dt} + Ri = E(t)$. Determinar $i(t)$, cuando $i(0) = 0$ y $E(t)$ es la función periódica de periodo 2 definida por $E(t) = \begin{cases} 1 & x\in[0,1) \\ 0 & x\in[1,2) \end{cases}$

(*Solución*: $\frac{1}{R}(1-e^{\frac{-Rt}{L}}) + \frac{1}{R}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-e^{\frac{-R(t-\pi)}{L}}u(t-n)))$)