CAPÍTULO 8

Existencia y unicidad de soluciones

En el capítulo anterior se han introducido las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y se han mostrado los procedimientos a seguir para obtener la solución de distintos tipos de ecuaciones diferenciales, en función de sus características específicas. En estos casos, la existencia de una solución se puede establecer directamente, resolviendo el problema y encontrando la función que verifica las condiciones pedidas. Sin embargo en el caso general no es siempre posible encontrar la solución de una ecuación diferencial y hay que recurrir a la utilización de métodos numéricos que permitan obtener valores aproximados de la solución que se busca. Pero para que estos métodos sean eficaces es preciso asegurar previamente la existencia y unicidad de la solución de lo que se conoce como un problema de valor inicial o problema de Cauchy.

Los teoremas de existencia y unicidad que se presentan en este capítulo garantizan, bajo determinadas condiciones de regularidad, la existencia y la unicidad de la solución sin necesidad de calcularla previamente.

En la *sección 1* se introduce lo que se conoce como problema de valor inicial, o problema de Cauchy, y se presentan conceptos básicos y resultados previos que se utilizarán a lo largo del capítulo. En la *sección 2* se presentan el teorema de Cauchy-Peano, que garantiza bajo sus hipótesis la existencia de solución de un problema de Cauchy, y el teorema de Picard-Lindelöf, que asegura la unicidad de la solución.

En muchos casos interesa obtener la solución de un problema de valor inicial de forma local, es decir, en un entorno del punto en el que se da la condición inicial. En la *sección 3* se estudian las condiciones para la existencia y la unicidad de soluciones locales, así como la posibilidad de prolongar dichas soluciones a intervalos mas amplios. Cada sección termina con una amplia colección de ejemplos resueltos.

8.1. PROBLEMA DE CAUCHY. TEOREMAS PREVIOS

8.1.1. Problema de Cauchy

Sea $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ una función continua, definida en $[a, b] \times \mathfrak{R}^n$ y con valores en $\mathfrak{R}^n$. Sea x_0 un punto del intervalo $[a, b]$. Se considera la ecuación diferencial $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ y el valor de la solución en el punto x_0, $\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0$, $\boldsymbol{y}_0 \in \mathfrak{R}^n$.

Definición 8.1.1:

Un ***problema de valor inicial*** o ***problema de Cauchy*** consiste en la búsqueda de una función $\boldsymbol{y}(x)$ definida para los valores x del intervalo $[a, b]$, que sea solución de la ecuación diferencial $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ en $[a, b]$, y que en un punto x_0 del intervalo $[a, b]$ tome el valor $\boldsymbol{y}_0$.

El problema se puede representar de la forma:

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \quad x \in [a,b]$$

El propósito de este capítulo es determinar bajo qué condiciones de regularidad para $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ se puede asegurar que el problema de valor inicial así planteado tiene solución y cuándo se puede asegurar que dicha solución es única.

Una primera observación es la siguiente:

Resolver el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \quad x \in [a,b]$$

es equivalente a encontrar una solución de la ecuación

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,y(s))ds.$$

En efecto, si existe una función $\boldsymbol{y}(x)$ que sea solución del problema de Cauchy que se acaba de plantear, debe verificar que $\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}(x))$. Por tanto integrando esta expresión e imponiendo la condición $\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0$ se tiene:

$$\int_{x_0}^{x} y'(s) = \int_{x_0}^{x} f(s,y(s))ds \Rightarrow y(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(s,y(s))ds \Rightarrow$$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,y(s))ds.$$

Recíprocamente, si se deriva la expresión anterior se tiene la ecuación diferencial $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$, y el valor de $\boldsymbol{y}(x)$ en el punto x_0 es precisamente $\boldsymbol{y}_0$, ya que al tener los mismos límites de integración la integral se anula.

Para asegurar que el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \ x \in [a,b]$$

tiene solución es suficiente, entonces, demostrar que existe una función ***y***(*x*) que verifica la ecuación integral.

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds.$$

Para encontrar una solución de esta ecuación se puede definir una transformación *T* sobre el conjunto de todas las funciones φ continuas en el intervalo [*a*, *b*] en $\mathfrak{R}^n$, de manera que

$$T\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))ds .$$

Si existe una función φ tal que *T*(φ) = φ , es decir, si la transformación *T* tiene un punto fijo, φ es precisamente la solución del problema de Cauchy propuesto.

8.1.2. Aplicaciones contractivas. Teorema del punto fijo

No toda transformación tiene un punto fijo. Pero existen transformaciones para las que se puede garantizar su existencia. Un ejemplo de ellas lo constituyen las transformaciones contractivas, que serán de utilidad para garantizar la existencia y unicidad de solución de un problema de Cauchy.

Definición 8.1.2.

Sea *T* una aplicación definida de un espacio métrico *E* en sí mismo. *T* es una ***aplicación contractiva*** si existe α, $0 < \alpha < 1$, tal que para todo x, $y \in E$ se verifica que $d(T(x), T(y)) \leq \alpha \cdot d(x, y)$.

De la propia definición se deduce que una aplicación contractiva es continua. El siguiente teorema asegura la existencia de un punto fijo para las transformaciones contractivas.

Teorema 8.1.1: ***Teorema del punto fijo de una aplicación contractiva***

Toda aplicación contractiva T definida de un espacio métrico completo E en sí mismo tiene un único punto fijo. Es decir, existe un punto $x \in E$ tal que $T(x) = x$.

Demostración.

Sea $x_0 \in E$ un punto de partida. Si se aplica la transformación T sucesivamente se tiene: $T(x_0) = x_1$, $T(x_1) = x_2$, …, $T(x_n) = x_{n+1}$ …

La sucesión resultante es una sucesión de Cauchy, pues en efecto, se tiene que:

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq \alpha \cdot d(x_n, x_{n-1}) \leq \ldots \leq \alpha^n \cdot d(x_1, x_0).$$

Utilizando la propiedad triangular de la distancia se obtiene que la distancia entre dos elementos cualesquiera de la sucesión es

$$d(x_{n+k}, x_n) \leq d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) + d(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}) + \ldots + d(x_{n+1}, x_n) \leq (\alpha^{n+k-1} + \alpha^{n+k-2} + \ldots + \alpha^n) \cdot d(x_1, x_0) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot d(x_1, x_0).$$

Como α es menor que 1, para un valor de n suficientemente grande la distancia $d(x_{n+k}, x_n)$ se puede hacer tan pequeña como se quiera; por tanto la sucesión es de Cauchy, y como E es un espacio métrico completo la sucesión es convergente.

Sea x el límite de la sucesión. Como T es continua

$$T(x) = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x.$$

Se tiene entonces que el límite de la sucesión es un punto fijo de T.

Sólo falta demostrar que es el único punto fijo de la transformación. Esto es así porque si existiera otro punto fijo z distinto de x, al ser T contractiva

$$d(x, z) = d(T(x), T(z)) \le \alpha \cdot d(x, z) < d(x, z),$$

lo cual es una contradicción. Por tanto el punto fijo es único. □

Una observación de interés es que la demostración anterior proporciona un camino para hallar el punto fijo de una transformación contractiva: basta aplicar la transformación a un punto arbitrario de E, volverla a aplicar de manera indefinida y calcular su límite.

8.1.3. Funciones equicontinuas. Teorema de Ascoli-Arzelà

El teorema de Ascoli-Arzelà, que se presenta a continuación, tiene una gran importancia por sus muchas aplicaciones. Entre ellas se utilizará en la *sección 8.2* para demostrar el teorema de existencia de Cauchy-Peano. Establece condiciones sobre una familia de funciones definidas en un conjunto $E \subset \Re^n$ bajo las cuales se puede asegurar que existe una subsucesión uniformemente convergente. Se presenta únicamente el enunciado del teorema, porque la demostración excede de los objetivos de este libro.[1]

El teorema de Ascoli-Arzelà es de alguna manera similar, adaptado en este caso a funciones, al teorema de Bolzano-Weierstrass, que asegura que un conjunto infinito números reales contenido en un subconjunto de números reales cerrado y acotado tiene una subsucesión convergente.

En las hipótesis del teorema de Ascoli-Arzelà aparecen los conceptos de acotación uniforme y equicontinuidad de una familia de funciones, que se enuncian a continuación.

Definición. 8.1.3.

Sea $\{\varphi_\alpha\}$ una familia de funciones definidas en un conjunto $E \subset \mathfrak{R}^n$ con valores en $\mathfrak{R}^n$. Se dice que $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ está ***uniformemente acotada*** en E si existe un número real $M > 0$ tal que para todo $x \in E$ y todo $\alpha \in A$ se verifica $|\varphi_\alpha(x)| \leq M$.

Ejemplos:

La sucesión $\varphi_n(x) = \cos nx$ está uniformemente acotada en $\mathfrak{R}$ porque existe $M = 1$ tal que para todo $x \in \mathfrak{R}$ y todo $n \in \mathbf{N}$ se tiene que $|\cos nx| \leq 1$.

En cambio, la sucesión $\varphi_n(x) = \dfrac{\cos nx}{x}$ está acotada en cada punto del intervalo (0, 1), pero no esta uniformemente acotada en (0, 1).

Por último, la sucesión $\varphi_n(x) = n\cdot x$ no está acotada uniformemente ni puntualmente en (0, 1).

[1] La demostración se puede ver en M. Guzmán: Ecuaciones diferenciales ordinarias. Teoría de estabilidad y control. Ed. Alhambra. 1975.

Definición. 8.1.4 .

La familia $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de funciones definidas en un conjunto $E \subset \Re^n$ es ***equicontinua*** en E si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo par de puntos $x_1, x_2 \in E$ situados entre sí a una distancia menor que δ, $|x_1 - x_2| < \delta$, y todo $\alpha \in A$ se verifica $|\varphi_\alpha(x_1) - \varphi_\alpha(x_2)| < \varepsilon$.

De la propia definición se deduce que la equicontinuidad exige que cada una de las funciones de la familia sea uniformemente continua en E, y que además para cada valor fijado de ε el valor de δ preciso sea el mismo para cada una de las funciones de la familia.

Ejemplos:

La sucesión $\varphi_n(x) = n\cdot x$ no es una familia equicontinua de funciones en el intervalo [0, 1], y sin embargo cada una de las funciones $\varphi_n(x) = n\cdot x$ es uniformemente continua en [0, 1].

La sucesión $\varphi_n(x) = x^n$ es equicontinua en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$, pero no lo es en el intervalo [0, 1]. (Se demuestra en el *ejemplo 8.1.1*).

Se puede demostrar sin demasiada dificultad que si una sucesión $\{\varphi_n(x)\}_{n\in \boldsymbol{N}}$ de funciones continuas converge uniformemente en un conjunto compacto $E \subset \Re$ a una función φ, entonces $\{\varphi_n(x)\}_{n\in \boldsymbol{N}}$ es uniformemente acotada y equicontinua. (*Ejercicio 8.1*).

El teorema de Ascoli-Arzelà en cierta manera permite asegurar resultados en sentido inverso.

Teorema 8.1.2: ***Teorema de Ascoli-Arzelà***

Sea A un conjunto de índices infinito, y sea $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una familia de funciones definidas en un conjunto acotado $E \subset \mathfrak{R}^n$ con valores en $\mathfrak{R}^n$ tales que $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es equicontinua y uniformemente acotada en *E*. Entonces existe una subsucesión $\{\varphi_n(x)\}_{n\in \boldsymbol{N}} \subset \{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$, que converge uniformemente en *E*.

8.1.4. Condición de Lipschitz

La condición de Lipschitz se denomina así porque fue introducida por R. Lipschitz en 1 876. Garantiza a las funciones que la verifican un grado de regularidad intermedio entre la continuidad y la derivabilidad. Se presenta en este capítulo porque se utilizará como condición suficiente para asegurar la unicidad de solución de un problema de Cauchy.

Definición 8.1.5.

Sea $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ una función definida en un subconjunto $D \subset \mathfrak{R}^n$, con valores en $\mathfrak{R}^n$. Se dice que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ verifica la ***condición de Lipschitz*** , o que es ***lipschitziana*** en *D*, si existe una constante *L* tal que para todo $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2 \in D$,

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)| \le L\cdot|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|.$$

Las funciones que verifican la condición de Lipschitz se llaman funciones ***globalmente lipschitzianas*** en *D*, o simplemente ***lipschitzianas*** en *D*.

La constante *L* se denomina ***constante de Lipschitz*** de la función en *D*.

La condición de Lipschitz puede ser una condición demasiado fuerte si lo que se estudia es un problema local. En estos casos es suficiente que se verifique una condición de Lipschitz local, que se define a continuación.

Definición 8.1.6.

Sea $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ una función definida en un subconjunto abierto $D \subset \Re^n$, con valores en $\Re^n$. Se dice que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ es ***localmente lipschitziana*** en D si para cada rectángulo $R \subset D$ existe una constante L tal que si $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in R$

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)| \leq L \cdot |\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|.$$

De la propia definición se deduce que si una función $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ es lipschitzina (local o globalmente) en un dominio D, es continua en D. En sentido inverso, existen funciones continuas que no son lipschitzianas (*ejemplo 8.1.4*). La condición de Lipschitz es por tanto una condición mas fuerte que la continuidad.

En cuanto a su relación con la derivada, se puede medir sin mas que tener en cuenta que la condición de Lipschitz respecto de la segunda variable indica que el cociente incremental

$$\frac{|f(x_2) - f(x_1)|}{|x_2 - x_1|}, \ x_1, x_2 \in D.$$

está acotado por la constante de Lipschitz L en todo el dominio D de definición de la función. Esto lleva a pensar que la condición de Lipschitz está directamente relacionada con el comportamiento de la derivada o las derivadas parciales de la función, si es que existen.

La condición de Lipschitz se utilizará en las *secciones 2 y 3* de este capítulo para funciones $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ definidas en un subconjunto D de $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n$, que verifican la condición de Lipschitz respecto de la segunda variable, $\boldsymbol{y}$, (local o globalmente).

La siguiente proposición proporciona una condición suficiente para que una función verifique la condición de Lipschitz.

Proposición 8.1.3:

Si $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ es continua en $D \subset \Re\times\Re^n$, existen las derivadas parciales respecto de la segunda variable y están acotadas en D, entonces $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ verifica la condición de Lipschitz respecto de la segunda variable.

Demostración:

Por simplificar se hace para $n = 1$, es decir, para $y \in \Re$.

Sea $M = sup\left\{ \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| : (x, y) \in D\right\}$, y sean (x, y_1), $(x, y_2) \in D$. El teorema del valor medio, considerada f como función de y, asegura que:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left|\frac{\partial f(x,\xi)}{\partial y}\right| \cdot |y_1 - y_2| \text{ , } y_1 \le \xi \le y_2.$$

Por tanto $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le M\cdot|y_1 - y_2|$, para todo par de puntos (x, y_1), $(x, y_2) \in D$. Se tiene entonces que $f(x, y)$ verifica la condición de Lipschitz respecto de la segunda variable con constante de Lipschitz $L = M$. □

Este resultado permite asegurar que si una función tiene derivadas parciales respecto de la segunda variable y están acotadas en un dominio D, es lipschitziana respecto de dicha variable en D. Esto tiene especial interés porque la condición de Lipschitz no es en muchos casos una propiedad fácil de verificar directamente de la definición.

No obstante, es preciso tener en cuenta que una función puede verificar la condición de Lipschitz y sin embargo no ser derivable. Así, por ejemplo, la función $f(x, y) = |y|$ es lipschitziana respecto de la segunda variable en todo $\Re^2$, ya que para todo $y_1, y_2 \in \Re$ y todo $x \in \Re$ se tiene que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le |\,|y_1| - |y_2|\,| \le |y_1 - y_2|.$$

por lo que es lipschitziana respecto de la variable y en todo $\mathfrak{R}^2$, con constante de Lipschitz $L = 1$. Pero no es derivable respecto de y en ningún punto de la recta $y = 0$.

Sin embargo se puede asegurar que si una función es lipschitziana respecto de la variable y en D, y existen sus derivadas parciales respecto de y en D, entonces las derivadas parciales necesariamente tienen que estar acotadas en D.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 8.1.1: Demostrar que la familia $\varphi_n(x) = x^n$ es equicontinua en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$, pero no lo es en el intervalo [0, 1].

Es equicontinua en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$:

Hay que demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo par de puntos $x_1, x_2 \in [0, \frac{1}{2}]$ que verifiquen $|x_1 - x_2| < \delta$, y para todo $n \in \boldsymbol{N}$, se tiene que $|x_1^n - x_2^n| < \varepsilon$.

En efecto,

$$|x_1^n - x_2^n| = |x_1 - x_2|\cdot|x_2^{n-1} + x_1x_2^{n-2} + \ldots + x_2x_1^{n-2} + x_1^{n-1}| \le |x_1 - x_2|\frac{n}{2^{n-1}} \le |x_1 - x_2|$$

Basta entonces tomar $\delta = \varepsilon/2$ para que se verifique que $|x_1^n - x_2^n| < \varepsilon$.

No es equicontinua en el intervalo [0, 1]:

En efecto, para cada $x \in [0, 1]$, $|\varphi_n(1) - \varphi_n(x)| = 1 - x^n$.

Sea $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Para todo valor de δ, $0 < \delta < 1$, el punto $x = 1 - \delta/2$ es tal que $|1 - x| < \delta$ y sin embargo $1 - x^n = 1 - (1 - \delta/2)^n > \varepsilon$, siempre que n sea suficientemente grande.

Ejemplo 8.1.2: Demostrar que $f(x) = x^2$ es lipschitziana en [0, 1].

Sean $x_1, x_2 \in [0, 1]$.

$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1^2 - x_2^2| = |x_1 - x_2|\cdot| x_1 + x_2| \leq 2\cdot|x_1 - x_2|$.

Por tanto, $f(x) = x^2$ es lipschitziana en [0, 1], con constante de Lipschitz $L = 2$.

Ejemplo 8.1.3: Demostrar que $f(x) = x^n$, para $n \in \boldsymbol{N}$, $n > 1$ es localmente lipschitziana en $\mathfrak{R}$.

La condición $n > 1$ es necesaria, pues si $n = 1$, la función $f(x) = x$ es globalmente lipschitziana en $\mathfrak{R}$ con constante de Lipschitz $L = 1$.

Sea $x_0 \in \mathfrak{R}$, y sea $I = [x_0 - r, x_0 + r]$. Dados $x_1, x_2 \in I$,

$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1^n - x_2^n| = |x_1 - x_2|\cdot|x_2^{n-1} + x_1x_2^{n-2} + \ldots + x_2x_1^{n-2} + x_1^{n-1}| \leq |x_1 - x_2|\cdot n\cdot(x_0 + r)^{n-1} \leq L\cdot|x_1 - x_2|$.

Por tanto, para cada punto $x_0 \in \mathfrak{R}$ y cada intervalo $I = [x_0 - r, x_0 + r]$ se verifica la condición de Lipschitz con una constante $L = n\cdot(x_0 + r)^{n-1}$.

Es importante observar que la constante depende del punto x_0 y del tamaño del intervalo. Esto impide asegurar que la función sea globalmente lipschitziana en $\mathfrak{R}$. Y en efecto no lo es pues, si x_1 y x_2 son ≥ 0, al ser

$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1^n - x_2^n| = |x_1 - x_2|\cdot|x_2^{n-1} + x_1x_2^{n-2} + \ldots + x_2x_1^{n-2} + x_1^{n-1}| \geq$

$|x_1 - x_2|\cdot n\cdot(min\ (x_1, x_2))^{n-1}$,

el factor $(min\ (x_1, x_2))^{n-1}$ se puede hacer todo lo grande que se quiera sin mas que tomar x_1 y x_2 suficientemente alejados del origen.

Ejemplo 8.1.4: Demostrar que la función $f(x, y) = y^{1/3}$ no es lipschitziana respecto de la segunda variable en $\mathfrak{R}^2$.

La función $f(x, y) = y^{1/3}$ es continua en $\mathfrak{R}^2$ pero no es lipschitziana en ningún rectángulo que tenga intersección no vacía con la recta $y = 0$. En efecto,

$$|f(x, y_1) - f(x, 0)| = |y_1^{1/3} - 0| = \frac{1}{|y_1^{2/3}|}|y_1|,$$

y el término $\frac{1}{|y_1^{2/3}|}$ no está acotado por ninguna constante en el rectángulo, pues para valores de y_1 próximos a cero el valor tiende a infinito.

Ejemplo 8.1.5: Sea $f(x, y) = min(|x|, y)$ para $(x, y) \in \mathfrak{R}^2$. Demostrar que es lipschitziana respecto de y en todo $\mathfrak{R}^2$.

La derivada parcial de f respecto de la variable y es 0 si $|x| < y$, vale 1 si $|x| > y$, y en $|x| = y$ no existe. Sin embargo la función es lipschitziana. En efecto:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |x| \leq y_1, y_2 \\ ||y_1 - |x|| & \text{si} \quad y_1 \leq |x| \leq y_2 \\ ||x| - y_2| & \text{si} \quad y_2 \leq |x| \leq y_1 \\ |y_1 - y_2| & \text{si} \quad y_1, y_2 \leq |x| \end{cases}$$

En cada uno de los casos se verifica que:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq |y_1 - y_2|,$$

y por tanto la función es lipschitziana respecto de y en todo $\mathfrak{R}^2$ con constante de Lipschitz $L = 1$.

Ejercicios

8.1. Demostrar que si una sucesión $\{\varphi_n(x)\}_{n\in \boldsymbol{N}}$ de funciones continuas converge uniformemente en un conjunto compacto $E \subset \Re$ a una función φ, entonces $\{\varphi_n(x)\}_{n\in \boldsymbol{N}}$ es uniformemente acotada y equicontinua.

8.2. Estudiar si las siguientes sucesiones de funciones son equicontinuas o uniformemente acotadas en el intervalo (0, 1).

a) $f(x) = \dfrac{sennx}{x}$.

b) $f(x) = sen\ n{\cdot}x$.

8.3. Estudiar si las funciones siguientes verifican la condición de Lipschitz (local o global) en $\Re$.

a) $f(x) = \cos x$.

b) $f(x) = x{\cdot}sen\ x$.

8.4. Estudiar si las funciones siguientes verifican la condición de Lipschitz (local o global) respecto de la variable y.

a) $f(x, y) = 1 + y^2$.

b) $f(x, y) = 1 + x^2$.

c) $f(x, y) = \dfrac{1}{1+y^2}$.

d) $f(x, y) = \dfrac{x}{1+y^2}$.

8.2. EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIÓN. SOLUCIÓN GLOBAL

Sea $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ una función continua, definida en $[a, b] \times \mathfrak{R}^n$ y con valores en $\mathfrak{R}^n$. Sea x_0 un punto del intervalo $[a, b]$. Se plantea a continuación el estudio de las condiciones de regularidad de la función $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ bajo las cuales se puede asegurar que el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \quad x \in [x_0, b]$$

tiene solución y cuándo se puede asegurar que la solución es única.

Se ha comprobado en la sección anterior que el problema es equivalente a la existencia de solución de la ecuación integral:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds .$$

8.2.1. Teorema de existencia global. Teorema de Cauchy-Peano

El Teorema de Cauchy-Peano asegura la existencia de solución si la función $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ es continua y acotada en $[x_0, b] \times \mathfrak{R}^n$.

Teorema 8.2.1: ***Teorema de Cauchy-Peano***

Se considera el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \quad x \in [x_0, b]$$

donde la función $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$: $[x_0, b] \times \mathfrak{R}^n \to \mathfrak{R}^n$ es **continua** y **acotada** en $[x_0, b] \times \mathfrak{R}^n$. Entonces el problema de valor inicial propuesto tiene al menos una solución.

Demostración:

Existen distintas demostraciones de este teorema. La que se presenta aquí se debe a Tonelli [1925][2].

Se puede suponer por simplificar que el intervalo $[x_0, b] = [0, 1]$.

La demostración se basa en la construcción de una sucesión de funciones y necesita el Teorema de Ascoli-Arzelà.

La primera función de la familia es constante: $\boldsymbol{y}_1(x) = \boldsymbol{y}_0$, $0 \le x \le 1$.

La segunda función se define como:

$$\boldsymbol{y}_2(x) = \begin{cases} y_0 & \text{si} \quad 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ y_0 + \displaystyle\int_0^{x-1/2} f(s, y_2(s))ds & \text{si} \quad \dfrac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}.$$

Se puede observar que la función $\boldsymbol{y}_2(x)$ es constante en la primera mitad del intervalo, y en la segunda mitad se define a partir de los valores de $\boldsymbol{y}_2(x)$ en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$.

[2] Esta demostración se ha obtenido de la que aparece en el libro: M. Guzmán: Ecuaciones diferenciales ordinarias. Teoría de estabilidad y control. Editorial Alhambra. 1975.

De manera sucesiva, para definir $\boldsymbol{y}_k(x)$ se divide el intervalo [0, 1] en k subintervalos del mismo tamaño, y en cada uno de ellos se define $\boldsymbol{y}_k(x)$ a partir de los valores ya definidos en el subintervalo anterior, de la forma:

$$\boldsymbol{y}_k(x) = \begin{cases} y_0 & \text{si} \quad 0 \le x \le \dfrac{1}{k} \\ y_0 + \displaystyle\int_0^{x-1/k} f(s, y_k(s))ds & \text{si} \quad \dfrac{i}{k} \le x \le \dfrac{i+1}{k}, i = 1,2,\ldots,k-1 \end{cases}$$

Como la función $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ está acotada en $[0, 1] \times \mathfrak{R}^n$, existe M tal que:

$$|\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})| \le M \text{ en } [0, 1] \times \mathfrak{R}^n.$$

Se tiene entonces que las funciones $\boldsymbol{y}_k(x)$ que se acaban de definir están uniformemente acotadas en [0, 1], pues para todo k y todo $x \in [0, 1]$ se verifica que $|\boldsymbol{y}_k(x)| \le |\boldsymbol{y}_0| + M$.

Además, para todo par x_1, $x_2 \in [0, 1]$ y todo $k \in \boldsymbol{N}$, se tiene

$$|\boldsymbol{y}_k(x_1) - \boldsymbol{y}_k(x_2)| \le M \cdot | x_1 - x_2 |,$$

y por tanto la sucesión de funciones $\{\boldsymbol{y}_k(x)\}$ es equicontinua.

El teorema de Ascoli-Arzelà asegura que existe una subsucesión $\{\boldsymbol{y}_{k^*}(x)\}$ que converge uniformemente a una función $\boldsymbol{y}(x)$ en [0, 1]. Cada una de las funciones de la subsucesión se puede escribir de la forma

$$\boldsymbol{y}_{k^*}(x) = \boldsymbol{y}_0 + \int_0^x f(s, y_{k^*}(s))ds - \int_{x-1/k^*}^x f(s, y_{k^*}(s))ds.$$

Al hacer tender k^* a ∞ la parte de la izquierda de la igualdad tiende a $\boldsymbol{y}(x)$.

Teniendo en cuenta que la función $\boldsymbol{f}$ es continua y que la convergencia de $\boldsymbol{y}_{k^*}(x)$ a la función $\boldsymbol{y}(x)$ es uniforme, se tiene, para todo $x \in [0, 1]$,

$$\int_0^x f(s, y_{k^*}(s))ds \to \int_0^x f(s, y(s))ds \,.$$

Como la función ***f*** está acotada:

$$\left| \int_{x-1/k^*}^{x} f(s, y_{k^*}(s))ds \right| \le M \cdot \frac{1}{k^*} \to 0.$$

Se tiene entonces que para todo $x \in [0, 1]$:

$$\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{y}_0 + \int_0^x f(s, y(s))ds \,,$$

con lo cual la función $\boldsymbol{y}(x)$, límite de la subsucesión $\boldsymbol{y}_{k^*}(x)$, es solución del problema de Cauchy propuesto. □

8.2.2. Teorema de existencia y unicidad global. Teorema de Picard–Lindelöf

El teorema de Cauchy-Peano asegura la existencia de solución del problema de Cauchy propuesto. Pero no asegura la unicidad: pueden existir distintas funciones que verifiquen el mismo problema de Cauchy.

El teorema de Picard–Lindelöf resuelve el problema de la unicidad de solución si la función $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ verifica además una condición mas fuerte que la requerida en las hipótesis del teorema de Cauchy-Peano: la condición de Lipschitz respecto de la segunda variable.

Teorema 8.2.2: ***Teorema de Picard–Lindelöf***

Se considera el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \ x \in [x_0, b]$$

donde la función $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$: $[x_0, b] \times \mathfrak{R}^n \to \mathfrak{R}^n$ es **continua** en $[x_0, b] \times \mathfrak{R}^n$ y verifica la **condición de Lipschitz** respecto de la segunda variable en $[x_0, b] \times \mathfrak{R}^n$, es decir, existe una constante L tal que para todo $x \in [x_0, b]$ y todo $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in \mathfrak{R}^n$ se verifica que $|\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}_1) - \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}_2)| \le L\cdot|\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2|$. Entonces el problema de valor inicial propuesto tiene una única solución.

Demostración:

Se considera el espacio vectorial $E = \mathcal{C}([x_0, b], \mathfrak{R}^n)$ de las funciones continuas en el intervalo $[x_0, b]$. Dadas dos funciones $\varphi_1, \varphi_2 \in E$, se define la distancia:

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = sup\{ e^{-K(x-x_0)} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|: x \in [x_0, b]\},$$

siendo K una constante fija tal que $K > L$. Se puede demostrar fácilmente que es una distancia y que el espacio vectorial E con esta distancia es completo. Se tiene entonces que E es un espacio métrico completo.

Se define ahora sobre E la aplicación T tal que dada la función $\varphi \in E$,

$$T\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,\varphi(s))ds .$$

$T(\varphi)$ es también una función continua definida en el intervalo $[x_0, b]$, y por tanto pertenece a E.

Entonces, si $\varphi_1, \varphi_2 \in E$,

$$e^{-K(x-x_0)}\cdot|T\varphi_1(x) - T\varphi_2(x)| \le \int_{x_0}^{x} e^{-K(x-x_0)}|\boldsymbol{f}(s, \varphi_1(s)) - \boldsymbol{f}(s, \varphi_2(s))|\cdot ds =$$

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-\mathrm{K}(x-s)}\cdot e^{-K(s-x_0)}\cdot|\boldsymbol{f}(s, \varphi_1(s)) - \boldsymbol{f}(s, \varphi_2(s))|\cdot ds \le L\cdot d(\varphi_1, \varphi_2) \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-\mathrm{K}(x-s)}\cdot ds$$

$$\le \frac{L}{K}\cdot d(\varphi_1, \varphi_2).$$

Se tiene entonces que:

$$d(T(\varphi_1),T(\varphi_2)) = sup\{ e^{-K(x-x_0)}\cdot|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|: x \in [x_0, b]\} \le \frac{L}{K}\cdot d(\varphi_1, \varphi_2).$$

Como $K > L$, la aplicación es contractiva y tiene un único punto fijo que es la única solución del problema de valor inicial propuesto. □

Observación: Si el problema de Cauchy es de la forma

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad x \in [a, x_0]$$

el teorema anterior se verifica también y el razonamiento sigue siendo válido. Únicamente hay que modificar la definición de distancia

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = sup\{ e^{-K(x_0-x)}\cdot|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|: x \in [x_0, b]\},$$

para que las acotaciones sigan siendo válidas.

Como ya se ha comentado en la *sección 1* de este capítulo, la condición de Lipschitz en muchos casos no es fácil de determinar. La *proposición 8.1.3* asegura que la condición de Lipschitz se verifica si existe la derivada respecto de la variable $\boldsymbol{y}$, y está acotada. Se tiene entonces demostrado el siguiente teorema de existencia y unicidad:

Corolario 8.2.3:

Se considera el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \; x \in [x_0, b]$$

donde la función $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$: $[x_0, b] \times \mathfrak{R}^n \to \mathfrak{R}^n$ es **continua** en $[x_0, b] \times \mathfrak{R}^n$ y $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ existe y es continua en $[x_0, b] \times \mathfrak{R}^n$. Entonces el problema de valor inicial propuesto tiene una única solución.

Este teorema tiene utilidad pues aunque es más restrictivo que el teorema de Picard-Lindelöf, suele ser mas fácil demostrar la continuidad de $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ que probar directamente que se verifica la condición de Lipschitz.

8.2.3. Iterantes de Picard

El teorema de Picard–Lindelöf proporciona también un método para obtener la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \; x \in [x_0, b]$$

El procedimiento se conoce como ***método de las aproximaciones sucesivas*** o de las ***iterantes de Picard***. Se comienza tomando una función arbitraria $\varphi_0(x)$ del espacio métrico $E = \mathcal{C}([x_0, b], \mathfrak{R}^n)$, que verifique la condición inicial del problema, por ejemplo $\varphi_0(x) \equiv \boldsymbol{y}_0$, y se aplica la transformación:

$$T\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))ds \, .$$

Se tiene entonces:

$$\varphi_1(x) = T\varphi_0(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_0(s))ds.$$

La función $\varphi_2(x)$ se obtiene de la misma forma, a partir de $\varphi_1(x)$, y en general:

$$\varphi_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_n(s))ds.$$

Se genera así una sucesión de funciones $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, …, $\varphi_n(x)$, … que verifican la condición inicial del problema pero en principio no verifican la ecuación diferencial. Si después de un número finito de pasos, por ejemplo p, se tiene que $\varphi_p(x) = \varphi_{p+1}(x)$, entonces la función $\varphi_p(x)$ es solución del problema de Cauchy propuesto. En caso contrario el proceso es infinito y hay que obtener entonces el punto fijo de la transformación, es decir, la función φ que verifica que $T\varphi = \varphi$, calculando el límite de la sucesión.

Observación:

La condición de Lipschitz garantiza que la transformación

$$T\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))ds$$

es contractiva y por tanto existe un único punto fijo que es la solución del problema de Cauchy propuesto. Pero esta transformación está perfectamente definida si la función $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ es continua y está acotada, aunque no sea lipschitziana, es decir, si verifica las hipótesis del teorema de existencia de Cauchy-Peano. Cabe entonces pensar si partiendo de una función continua definida en el intervalo correspondiente, la sucesión de funciones obtenida como resultado de aplicar sucesivamente la transformación *T* converje a la solución del problema. En general esto no es cierto, como se puede ver en el *ejemplo 8.2.4*.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 8.2.1: Estudiar si es posible aplicar los teoremas de existencia y unicidad al problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

para $(x, y) \in \Re^2$.

La función $f(x, y) = y$ es continua en $\Re^2$. Además para todo par de puntos (x, y_1), (x, y_2) de $\Re^2$ se verifica que $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |y_1 - y_2|$. Se tiene entonces que *f* es lipschitziana con constante $L = 1$, y por tanto por el teorema de Picard–Lindelöf se puede asegurar que el problema tiene una única solución definida en toda la recta real.

Ejemplo 8.2.2: Aplicar el método de las iterantes de Picard para encontrar la única solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Sea $\varphi_0(x) = 1$. Se construye a partir de φ_0 la sucesión φ_n de funciones definidas mediante la transformación:

$$\varphi_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_n(s))ds$$

$$\varphi_1(x) = 1 + \int_0^x 1ds = 1 + x,$$

$$\varphi_2(x) = 1 + \int_0^x (1+s)ds = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

$$\varphi_3(x) = 1 + \int_0^x (1+s+\frac{s^2}{2})ds = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!},$$

$$\vdots$$

$$\varphi_n(x) = 1 + \int_0^x (1+s+\frac{s^2}{2}+\ldots+\frac{s^{n-1}}{(n-1)!})ds = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Se tiene entonces que la sucesión de funciones φ_n así construida coincide con la sucesión de las sumas parciales de la serie que define la función $y(x) = e^x$. Por consiguiente, la sucesión $\varphi_n(x)$ converge a la función $y(x) = e^x$, que es la solución del problema de Cauchy propuesto.

Ejemplo 8.2.3: Estudiar si es posible aplicar los teoremas de existencia y unicidad al problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

para asegurar la existencia y la unicidad de solución.

La función $f(x, y) = y^2$ es continua en $\mathfrak{R}^2$. Para ver si es lipschitziana se toma un par de puntos (x, y_1) y (x, y_2) arbitrarios de $\mathfrak{R}^2$. Se tiene que:

$$| f(x,y_1) - f(x,y_2) | = | y^2{}_1 - y^2{}_2 | = | y_1 + y_2 | \cdot | y_1 - y_2 |$$

El valor de $|y_1 + y_2|$ crece indefinidamente si los valores de y_1 e y_2 crecen. Por tanto la función $f(x, y) = y^2$ no es lipschitziana en $\mathfrak{R}^2$ y no se puede aplicar el teorema de Picard–Lindelöf para asegurar la existencia y unicidad de solución. Tampoco se puede aplicar el teorema de Cauchy-Peano, puesto que la función $f(x, y) = y^2$, aunque es continua en $\mathfrak{R}^2$, no está acotada en $\mathfrak{R}^2$.

Esto no quiere decir, sin embargo, que el problema no tenga solución en ningún intervalo de la recta real que contenga al origen, o que no sea única. En el *ejemplo 8.3.1*. de la siguiente sección de este capítulo se estudia de nuevo este problema de manera local, y se demuestra que existe una única solución definida en un intervalo I de la recta real centrado en 0.

Ejemplo 8.2.4: Se considera el problema de valor inicial $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$, $(x, y) \in [0, 1] \times \mathfrak{R}$ siendo $f(x,y) = \begin{cases} 2x, y \le 0 \\ 2x - \dfrac{4y}{x}, 0 < y < x^2 \\ -2x, x^2 \le y \end{cases}$

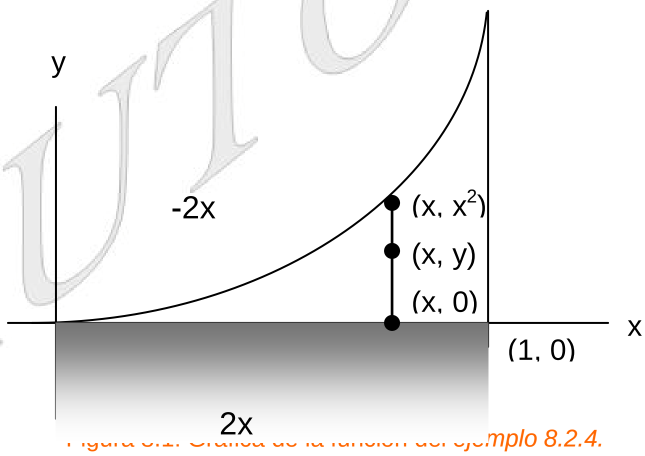

Figura 8.1: Gráfica de la función del ejemplo 8.2.4.

a) Comprobar que verifica las hipótesis del teorema de Cauchy-Peano.

b) Aplicar el método de las iterantes de Picard, con $\varphi_0(x) = 0$, y estudiar si la sucesión resultante es convergente o contiene alguna subsucesión que converja a la solución del problema de Cauchy propuesto.

c) Demostrar que no es lipschitziana.

d) Demostrar que el problema tiene una única solución.

a) La función $f(x, y)$ es continua y está acotada en $[0, 1] \times \mathfrak{R}$. Existe entonces al menos una solución.

b) Las iterantes de Picard se construyen a partir de $\varphi_0(x) = 0$.

$$\varphi_1(x) = \int_0^x f(s,0)ds = \int_0^x 2sds = x^2,$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x f(s,s^2)ds = \int_0^x -2sds = -x^2,$$

$$\varphi_3(x) = \int_0^x f(s,-s^2)ds = \int_0^x 2sds = x^2,$$

$$\vdots$$

$$\varphi_n(x) = \int_0^x f(s,(-1)^n s^2)ds = \int_0^x (-1)^{n+1} 2sds = (-1)^{n+1}x^2.$$

La sucesión de la iterantes de Picard así construida, $\varphi_n(x) = (-1)^{n+1}x^2$, no es convergente. Contiene dos subsucesiones convergentes, $\varphi_{2n}(x) = -x^2$, y $\varphi_{2n+1}(x) = x^2$, pero ninguna de las funciones x^2 o $-x^2$ es solución de la ecuación diferencial.

c) Como la sucesión φ_n no es convergente, la función $f(x, y)$ no puede ser lipschitziana, ya que si lo fuera, la transformación que genera la sucesión φ_n sería contractiva y por tanto convergería a un punto fijo.

d) Sin embargo, aunque $f(x, y)$ no sea lipschitziana, como $f(x, y)$ es decreciente respecto de la segunda variable, el problema así planteado tiene una única solución. En efecto si existieran dos soluciones $y_1(x)$, $y_2(x)$, del problema propuesto, se podría definir la función

$$h(x) = (y_1(x) - y_2(x))^2 \geq 0,\ h(0) = 0.$$

Se tiene entonces:

$h'(x) = 2(y_1(x) - y_2(x))\cdot(y_1'(x) - y_2'(x)) = 2(y_1(x) - y_2(x))\cdot(f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))) \leq 0$,

por ser f decreciente respecto de la segunda variable.

Como $h(0) = 0$ y su derivada es menor o igual que 0, entonces necesariamente $h(x) \leq 0$. Por consiguiente, $h(x) = 0$, y entonces $y_1(x) = y_2(x)$. Se puede comprobar fácilmente que la solución buscada es

$$y(x) = \frac{x^2}{3}.$$

Ejercicios

8.5. Sea $f(x, y) = min(|x|, y)$ para $(x, y) \in \Re^2$. Demostrar que el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tiene una única solución, para todo (x_0, y_0).

8.6. Demostrar que existe una función $f(x)$ continua en el intervalo [0, 1], tal que verifica la ecuación:

$$f(x) = \int_0^x s^2 sen f(s) ds.$$

Estudiar si la solución es única.

8.7. Deducir condiciones sobre $a(x)$, $b(x)$ y $c(x)$ para que el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tenga una única solución, para $(x_0, y_0) \in R = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \times [y_0 - \beta, y_0 + \beta]$.

8.8. Aplicar el método de las Iterantes de Picard para obtener la solución del problema

$$\begin{cases} y' = -y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

en $x \in [0, 2]$, y comparar las aproximaciones sucesivas con la solución exacta obtenida directamente.

8.3. PROBLEMA DE CAUCHY. SOLUCIÓN LOCAL

8.3.1. Teorema de existencia y unicidad local de soluciones

Los teoremas anteriores se pueden aplicar a problemas de valor inicial en los que la función $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ está definida en $[a, b] \times \mathfrak{R}^n$ y es suficientemente buena en todo su dominio de definición. Sin embargo, en muchas ocasiones la función $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ que aparece en una ecuación diferencial no está definida en toda la región $[a, b] \times \mathfrak{R}^n$, o no es suficientemente buena en todo el dominio, pero sí lo es en un subconjunto que contenga al punto $(x_0, \mathbf{y}_0)$. En este caso los teoremas de esta sección aseguran, bajo las correspondientes condiciones de regularidad, la existencia y unicidad de solución en un intervalo centrado en el punto x_0. El razonamiento se presenta para $n = 1$ por una mayor simplicidad, pero los resultados son válidos para todo *n.*

Se considera el problema de valor inicial $\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ en el que la función $f(x, y)$ está definida y es continua en el rectángulo $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subset \mathfrak{R}^2$. Al ser continua en un conjunto compacto, está acotada. Sea M una cota de la función:

$$M = max\{|f(x, y)|: (x, y) \in R\}.$$

Se supone también que el valor M representa una cota superior para las pendientes de las rectas tangentes a las soluciones $y(x)$ del problema de valor inicial en cada punto (x, y) de R.

Se define el intervalo $I = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, siendo α tal que $\alpha = min(a, \frac{b}{M})$. La amplitud del intervalo, α, se escoge de esta manera con el fin de poder asegurar que la gráfica de la solución buscada esté contenida entre las rectas

$$y - y_0 = \pm M\cdot(x - x_0).$$

Esto es cierto porque por una parte la pendiente de la solución que se busca debe ser menor o igual que M, y por otra las dos rectas anteriores cortan a los lados $y_0 \pm b$ precisamente en los puntos $x_0 \pm \frac{b}{M}$.

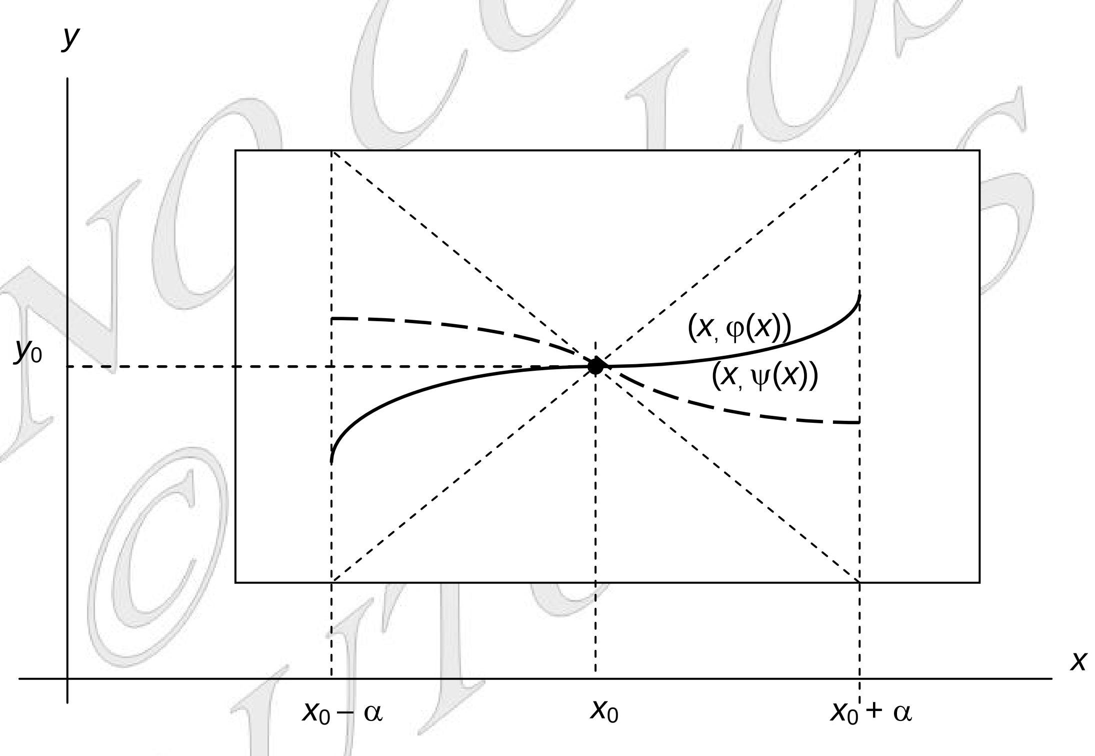

Figura 8.2: Región definida para una solución local de un problema de valor inicial

El intervalo así definido verifica que si $x \in I$, la gráfica de la solución que pasa por el punto (x_0, y_0) está contenida en la región de la figura formada por los dos triángulos unidos por un vértice común en el punto (x_0, y_0).

Sea ahora E el espacio de todas las funciones continuas definidas en el intervalo I = $[x_0 - \alpha,\ x_0 + \alpha]$, tales que su gráfica está contenida en la región formada por los dos triángulos de la *figura 8.2*, es decir,

$$E = \{\varphi(x) \in \mathcal{C}(\text{I}) : y_0 - M\cdot(x - x_0) \le \varphi(x) \le y_0 + M\cdot(x - x_0)\}.$$

Se puede comprobar sin dificultad que el conjunto E así definido es un espacio métrico completo con la distancia:

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = sup_{x\in \text{I}} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|.$$

El espacio métrico E así definido se va a utilizar para garantizar, bajo las hipótesis correspondientes, la existencia y unicidad de solución de un problema de valor inicial.

Teorema 8.3.1: ***Teorema de existencia y unicidad local***

Sea D un subconjunto abierto de $\mathfrak{R}^2$. Se considera el problema de valor inicial: $\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ $(x_0, y_0) \in D$. Si la función $f(x, y)$ está definida en D, es continua en D y es localmente Lipschitziana respecto de la segunda variable en D, con constante de Lipschitz L, existe un intervalo I = $[x_0 - h,\ x_0 + h]$ y existe una única función $\varphi(x)$ definida en I que es solución del problema de valor inicial propuesto.

Demostración:

Sea R un rectángulo con centro en el punto (x_0, y_0), $R = [x_0 - a,\ x_0 + a] \times [y_0 - b,\ y_0 + b]$, $R \subset D$. Sea E el espacio métrico completo de las funciones continuas definidas en el intervalo I = $[x_0 - \alpha,\ x_0 + \alpha]$, $\alpha = min(a, \frac{b}{M})$, tales que:

$$E = \{\varphi(x) \in \mathcal{C}(\text{I}) : y_0 - M\cdot(x - x_0) \le \varphi(x) \le y_0 + M\cdot(x - x_0)\},$$

Se define sobre *E* la aplicación *T* tal que dada la función $\psi \in E$,

$$T\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,\psi(s))ds .$$

Se observa que $T\psi$ es también una función definida y continua en el intervalo $[x_0 - a, x_0 + a]$.

Además se tiene que:

$$T\psi(x) \leq y_0 + \int_{x_0}^{x} Mds = y_0 + M(x - x_0)$$

$$T\psi(x) \geq y_0 - \int_{x_0}^{x} Mds = y_0 - M(x - x_0) .$$

Por tanto, si $\psi \in E$, $T\psi$ también pertenece a *E* y *T* es entonces una aplicación que transforma el conjunto *E* en sí mismo. Si se demuestra que *T* es contractiva, el *teorema 8.1.1* asegura la existencia de un único punto fijo φ de la transformación:

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,\varphi(s))ds ,$$

que es precisamente la única solución del problema de valor inicial propuesto.

Para probar el teorema basta entonces demostrar que la transformación *T* es contractiva.

Sean φ_1 y $\varphi_2 \in E$. Se tiene entonces que

$d(T\varphi_1, T\varphi_2) = sup_{x\in I} |T\varphi_1(x) - T\varphi_2(x)| = sup_{x\in I} |\int_{x_0}^{x}$ $(f(s, \varphi_1(s)) - f(s,$

$\varphi_2(s)))\cdot ds| \leq sup_{x\in I} \int_{x_0}^{x} L\cdot|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|\cdot ds \leq L\cdot sup_{x\in I}$ [$sup_{s\in I} |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)| \cdot \int_{x_0}^{x} ds$] $= L\cdot\alpha\cdot d(\varphi_1, \varphi_2)$.

La aplicación es pues contractiva si $L\cdot\alpha < 1$. Basta entonces elegir α de manera que se verifique que $\alpha < min(a, \frac{1}{L}, \frac{b}{M})$, y el teorema está demostrado sin mas que tomar $h = \alpha$. □

Se puede también en el caso local sustituir la condición de Lipschitz local a través de la *proposición 8.1.4*, por la existencia y continuidad de la derivada parcial de *f* respecto de *y*, obteniéndose un teorema mas restrictivo, pero en cambio mas fácil de aplicar.

Corolario 8.3.2: ***Existencia y unicidad local***

Sea *D* un subconjunto abierto de $\Re^2$. Se considera el problema de valor inicial: $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, $(x_0, y_0) \in D$. Si la función $f(x, y)$ está definida en *D*, y las funciones *f* y $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ son **continuas** en *D*, entonces existe un intervalo $I = [x_0 - h, x_0 + h]$ y existe una única función $\varphi(x)$ definida en I que es solución del problema de valor inicial propuesto.

8.3.2. Teorema de existencia local de soluciones

Si en el *teorema 8.3.1* se elimina la condición de Lipschitz no se puede garantizar la unicidad, pero si se puede asegurar la existencia de la solución.

Teorema 8.3.3: ***Teorema de existencia local***

Se considera el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (x_0, y_0) \in R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b].$$

Si la función $f(x, y)$ está definida y es continua en R, existe un intervalo I = $[x_0 - h, x_0 + h]$ y existe una función $\varphi(x)$ que es solución del problema de valor inicial para todo $x \in$ I.

La demostración de este teorema excede el nivel de este libro.[3]

8.3.3. Prolongación de soluciones

Para terminar se considera el problema de la prolongación de una solución de un problema de Cauchy. Los teoremas anteriores aseguran la existencia y unicidad o la existencia de solución en un intervalo I = $[x_0 - h, x_0 + h]$. La pregunta ahora es si la solución se puede extender a un intervalo mas amplio que el intervalo I.

Definición 8.3.1:

Sea $\varphi(x)$ una solución del problema de valor inicial $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, definida en un intervalo I_φ de la recta real que contiene al punto x_0. La función $\psi(x)$ es

[3] La demostración de este teorema puede verse en los libros: 1) M. Guzmán: Ecuaciones diferenciales ordinarias. Teoría de estabilidad y control. Ed. Alhambra. 1975. 2) C. Fernández y J. M. Vegas. Ecuaciones diferenciales II. Ed. Pirámide. 1996.

una **prolongación** de $\varphi(x)$ si $\psi(x)$ es también solución del problema de valor inicial en un intervalo I_ψ que contiene propiamente a I_φ, ($I_\varphi \subset I_\psi$, $I_\varphi \neq I_\psi$) y $\varphi(x) = \psi(x)$ para todo $x \in I_\varphi$.

Definición 8.3.2:

Sea $\varphi(x)$ una solución del problema de valor inicial $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_o) = y_0 \end{cases}$ en el intervalo I_φ. Se dice que $\varphi(x)$ es una ***solución maximal*** si **no** existe ninguna prolongación de $\varphi(x)$.

El teorema que se enuncia a continuación asegura que si se verifican las condiciones del *teorema 8.3.1*, el problema de valor inicial $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_o) = y_0 \end{cases}$ tiene una única solución maximal.

Teorema 8.3.4.

Sea $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ una función definida, continua y localmente lipschitziana respecto de la segunda variable en un conjunto abierto D contenido en $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n$. Si $(x_0, \boldsymbol{y}_0) \in D$, el problema de valor inicial $\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ tiene una única solución maximal, definida en un intervalo abierto $I = (x_0 - h, x_0 + h)$, en el que h depende de los valores de x_0 y de $\boldsymbol{y}_0$.[4]

[4] La demostración de este teorema puede verse en el libro: C. Fernández y J. M. Vegas. Ecuaciones diferenciales II. Ed. Pirámide. 1996.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 8.3.1: Estudiar si existe solución del problema de valor inicial $\begin{cases} y' = y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ y si es única. Estudiar la situación para distintos valores iniciales del problema.

La función $f(x, y) = y^{2/3}$ es continua en todo $\mathfrak{R}^2$ y por tanto es continua en todo rectángulo centrado en el punto (0, 0). El *teorema 8.3.3* garantiza entonces la existencia de solución en un intervalo de la forma $[-h, h]$.

Una solución es la función nula $y(x) = 0$, que pasa por el punto (0, 0), está definida en todo $\mathfrak{R}$ y es solución en $\mathfrak{R}$ de la ecuación diferencial $y' = y^{2/3}$.

La ecuación diferencial $y' = y^{2/3}$ es una ecuación de variables separables. La solución general se puede calcular fácilmente y es de la forma $y = \frac{1}{3^3}(x + C)^3$.

Si en esta expresión se impone la condición $y(0) = 0$, se tiene que la constante C tiene que ser 0. Entonces la función $y = \frac{x^3}{3^3}$ verifica la ecuación y es también solución del problema de Cauchy propuesto.

La solución no es única. Existen pues al menos dos soluciones diferentes del problema.

En realidad se puede decir que existen infinitas soluciones del problema, que se pueden expresar de la forma siguiente: dadas dos constantes arbitrarias, $C_1 \leq 0$ y $C_2 \geq 0$, las funciones definidas de la forma

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{3^3}(x - C_1)^3, & x \leq C_1 \\ 0, & C_1 < x \leq C_2 \\ \frac{1}{3}(x - C_2)^3, & x > C_2 \end{cases}$$

son todas ellas soluciones del problema de Cauchy propuesto.

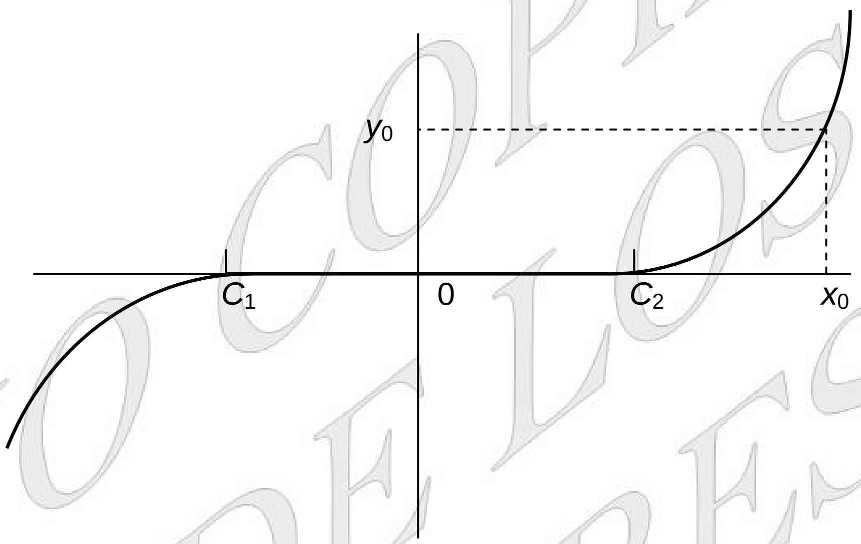

Figura 8.3: Gráfica de la solución del *ejemplo* 8.3.1.

Se tiene esta misma situación si se sustituye en la condición inicial el punto (0, 0) por un punto de la forma (x_0, 0). Para cada uno de estos puntos el problema de valor inicial correspondiente tiene infinitas soluciones.

Sin embargo, si se considera ahora el problema $\begin{cases} y' = y^{2/3} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ en el que y_0 tiene un valor distinto de 0, este problema tiene una única solución que al llegar al eje x se puede ramificar en distintas soluciones.

La razón por la cual la situación es distinta si en la condición inicial (x_0, y_0)

el valor y_0 es cero o es distinto de cero es la siguiente:

Si y_0 es distinto de cero se puede escoger un rectángulo centrado en (x_0, y_0) de manera que no contenga ningún punto del eje x:

$R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$, con $b = |y_0|/2$.

Se tiene entonces que para todo $(x, y) \in R$

$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| = \left|\frac{2}{3y^{1/3}}\right| \leq \left|\frac{2^{4/3}}{3{y_0}^{1/3}}\right| = K.$$

Como la derivada parcial de f respecto de y está acotada en R, el *corolario 8.3.2* asegura que existe una única solución del problema de Cauchy definida en un intervalo centrado en el punto x_0, $[x_0 - h, x_0 + h]$.

En cambio, si y_0 es igual a cero, cualquier rectángulo R centrado en (x_0, 0) contiene puntos del eje x. Si se toman $(x, 0)$ y $(x, y) \in R$, se tiene que:

$$\frac{|f(x,0) - f(x,y)|}{|y|} = \frac{|y^{2/3}|}{|y|} = \frac{1}{|y|^{1/3}},$$

que no está acotado por ninguna constante en R, pues para puntos muy próximos al eje x este cociente crece indefinidamente. La función f no es pues lipschitziana en R.

Ejemplo 8.3.2: Estudiar si existe solución del problema de valor inicial $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

En el *ejemplo 8.2.3* se ha comprobado que la función $f(x, y) = y^2$ es continua en $\Re^2$ pero no es lipschitziana en $\Re^2$. Sin embargo se puede abordar el problema de manera local, estudiando el comportamiento de la función en un rectángulo centrado en el punto (0, 1).

Sea por ejemplo $R = [-1, 1] \times [0, 2]$, donde $a = b = 1$. Sean (x, y_1) y (x, y_2) dos puntos arbitrarios de R.

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |{y^2}_1 - {y^2}_2| = |y_1 + y_2| \cdot |y_1 - y_2| \leq 4|y_1 - y_2|.$$

Se tiene entonces que f es lipschitziana en el rectángulo R, con constante de Lipschitz $L = 4$. El teorema de existencia y unicidad local asegura que existe una única solución definida en el intervalo I = $[-\alpha, \alpha]$.

Para determinar el valor de α hay que calcular una cota de la función en R. Como $f(x, y) = y^2$ es continua en R, está acotada en R. El máximo valor que toma en R lo alcanza cuando y es igual a 2. Por tanto:

$$M = Sup\{|f(x, y)|: f(x, y) \in R\} = 4.$$

Entonces $\alpha < min(a, \frac{1}{L}, \frac{b}{M}) = min(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$, el problema de Cauchy $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ tiene entonces una única solución válida en el intervalo $[-\alpha, \alpha] \subset [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$.

Ejemplo 8.3.3: Aplicar el método de las iterantes de Picard para encontrar la única solución del problema de Cauchy del *ejemplo 8.3.2*: $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

Las iterantes de Picard asociadas a este problema son las siguientes:

Se define la primera como la condición inicial $\varphi_0(x) = 1$, y a partir de ella se generan las demás:

$$\varphi_1(x) = 1 + \int_0^x 1^2 ds = 1 + x,$$

$$\varphi_2(x) = 1 + \int_0^x (1+s)^2 ds = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3},$$

$$\varphi_3(x) = 1 + \int_0^x (1 + s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3})^2 ds = 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{2x^4}{3} + \frac{x^5}{3} + \frac{x^6}{9} + \frac{x^7}{63},$$

$\vdots$

$$\varphi_n(x) = 1 + \int_0^x (\varphi_{n-1}(s))^2 ds = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

La sucesión de funciones φ_n así construida se aproxima a la sucesión de las sumas parciales de la serie geométrica. Por tanto φ_n converge a la serie geométrica. Como $|x| < 1$, $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x}$, la sucesión $\varphi_n(x)$ converge a la función $y(x) = \frac{1}{1-x}$, que es la única solución del problema de Cauchy propuesto en el intervalo $[-\alpha, \alpha] \subset [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$.

Observación:

Se podría haber empezado por cualquier otra función que verifique la condición inicial del espacio métrico E definido al comienzo de la sección. Así, por ejemplo, se puede tomar $\varphi_0(x) = 1 + x^2$, que verifica la condición inicial, pues $\varphi_0(0) = 1$, y además $|\varphi_0'(x)| = |2x| \leq 2 < 4$.

A partir de ella se generan las demás:

$$\varphi_1(x) = 1 + \int_0^x (1+s^2)^2 ds = 1 + x + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{5},$$

$$\varphi_2(x) = 1 + \int_0^x \left(1+s+\frac{2s^3}{3}+\frac{s^5}{5}\right)^2 ds = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3} + 4\frac{x^5}{15} + \ldots$$

$$\vdots$$

$$\varphi_n(x) = 1 + \int_0^x (\varphi_{n-1}(s))^2 ds = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

La sucesión obtenida tiene también como límite la serie geométrica, y por tanto converge a la misma función que la sucesión anterior.

Si se hubiera tomado $\varphi_0(x) = \frac{1}{1-x}$, entonces:

$$\varphi_1(x) = 1 + \int_0^x \left(\frac{1}{1-s}\right)^2 ds = 1 + \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{1}{1-x},$$

y se obtiene directamente el punto fijo de la transformación.

Ejemplo 8.3.4: Prolongar la solución $y(x) = \frac{1}{1-x}$ del problema de Cauchy obtenida en el *ejemplo 8.3.3*: $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

La función $y(x) = \frac{1}{1-x}$ es la única solución del problema de Cauchy $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ en el intervalo $[-\alpha, \alpha] \subset [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$. Se trata ahora de extender la solución a un intervalo mayor. Para ello se observa que en el punto de abscisa

$x = \frac{1}{4}$ la función $y(x) = \frac{1}{1-x}$ sigue siendo solución del problema de valor inicial, y alcanza el valor $y(\frac{1}{4}) = \frac{4}{3}$.

Se considera el problema de valor inicial $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(\frac{1}{4}) = \frac{4}{3} \end{cases}$ y se repite el proceso seguido en el ej*emplo 8.3.2*.

Se puede tomar por ejemplo el rectángulo $R^* = [-\frac{3}{4}, \frac{5}{4}] \times [\frac{1}{3}, \frac{7}{3}]$, centrado en el punto $(\frac{1}{4}, \frac{4}{3})$ con $a = b = 1$.

Entonces $M = sup\ \{|f(x, y)|: f(x, y) \in R^*\} = \frac{49}{9}$, y la constante de Lipschitz en R^* es $L = sup\ \{|y_1 + y_2|: (x, y_1), (x, y_2) \in R^*\} = \frac{14}{3}$.

Ahora debe ser $\alpha^* < \frac{1}{L} = \frac{3}{14}$ y $\alpha^* \leq min(a, \frac{1}{L}, \frac{b}{M}) = min(1, \frac{9}{49}, \frac{3}{14}) = \frac{9}{49} < \frac{3}{14}$. Por lo tanto $\alpha^* = \frac{9}{49}$, y se puede entonces prolongar la solución a la derecha del intervalo inicial al intervalo $I^* = [\frac{1}{4} - \frac{9}{49}, \frac{1}{4} + \frac{9}{49}] = [\frac{13}{196}, \frac{85}{196}]$, con lo cual se tiene la solución extendida al intervalo:

$$I \cup I^* = [-\alpha, \frac{85}{196}] \subset [-\frac{1}{4}, \frac{85}{196}].$$

Si se repite el proceso en cada uno de los extremos del intervalo se puede seguir prolongando la solución, tanto a la derecha como a la izquierda del intervalo.

En este caso como la solución obtenida es la función $y(x) = \frac{1}{1-x}$, que tiene una asíntota en $x = 1$, la solución se podrá prolongar por la derecha hasta llegar a $x = 1$. Por la izquierda en cambio se puede prolongar hasta $-\infty$.

El problema de valor inicial propuesto tiene entonces una solución maximal definida en el intervalo $(-\infty, 1)$

Ejemplo 8.3.5: Estudiar la existencia y unicidad de la solución del problema de valor inicial $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ siendo $f(x,y) = \begin{cases} y, & x \geq 0 \\ \frac{2y}{x}, & x < 0 \end{cases}$.

La función $f(x,y)$ así definida no es continua en los puntos de $\mathfrak{R}^2$ situados en el eje y, y en particular en el punto correspondiente a la condición inicial, (0, 1). Por tanto, los teoremas de existencia y unicidad no pueden asegurar la existencia de solución en ningún intervalo centrado en $x_0 = 0$.

Estudiando directamente el problema se puede comprobar que no existe solución.

En efecto, en $x \geq 0$, la solución general de $y' = y$ es $y = Ce^x$. La solución que pasa por el punto (0, 1) es la que resulta de tomar $C = 1$, es decir, $y(x) = e^x$.

Si se estudia ahora lo que sucede para valores de $x < 0$, $y' = \frac{2y}{x}$ es una ecuación diferencial de variables separables, que tiene como solución general $y = Cx^2$. Estas soluciones son tales que al tomar valores próximos a cero tienden a cero. Se tiene entonces que ninguna de las soluciones obtenidas en la región $x < 0$ pasa por el punto (0, 1). Se recuerda que la solución de una ecuación diferencial debe ser siempre una función continua y derivable.

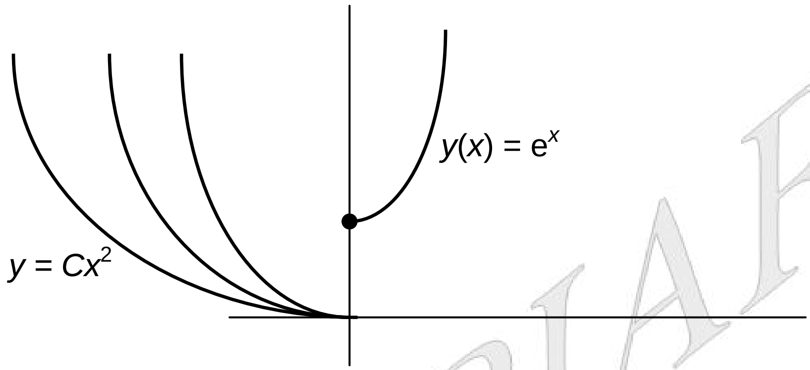

Figura 8.4: Gráfica de las soluciones del ejemplo 8.3.5.

Ejemplo 8.3.6: Estudiar la existencia y unicidad del problema $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$

siendo la función $f(x,y)$ la misma que en el *ejemplo 8.3.5*:

$$f(x,y) = \begin{cases} y, & x \geq 0 \\ \dfrac{2y}{x}, & x < 0 \end{cases}.$$

El problema propuesto es similar al anterior, pero la condición inicial es diferente. Los teoremas de existencia y unicidad por tanto tampoco pueden asegurar aquí la existencia de solución en ningún intervalo centrado en $x_0 = 0$.

Estudiando directamente el problema con la condición inicial (0, 0) se tiene que para valores de $x < 0$, la solución general de la ecuación $y' = \dfrac{2y}{x}$ es $y = Cx^2$, y todas estas soluciones pasan por el punto (0, 0).

En $x \geq 0$, la solución general de $y' = y$ es $y = Ce^x$. La solución que pasa por el punto (0, 0) es la que resulta de tomar $C = 0$, es decir, $y(x) = 0$. Existen entonces en este caso infinitas soluciones del problema propuesto, definidas como:

$$y(x)=\begin{cases}0, x\geq 0\\ Ce^{x}, x<0.\end{cases}$$

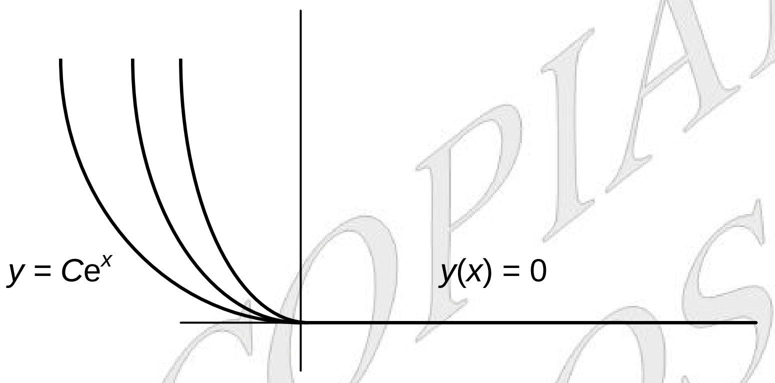

Figura 8.5: Gráfica de las soluciones del *ejemplo* 8.3.6.

Este ejemplo demuestra que la continuidad de la función $f(x,y)$ es una condición suficiente, pero no necesaria, para la existencia de solución.

Ejemplo 8.3.7: Estudiar la existencia y unicidad de las soluciones del problema de valor inicial $\begin{cases}y'=2xy^2\\ y(0)=y_0\end{cases}$ para $y_0 = 0, 1, -1$. Calcular en cada caso las correspondientes soluciones de manera explícita y encontrar los intervalos máximos en los que están definidas.

La función $f(x, y) = 2x\cdot y^2$ es continua en $\mathfrak{R}^2$ y su derivada parcial respecto de la variable y es la función $\partial f(x, y)/\partial y = 4x\cdot y$, que también es continua en $\mathfrak{R}^2$. Por tanto, ambas están acotadas en cualquier rectángulo de $\mathfrak{R}^2$. El *teorema 8.3.2* asegura entonces que existe una única solución definida en algún intervalo centrado en el origen.

La ecuación diferencial $y' = 2x \cdot y^2$ es una ecuación de variables separables. Se puede entonces calcular fácilmente la solución general:

$$y = \frac{-1}{x^2 + C}.$$

Se tiene además que la función $y(x) = 0$ para todo $x \in \mathfrak{R}$ es también solución de la ecuación diferencial.

La solución que pasa por el punto (0, 0) es la función $y(x) = 0$ para todo $x \in \mathfrak{R}$, que es por tanto prolongable a toda la recta real.

La solución que pasa por el punto (0, 1) es la función $y = \frac{1}{1 - x^2}$, que es prolongable al intervalo (–1, 1).

Por último, la solución que pasa por el punto (0, –1) es la función $y = \frac{-1}{1 + x^2}$, definida para todo $x \in \mathfrak{R}$, y es por tanto prolongable a toda la recta real.

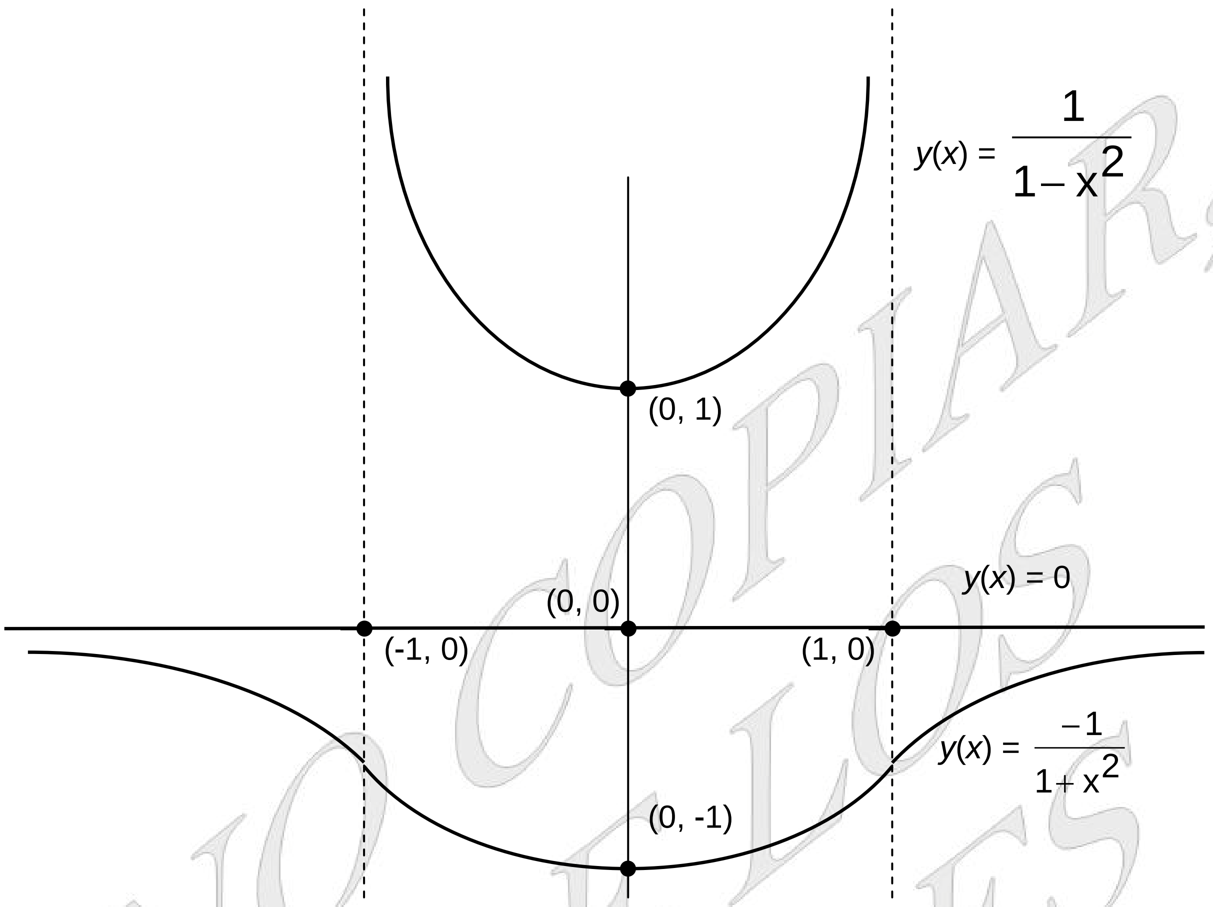

Figura 8.6: Gráfica de las soluciones del *ejemplo* 8.3.7.

Ejercicios

8.9. Estudiar la existencia y unicidad de solución del problema de valor inicial :

$$\begin{cases} y'_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ y'_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \\ \ldots \\ y'_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{cases} \quad \text{donde } a_{ij} \in \Re,$$

$$y_1(0) = a_1;\ y_2(0) = a_2;\ \dots\ y_n(0) = a_n.$$

8.10. Estudiar si existe solución, y si es única, del problema de valor inicial $\begin{cases} y' = y^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ en el rectángulo R = [–1. 1] × [0, 2]. Determinar el intervalo de existencia y unicidad local que asegura el teorema.

8.11. Aplicar el método de las iterantes de Picard para encontrar la única solución del problema de valor inicial $\begin{cases} y' = y^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

8.12. Prolongar la solución del problema de Cauchy obtenida en el ejercicio anterior. ¿Tiene una solución maximal?

8.13. Estudiar la existencia y unicidad de solución del problema de valor inicial $\begin{cases} y' = \sqrt{y} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, así como el máximo intervalo en el que están definidas las soluciones, siendo

a) $(x_0, y_0) = (0, 0)$

b) $(x_0, y_0) = (0, 1)$

c) $(x_0, y_0) = (1, 0)$

8.14. Estudiar la existencia y unicidad de solución del problema de valor inicial $\begin{cases} y' = 3xy^{1/3} \\ y(2) = 1 \end{cases}$. Calcular explícitamente la solución y obtener el intervalo máximo en el que está definida.

8.4. EJERCICIOS

8.15. Demostrar que el problema de Cauchy $\begin{cases} y' = y^{1/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ tiene solución, pero no es única.

8.16. Demostrar que el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = 2(1+3x^2)y^{1/2} \\ y(1) = 4. \end{cases}$$

tiene como única solución la función $y(x) = (x + x^3)^2$ definida en el intervalo $(0, \infty)$. Estudiar si se puede prolongar la solución para valores $x \leq 0$.

8.17. Estudiar la existencia y unicidad de solución del problema de valor inicial $\begin{cases} y' = 2(1+3x^2)y^{1/2} \\ y(1) = 0. \end{cases}$.

8.18. Obtener para cada valor de (x_0, y_0) las soluciones del problema de valor inicial $\begin{cases} y' = -\dfrac{x}{y} \\ y(x_0) = y_0 \neq 0 \end{cases}$. Esbozar gráficamente las soluciones y estudiar para cada una de ellas el intervalo máximo al que se pueden prolongar.

8.19. Estudiar para los distintos valores de x_0, y_0, la existencia y unicidad de solución de los problemas de valor inicial, así como el máximo intervalo en el que están definidas las soluciones.

a) $\begin{cases} y' = 6x^2y^{1/2} \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$

b) $\begin{cases} y' = \sqrt{|y|} \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} y' = \sqrt{y^2 - 9} \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$, $|y_0| \geq 3$.

8.20. Demostrar que la función $f(x,y) = \begin{cases} 0, y = 0 \\ y^{2/3} sen \frac{1}{y}, y \neq 0 \end{cases}$ no es localmente lipschitziana en ningún rectángulo que contenga al punto (0, 0). Demostrar que sin embargo, el problema de valor inicial $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(0) = 0. \end{cases}$ tiene una única solución.

8.21. Estudiar la existencia y unicidad de solución de los siguientes problemas de valor inicial. Calcular explícitamente las soluciones y obtener el intervalo máximo en el que están definidas.

a) $\begin{cases} y' = 6xy^{2/3} \\ y(2) = 27. \end{cases}$

b) $\begin{cases} y' = x^{1/2}y \\ y(1) = e^{-2/3}. \end{cases}$

8.22. Sea $f(x,y) = \begin{cases} y \log \frac{1}{y} & \text{si} \quad y \in (0,\infty) \\ 0 & \text{si} \quad y = 0 \end{cases}$, $x \in [0, 1]$

a) Demostrar que *f* es continua pero no es localmente lipschitziana respecto de la variable *y*.

b) Demostrar que el problema $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(0) = c \end{cases}$ tiene una única solución, para cualquier valor de $c \in \Re$.