CAPÍTULO 7

Ecuaciones diferenciales en el mundo físico. Integración elemental

Las ecuaciones diferenciales ordinarias constituyen el objetivo natural del análisis matemático y son una disciplina fundamental para analizar, desde la óptica de las Matemáticas, fenómenos físicos, químicos, biológicos, económicos o de ingeniería. El estudio de problemas relacionados con las ecuaciones diferenciales ha motivado la creación, y posterior desarrollo, de partes muy significativas del Análisis Matemático.

La obtención de la ecuación de la recta tangente a una curva determinada, fue uno de los problemas que se planteaban los matemáticos hasta finales del siglo XVII cuando tuvo lugar el nacimiento del cálculo diferencial. A partir de los descubrimientos de Newton y Leibniz, el problema de hallar la ecuación de la recta tangente a cualquier curva pasó a ser un problema resuelto, ya que se contaba con una poderosa herramienta para calcularla. Sin embargo surgió también el problema inverso que resultó ser mucho más difícil de resolver. Se trataba de calcular la curva, conocidas las ecuaciones de las rectas tangentes en cada uno de sus puntos, es decir, lo que en la actualidad se conoce como la resolución o integración de una ecuación diferencial de primer orden. Este problema se generalizó al resolver una ecuación diferencial de orden *n*.

Los primeros métodos de resolución, tales como la separación de variables o los factores integrantes, surgieron antes de finales del siglo XVII.

Durante el siglo XVIII se desarrollaron otros métodos más sistemáticos, pero pronto fue evidente que eran pocas las ecuaciones que podían resolverse mediante estas reglas. Los matemáticos se dieron cuenta de que era inútil intentar descubrir nuevos procedimientos para resolver todas las ecuaciones diferenciales y sin embargo sí parecía fructífero investigar si una ecuación diferencial concreta tenía solución, determinar si era única y analizar algunas de sus propiedades.

Este cambio de perspectiva coincidió con la época del rigor, que comenzó a partir del siglo XIX con los trabajos de Cauchy. Por otra parte se desarrollaron métodos numéricos que permiten calcular, con la exactitud deseada, la solución numérica de una ecuación diferencial de primer orden, con una condición inicial fijada, siempre que verifique unas determinadas condiciones de regularidad, y estos métodos se pueden aplicar a problemas concretos, sin que importe si es o no posible resolver la ecuación diferencial en términos de funciones elementales.

Pasados dos siglos resulta evidente que no se pueden obtener resultados muy generales, en lo que se refiere a determinar las soluciones de una ecuación diferencial, excepto para unos pocos tipos muy concretos entre los que están las ecuaciones diferenciales lineales. Esto ha motivado que los métodos numéricos sigan siendo un elemento indispensable para resolver problemas técnicos.

La finalidad básica de las ecuaciones diferenciales es analizar el proceso de cambio en el mundo físico. En el estudio de los fenómenos naturales aparecen las variables relacionadas con los índices de cambio mediante las leyes generales de la naturaleza que rigen estos fenómenos. Cuando estas relaciones se expresan matemáticamente el resultado es, casi siempre, una ecuación diferencial y por esta razón aparecen de forma constante en problemas científicos y técnicos.

7.1. NATURALEZA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

7.1.1. Primeras definiciones

Definición 7.1.1:

Una ***ecuación diferencial ordinaria*** es la que establece una relación entre una variable independiente *x*, la función buscada *f(x)* y una o varias derivadas de esta función $f', f''. f''', ..., f^{n)}$, lo que equivale, con $y = f(x)$, a una expresión de la forma $F(x, y, y', y'', ..., y^{n)}) = 0$

Definición 7.1.2:

Cuando la función $f(x_1, x_2, ..., x_m)$, depende de varias variables independientes entonces la ecuación se denomina ***ecuación en derivadas parciales***.

A partir de ahora se denominará simplemente ecuaciones diferenciales a las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Definición 7.1.2:

Se denomina ***orden*** de una ecuación diferencial al orden de la derivada superior que interviene en la expresión.

Definición 7.1.3:

Una ecuación diferencial de orden *n* se dice ***lineal*** si es de orden uno respecto a la función *y,* y a todas sus derivadas.

Toda ecuación diferencial lineal $F(x, y, y', y'', ..., y^{n)}) = 0$ se puede expresar de la forma $p_0y^{n)} + p_1y^{n-1)} + ... + p_{n-1}y' + p_ny = g(x)$, o bien como:

$$y^{n)} + p_1\, y^{n-1)} + ... + p_{n-1}\, y' + p_ny = g(x),$$

ya que si es de orden n se sabe que $p_0 \neq 0$.

En general p_0, p_1, ..., p_n son funciones definidas en un intervalo de la recta real. Cuando estas funciones son constantes se dice que la ecuación diferencial lineal tiene coeficientes constantes.

Si el término $g(x) = 0$ la ecuación diferencial lineal se denomina ***homogénea***. En caso contrario, es decir, si $g(x) \neq 0$, se llama **no homogénea** o **completa**.

7.1.2. Soluciones

Definición 7.1.5:

Una ***solución*** de una ecuación diferencial es una función que sustituida en la ecuación la convierte en una identidad.

Si una solución de una ecuación diferencial es una función explícita, se dice que es una ***solución explícita***. Análogamente si la función solución está dada en forma implícita se dice que es una ***solución implícita***.

Definición 7.1.6:

La ***solución general*** de la ecuación diferencial de orden n:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{n)}) = 0$$

es una función $\varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ que depende de n constantes C_1, C_2, ..., C_n de modo que:

a) La función φ satisface la ecuación diferencial para todos los valores de las constantes C_1, C_2, ..., C_n.

b) Suponiendo que existen condiciones iniciales:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ y^{n)}(x_0) = y^{n)}_0 \end{cases}$$

Se pueden elegir las constantes C_1, C_2, ..., C_n para que la función:

$$\varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$$

satisfaga estas condiciones, suponiendo que x_0, y_0, y'_0,....., $y^{n)}_0$ pertenecen al dominio de existencia de la solución.

Una relación $\phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$ que define la solución general de forma implícita se denomina ***integral general*** de la ecuación diferencial.

Definición 7.1.7:

Una ***solución particular*** de una ecuación diferencial es la que se obtiene de la solución general para valores concretos de las constantes C_1, C_2, ..., C_n.

Definición 7.1.8:

Una ***curva integral*** es la gráfica de una solución particular de una ecuación diferencial.

Definición 7.1.9:

Una ***solución singular*** es una función que satisface la ecuación diferencial y que sin embargo no se obtiene de la solución general para ningún valor de las constantes.

La envolvente del haz de curvas integrales determinado por las gráficas de las soluciones particulares es una solución singular.

Definición 7.1.10:

Resolver o ***integrar*** una ecuación diferencial de orden n supone calcular la solución general, si no se han dado condiciones iniciales y cuando éstas existen hallar la solución particular que las satisfaga.

La más sencilla de las ecuaciones diferenciales es la ecuación diferencial de primer orden $\frac{dy}{dx} = g(x)$, siendo $y = \varphi(x)$ la función que se quiere calcular. Esta ecuación se resuelve fácilmente, integrando la función $g(x)$, como $\varphi(x) = \int g(x)dx + C$, siempre que la integral indefinida tenga solución, es decir, pueda expresarse mediante funciones utilizando los métodos de cálculo integral.

7.1.3. Campos de direcciones. Curvas integrales. Isoclinas

Sea $F(x, y, y') = 0$ una ecuación diferencial de primer orden que se puede expresar de la forma $y' = f(x, y)$. Esta función asocia a cada punto del plano (x, y) donde está definida la función $f(x, y)$ el valor de y', que es la pendiente o coeficiente angular de la tangente a la curva integral en ese punto. Por lo tanto la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ determina un ***campo de direcciones***.

El campo de direcciones definido por la terna (x, y, y') se representa como un conjunto de segmentos; cada uno de ellos pasa por el punto (x, y) y tiene como pendiente y'.

Resolver una ecuación diferencial se puede interpretar entonces como calcular una curva cuya tangente en cada punto tenga la misma dirección que el campo de direcciones en ese punto. Para facilitar este cálculo se introducen las isoclinas.

Definición 7.1.11:

Se denomina ***isoclina*** al lugar geométrico de los puntos del plano en los que las tangentes a las curvas integrales tienen la misma dirección.

La familia de isoclinas de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ está determinada por la ecuación $f(x, y) = k$, siendo k un parámetro.

Dibujando la familia de isoclinas para valores de k próximos entre sí, es posible trazar de forma aproximada las curvas integrales de la ecuación diferencial.

La isoclina $f(x, y) = 0$ informa de donde pueden estar situados los puntos máximos y mínimos de las curvas integrales.

También se puede calcular el lugar geométrico de los puntos de inflexión, calculando y'' e igualando *a* 0: $y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y'$. Por lo tanto, los puntos de inflexión, si existen, estarán situados en la curva definida por $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot f(x,y) = 0$.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 7.1.1: La ecuación diferencial $y'' - y' - 6y = 0$ se dice que es de orden 2 o de segundo orden y la ecuación $y' + x \cdot y = x^2$ es una ecuación diferencial de primer orden. Ambas son lineales; $y'' - y' - 6y = 0$ es una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes y la ecuación $y' + x \cdot y = x^2$ es una ecuación diferencial lineal no homogénea con coeficientes no constantes.

Ejemplo 7.1.2: En la ecuación diferencial $y'' - y' - 6y = 0$ la función $y = e^{3x}$ es una solución, ya que $y' = 3e^{3x}$, $y'' = 9e^{3x}$ y al sustituir se verifica que $9e^{3x} - 3e^{3x} - 6e^{3x} = 0$.

La función $y = e^{-2x}$ es también una solución ya que $y' = -2e^{-2x}$, $y'' = 4e^{-2x}$ y al sustituir se verifica que $4e^{-2x} + 2e^{-2x} - 6e^{-2x} = 0$. Además si C y C' son números reales se comprueba que la función $y = C\ e^{3x} + C'\ e^{-2x}$ también es solución de la ecuación.

Ejemplo 7.1.3: La función $x{\cdot}y = log(y) + C$ es una solución implícita de la ecuación diferencial $y'{\cdot}(1 - x{\cdot}y) = y^2$, ya que derivando la función se obtiene que $x{\cdot}y' + y = (y' / y)$ y por tanto $y' = -y/(x - 1/y) = y^2/(1 - x{\cdot}y)$.

Ejemplo 7.1.4: La función $y = sen\ x + C$ es la solución general en la ecuación diferencial $y' = cos\ x$. Si además se añade la condición inicial $y(0) = 1$, la función $y = sen\ x + 1$ es una solución particular y su gráfica, una curva integral.

Ejemplo 7.1.5: La ecuación diferencial $y^2{\cdot}(1 + y'^{\,2}) = 4$ tiene por solución general $(x + C)^2 + y^2 = 4$ que gráficamente es una familia de circunferencias con centro en el eje de abscisas y radio 2.

La solución particular que pasa por el punto (0, 2) es la que resulta de sustituir C por 0 en la ecuación general, cuya gráfica, o curva integral, es la circunferencia de radio 2 y centro el origen de coordenadas.

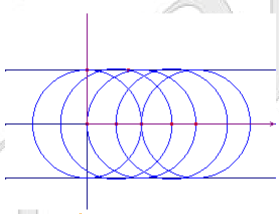

Figura 7.1: Solución general y solución singular.

La envolvente de la familia de curvas integrales está formada por las rectas $y = 2$ e $y = -2$. Estas funciones verifican la ecuación diferencial: $y' = 0 \Rightarrow y^2 = 4$. Sin embargo no se obtienen de la solución general por lo que son soluciones singulares.

Ejemplo 7.1.6: Estudiar las isoclinas de la ecuación diferencial $y' = x + 1$.

La familia de isoclinas está determinada por la ecuación $x + 1 = K$ que representa una familia de rectas paralelas al eje de ordenadas; $K = 0$ se verifica para $x = -1$. En esta recta es donde pueden estar situados los máximos y mínimos de las curvas integrales.

También se conoce que para $K = 1$ la isoclina es el eje de ordenadas y para $K = -1$, la recta $x = -2$. Por otra parte $y'' = 0$ no tiene solución. Por todo ello la integral general de la ecuación parece de manera aproximada que está formada por parábolas que tienen su vértice en la recta $x = -1$, y son paralelas entre sí, es decir, son de la forma:

$$y - C = m\cdot(x + 1)^2, \text{ donde } m = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 7.1.7: Buscar la integral de la ecuación diferencial $y' = x - y$ trazando las isoclinas.

La familia de isoclinas está definida por la ecuación: $x - y = k \Rightarrow y = x - k$, que es un conjunto de rectas paralelas de pendiente 1. La recta $y = x$, que se obtiene para $k = 0$, divide al plano en dos partes, en cada una de las cuales la derivada tiene el mismo signo. Si $k = -1/2$ se tiene la recta $y = x + 1/2$ y cuando $k = ½$, la recta $y = x - 1/2$, luego las curvas integrales al cortar a la recta $y = x$ pasan de decreciente a creciente, por lo que en esta recta están sus puntos mínimos.

Los puntos de inflexión, si existen, estarán situados en la recta $y = x - 1$, que es la isoclina que se obtiene para $k = 1$. Como también es una curva integral, por ser solución de la ecuación diferencial, no la cortan las otras curvas integrales, y por tanto éstas no tienen puntos de inflexión. Además $y = x - 1$ divide al plano en dos partes. Las curvas integrales que están por encima de ella son cóncavas hacia arriba, ya que $y'' > 0$ y tienen un punto mínimo en la recta $y = x$. Por otra parte las curvas integrales situadas por debajo de la recta

$y = x - 1$ no tienen punto mínimo y son cóncavas hacia abajo.

Ejercicios

7.1. Comprobar que las funciones dadas son soluciones de las ecuaciones diferenciales indicadas:

a) $y = 2 + \sqrt{1+x^2}$ de la ecuación diferencial: $(-1 - x^2)y' + x\cdot y = 2x$.

b) $y = x\cdot\sqrt{1-x^2}$ de la ecuación diferencial $y\cdot y' = x - 2x^3$.

c) $y = e^{arcsenx}$ de la ecuación diferencial $x\cdot y' = y\cdot tg(ln\ y)$.

7.2. Verificar que las funciones dadas son soluciones generales de las ecuaciones diferenciales indicadas:

a) $y = ln\ (C + e^x)$ de la ecuación diferencial $y' = e^{x-y}$.

b) $y = \sqrt{x^2 - Cx}$ de la ecuación diferencial $(x^2 + y^2)\cdot dx - 2x\cdot y\cdot dy = 0$.

c) $y = x\cdot(C - ln\ |x|)$ de la ecuación diferencial $(x - y)dx + x\ dy = 0$.

7.3. Comprobar si las funciones dadas son soluciones de las ecuaciones diferenciales indicadas:

a) $e^{-y} - Cx = 1$ de la ecuación diferencial $x\cdot y' + 1 = e^y$.

b) $y^2 + 2Cx = C^2$ de la ecuación diferencial $y\cdot(y')^2 + 2\ x\cdot y' - y = 0$.

c) $x = y\cdot\int_0^x sen(t^2)dt$ de la ecuación diferencial $y = x\cdot y' + y^2\cdot sen\ x^2$.

7.4. Dibujar de forma aproximada las curvas integrales de las siguientes ecuaciones diferenciales utilizando el método de las isoclinas:

a) $y' = 2x - y$.

b) $y' = y - x^2 + 2x - 2$.

c) $y'\cdot(x - 1) = y + 1$.

7.2. LAS ECUACIONES DIFERENCIALES COMO MODELOS MATEMÁTICOS

7.2.1. Crecimiento, desintegración y reacciones químicas

Una reacción química se denomina reacción de primer orden si en ella una molécula se descompone en otras espontáneamente, y el número de moléculas en que se descompone en una unidad de tiempo es proporcional al número de moléculas existentes. Si se considera una sustancia cuya masa se descompone en función del tiempo según una función $m = m(t)$, la velocidad de descomposición viene dada por la derivada de $m(t)$ respecto de t.

Si se supone que esta velocidad es directamente proporcional a la masa se tiene que: $\frac{dm}{dt} = -k \cdot m$, (siendo $k > 0$ el coeficiente de proporcionalidad). Es una ecuación diferencial de primer orden y al resolverla se obtiene la función $m(t)$.

La solución general de esta ecuación viene dada por: $\ln m = -kt + \ln C$, o bien, $m(t) = C\cdot e^{-kt}$.

Para determinar la constante C se supone que se conoce la masa en el instante inicial $t = 0$ y que tiene un valor m_0, de lo que resulta que $C = m_0$ y por lo tanto $m(t) = m_0\cdot e^{-kt}$.

La constante k se denomina constante de rapidez ya que su valor indica una medida de la velocidad a la que se realiza la reacción.

Existen pocas reacciones químicas de primer orden. La más importante de ellas es la desintegración radiactiva.

La función $m(t) = m_0 \cdot e^{-kt}$ permite determinar el valor de la constante k a partir de datos recogidos experimentalmente. Así, si se sabe que de una sustancia se ha desintegrado el r % de su masa inicial en un tiempo t_0, al sustituir estos datos en la ecuación se tiene que: $\left(1-\frac{r}{100}\right)m_0 = m_0 \cdot e^{-kt_0}$, y despejando k se obtiene que: $k = \frac{-1}{t_0} \cdot ln\left(1-\frac{r}{100}\right)$.

Es usual expresar la descomposición de un elemento radiactivo en función de su vida media, es decir, el tiempo necesario para que una cantidad dada del elemento se reduzca a la mitad. Llamando T a la vida media de un determinado elemento y sustituyendo r por 50 en la ecuación anterior se tiene que $T \cdot k = ln2$, lo que permite calcular T a partir del valor de k.

El conocimiento de la vida media de los elementos radiactivos que hay en la naturaleza se utiliza para asignar fechas a acontecimientos que ocurrieron hace mucho tiempo. Los isótopos de uranio y de plomo permitieron determinar la fecha aproximada de sucesos que habían ocurrido hace varios miles de millones de años; paralelamente, el descubrimiento de un isótopo radiactivo del carbono con una vida media de 5 600 años ha permitido determinar la fecha de otros eventos más recientes y ha sido un instrumento indispensable en Geología y Arqueología.

7.2.2. Cuerpos en caída libre y con resistencia

Se supone ahora que desde una cierta altura se deja caer un cuerpo de masa m, sobre el que actúa, además de la fuerza de gravedad, la resistencia del aire, que es proporcional a su velocidad, y se quiere calcular la velocidad de caída.

Sea $v = v(t)$ la velocidad que se quiere determinar, $\frac{dv}{dt}$ su aceleración y k el coeficiente de proporcionalidad tal que la fuerza de resistencia del aire $F_r = k \cdot v$.

Por la segunda ley de Newton se sabe que $m \cdot \frac{dv}{dt} = F$, siendo F la fuerza que actúa sobre el cuerpo en la dirección del movimiento. Esta fuerza es la resultante de dos fuerzas, la de gravedad y la de resistencia del aire. Por lo tanto se obtiene $m \cdot \frac{dv}{dt} = mg - kv$, que es una ecuación diferencial lineal de primer orden no homogénea que relaciona una función desconocida v y su derivada. Resolver esta ecuación significa encontrar una función $v = v(t)$ que la satisfaga.

Se puede comprobar que la función $v(t) = C \cdot e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$ verifica la ecuación para todo valor de la constante C.

Para saber cuál de estas funciones es la buscada es preciso imponer una condición más como puede ser, por ejemplo, la velocidad del cuerpo en el momento inicial $t = 0$, que se denomina v_0.

Así, sustituyendo $t = 0$ y $v = v_0$ se obtiene que $v_0 = C + \frac{mg}{k}$, y por lo tanto $C = v_0 - \frac{mg}{k}$. Así se determina la constante C, siendo la función $v(t)$:

$$v(t) = \left(v_0 - \frac{mg}{k}\right) \cdot e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}.$$

Se observa que si la resistencia del aire no existe, es decir $k = 0$, la ecuación diferencial es $m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot g$. La solución general es ahora $v(t) = g \cdot t + C$, y si se impone la condición inicial $t = 0$ y $v = v_0$, la solución particular obtenida es: $v(t) = v_0 + g \cdot t$.

Si $y = y(t)$ es la función que indica la distancia del cuerpo a partir de una altura dada, se tiene que $v(t) = \frac{dy}{dt}$; al integrar esta ecuación:

$$y(t) = v_0 t + \frac{1}{2} g \cdot t^2 + C_2,$$

donde C_2 representa el valor de $y(t)$ en el instante $t = 0$, al que se puede llamar y_0 o posición inicial. Por tanto:

$$y(t) = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} g \cdot t^2 + y_0$$

Cuando el cuerpo parte del reposo en la posición inicial $y_0 = 0$ lo que implica que $v_0 = 0$, entonces:

$$\begin{cases} y(t) = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \\ v(t) = g \cdot t. \end{cases}$$

Eliminando t entre estas dos ecuaciones se obtiene la expresión:

$$v = \sqrt{2g \cdot y},$$

que relaciona la velocidad alcanzada con la distancia recorrida en la caída.

7.2.3. Movimiento pendular

Se supone un punto material de masa m suspendido de un punto fijo, que se mueve por la acción de la gravedad a lo largo de un arco de circunferencia que está en un plano vertical. Despreciando el rozamiento y la resistencia del aire se pretende calcular la ecuación del movimiento en función del tiempo.

Se consideran unos ejes de coordenadas cuyo origen está en el punto inferior de la circunferencia y el eje de abscisas es tangente en este punto. Sea

L la longitud del radio de la circunferencia, *t* el tiempo y *s* la longitud del arco a partir del origen hasta un punto *P*, de forma que si *P* está a la derecha del origen es $s > 0$ y si está a la izquierda, $s < 0$.

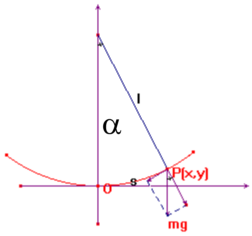

Figura 7.2: Movimiento pendular

Se pretende determinar la función $s = s(t)$.

La fuerza de gravedad $F = m \cdot g$ se descompone en dos: la componente normal, que se elimina por la reacción de la curva, y la tangencial que produce el movimiento $F_t = - m \cdot g \cdot sen\ \alpha$, siendo α el ángulo que forma la dirección de la componente normal con la de la fuerza de gravedad.

Así, la función del movimiento $s = s(t)$ verifica la siguiente ecuación:

$$m \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = - m \cdot g \cdot sen\ \alpha,$$

siendo α igual a s/L:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = - g \cdot sen\ \frac{s}{L},$$

Al integrar esta ecuación por métodos que se estudiarán en el *capítulo 9*, se comprobará en el *ejemplo 9.3.3* que se obtiene:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2gL \cdot cos\frac{s}{L} + C\ .$$

Para determinar la constante *C* se impone la siguiente condición: Si s_0 es la longitud máxima que describe el punto *P*, en ese momento la velocidad es cero, es decir $\left.\frac{ds}{dt}\right|_{s=s_0}$ = 0, sustituyendo en la ecuación anterior se tiene que C = $-2gL \cdot cos\frac{s_0}{L}$, y la ecuación queda de la forma:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2g \cdot L \cdot cos\frac{s}{L} - 2g \cdot L \cdot cos\frac{s_0}{L}.$$

Utilizando las fórmulas trigonométricas de transformación de sumas en productos se obtiene que:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 4gL(sen(\frac{s+s_0}{2L}).sen(\frac{s_0-s}{2L})).$$

Como esta ecuación no es posible integrarla se supone que el ángulo $\frac{s_0}{L}$ es pequeño y por tanto $\frac{s}{L}$ también lo es. Los ángulos $\frac{s+s_0}{2L}$ y $\frac{s-s_0}{2L}$ no son superiores a $\frac{s_0}{L}$ por lo que en este caso es posible aproximarlos sustituyendo el seno por el arco. De este modo se obtiene:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 4gL\left(\frac{s+s_0}{2L} \cdot \frac{s_0-s}{2L}\right)$$

o bien

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{g}{L}} \cdot \sqrt{{s_0}^2 - s^2}.$$

Integrando esta ecuación se tiene que:

$$arcsen\left(\frac{s}{s_0}\right) = \sqrt{\frac{g}{L}}t + k.$$

Si se supone que para t = 0 entonces s = 0, se obtiene que k = 0 y por lo tanto: $s = s_0 \cdot sen\sqrt{\frac{g}{L}}t$ es una solución aproximada de la ecuación diferencial inicial.

Se observa que el punto *P* se puede considerar como el extremo de un péndulo que efectúa oscilaciones armónicas. Si el periodo *T* es el tiempo necesario para una oscilación completa, entonces para $s = s_0$, se tiene $sen\sqrt{\frac{g}{L}} \cdot \frac{T}{4} = 1$ luego $\sqrt{\frac{g}{L}} \cdot \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}$ y por lo tanto $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, que no depende de la amplitud de la oscilación s_0, pero sólo es válida para valores pequeños del ángulo α. El péndulo volverá a estudiarse, con un punto de vista diferente, en el *capítulo 12, apartado 12.4.2*, donde se estudia como un sistema dinámico.

7.2.4. La cicloide. La curva braquistócrona

Se unen dos puntos *A* y *B* colocados a distinta altura por un hilo por el que se deja deslizar una bola esférica, supuestamente sin rozamiento. El problema consiste en determinar la forma del hilo para que el tiempo que tarda la bola en ir de *A* hasta *B*, sin otra fuerza que la gravedad, sea el mínimo.

Se conoce que la luz va de un punto a otro siguiendo el camino que requiere el menor tiempo; esta ley se conoce como *Principio del menor tiempo de Fermat*, y por esta razón se estudia lo que ocurre cuando un rayo de luz atraviesa medios de distinta densidad.

Si se supone que el rayo de luz pasa de un punto *A* hasta un punto *O* con una velocidad v_1 y después pasa a un medio menos denso en el que va de O a *B* con una velocidad mayor v_2, el tiempo total que invierte en su desplazamiento viene dado por $t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{v_2}$. (En la figura 7.3 están representados los valores de *a*, *b* y *c*).

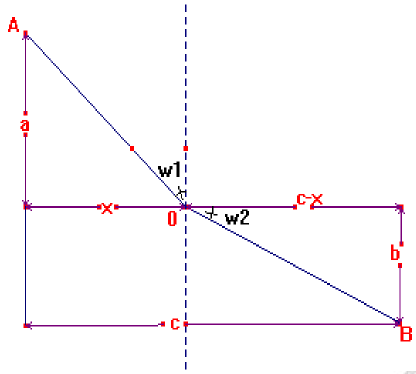

Figura 7.3: Rayo de luz

Sea $w_1 = arctg(x/a)$ y $w_2 = arctg((c - x)/b)$. Como el rayo de luz selecciona su desplazamiento de forma que el tiempo t sea el mínimo, entonces $\frac{dt}{dx} = 0$, por lo que:

$$\frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c - x}{v_2\sqrt{b^2 + (c - x)^2}},$$

o bien

$$\frac{senw_1}{v_1} = \frac{senw_2}{v_2}.$$

Si se supone que el rayo de luz entre A y B pasa por infinitas capas cada vez más delgadas y menos densas de forma que la velocidad del rayo aumenta de forma continua entre A y B, se tiene que la trayectoria para pasar de A a B en el menor tiempo posible debe verificar que $\frac{senw}{v} = K$ (constante).

Llamando $\alpha = \pi/2 - w$ se tiene que:

$$sen\ w = cos\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}}.$$

En el *apartado 7.2.3* se demostró la relación: $v^2 = 2gy$. Combinando estos tres resultados se obtiene que la ecuación de la curva braquistocrona debe satisfacer la ecuación diferencial:

$$y\cdot(1+(y')^2) = C.$$

Sustituyendo y' por $\frac{dy}{dx}$ y considerando a x como función de y se obtiene que:

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{y}{C-y}}.$$

Si se llama $tg\,\beta = \sqrt{\frac{y}{C-y}} \Rightarrow tg^2\,\beta = \frac{y}{C-y} \Rightarrow sec^2\,\beta = \frac{C}{C-y}$ y por tanto:

$y = C{\cdot}sen^2\,\beta \Rightarrow dy = 2C{\cdot}sen\,\beta{\cdot}cos\,\beta{\cdot}d\beta,$

Al sustituir este resultado en $dx = tg\,\beta{\cdot}dy$, se tiene que:

$$dx = 2C{\cdot}sen^2\,\beta{\cdot}d\beta = C{\cdot}(1 - cos\,2\beta){\cdot}d\beta.$$

Al integrar esta ecuación con respecto a β se obtiene:

$$x = (C/2){\cdot}(2\beta - sen\,2\beta) + C'.$$

Para determinar C' se impone la condición de que la curva pase por el origen de coordenadas, es decir, que $x = y = 0$ cuando $\beta = 0$. Se tiene entonces que $C' = 0$ y por lo tanto:

$$x = (C/2){\cdot}(2\beta - sen\,2\beta) \text{ e } y = Csen^2\,\beta = (C/2){\cdot}(1 - cos\,2\beta).$$

Llamando $r = C / 2$ y $\theta = 2\beta$, se obtiene que:

$$\begin{cases} x = r{\cdot}(\theta - sen\,\theta), \\ y = r{\cdot}(1 - cos\,\theta) \end{cases}$$

que son las ecuaciones paramétricas de la cicloide, la curva que describe un punto de una circunferencia de radio r cuando rueda, sin rozamiento, a lo largo

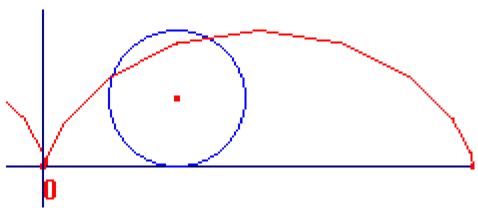

Figura 7.4: Cicloide

del eje de abscisas.

Esta curva tiene propiedades geométricas y físicas muy interesantes: así, por ejemplo, la longitud de un arco de cicloide es cuatro veces el diámetro de la circunferencia que lo genera y el área entre un arco y el eje de abscisas es tres veces el área del círculo generador.

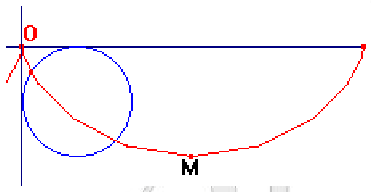

Figura 7.5: La cicloide es tautócrona

En cuánto a las propiedades físicas la más importante es que es una curva tautócrona, lo que significa que considerando el arco de cicloide simétrico con respecto al eje de abscisas de la figura anterior, el tiempo que tarda una bola que se desliza sin rozamiento por la curva desde el centro de coordenadas *O* hasta *M*, punto mínimo de la curva de coordenadas (πr, $-2r$), es el mismo que necesita para llegar hasta ese punto si la soltamos en cualquier punto intermedio de la curva entre *O* y *M*. La demostración de esta propiedad se plantea como un ejercicio (*ejercicio 7.7*).

7.2.5. Circuitos eléctricos simples. Oscilaciones en resortes

Circuitos eléctricos simples

Se considera un circuito eléctrico formado por una fuerza electromotriz *E* que impulsa una carga eléctrica y produce una corriente de intensidad *I* en el circuito. El circuito tiene además una resistencia *R* que se opone a la corriente. Por la ley de Ohm se sabe que $E_R = R \cdot I$. Un inductor de inductancia *L*, que se opone a cualquier cambio en la corriente, tal que $E_L = L \cdot \frac{dI}{dt}$. Y un condensador de capacitancia *C*, que almacena una carga *Q* y se opone a la entrada de una carga adicional $E_C = \frac{1}{C} \cdot Q$.

Aplicando la ley de Kirchhoff, que indica que la suma algebraica de las fuerzas en un circuito cerrado es igual a cero, se obtiene:

$$E - E_R - E_L - E_C = 0,$$

o bien

$$E - R \cdot I - L \cdot \frac{dI}{dt} - \frac{1}{C} \cdot Q = 0,$$

que se puede expresar por:

$$L \cdot \frac{dI}{dt} + R \cdot I + \frac{1}{C} \cdot Q = E.$$

Como la intensidad de la corriente *I* es la rapidez de flujo de la carga, se tiene $I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$.

Sustituyendo esta expresión y considerando *Q* como la función incógnita se tiene:

$$L \cdot \frac{d^2Q(t)}{dt^2} + R \cdot \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C} \cdot Q(t) = E(t),$$

ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes.

Oscilaciones en resortes

Se considera un bloque de masa *m* sujeto al extremo de un resorte, sobre el que un dispositivo amortiguador ejerce una fuerza de resistencia, y además, existe una fuerza externa que actúa sobre la masa del resorte.

Se supone que la fuerza de elasticidad del resorte es proporcional al desplazamiento y la fuerza de amortiguación proporcional a la velocidad del movimiento.

Sea $y(t)$ la función que indica el desplazamiento del bloque en función del tiempo, m la masa del resorte, k la constante de rigidez del resorte, b la constante de amortiguación del medio y $g(t)$ la fuerza externa. Se tiene que la fuerza elástica del resorte $F_E = -k\, y(t)$, siendo $k>0$ y la fuerza de amortiguación $F_A = b\, y'(t)$.

Imponiendo que en el punto de equilibrio el peso del bloque se compense con las otras fuerzas, se obtiene la ecuación diferencial que describe el movimiento de las oscilaciones amortiguadas forzadas:

$$m\cdot y''(t) + b\cdot y'(t) + k\cdot y(t) = g(t),$$

que es una ecuación lineal no homogénea de coeficientes constantes.

Se observa la similitud que existe entre esta ecuación y la obtenida para los circuitos eléctricos. En particular se tienen las siguientes correspondencias:

La masa m se corresponde en el circuito con la inductancia L. La constante b de amortiguación se corresponde con la resistencia R, la constante de rigidez del resorte k, con la inversa de la capacitancia $\frac{1}{C}$, el desplazamiento del resorte $y(t)$ con la carga del condensador $Q(t)$, y la fuerza externa $g(t)$ con la fuerza electromotriz $E(t)$.

Esta semejanza entre los sistemas mecánicos y los eléctricos supone una identificación entre las soluciones de ambos sistemas. Cuando la fuerza electromotriz, en los circuitos eléctricos, o la fuerza externa, en el movimiento oscilatorio, es una función periódica pueden aparecer fenómenos de resonancia que se estudiarán detalladamente después de resolver estas ecuaciones.

7.2.6. Dinámica de poblaciones

Ecuaciones de rapaz y presa de *Lotka-Volterra*

Lotka y *Volterra* propusieron este sistema que modeliza un ecosistema formado por conejos y zorros, con sus interacciones, (o por róbalos y peces rueda, que son comidos por los róbalos, en un lago):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \dfrac{dy}{dt} = -cy + fxy \end{cases}$$

donde las constantes *a, b, c* y *f* son positivas.

Sin presas, (x), las rapaces, (y), por falta de alimento, disminuirían en número. Y sin las rapaces, las que sirven de presa, al no tener enemigos, aumentarían. Este sistema no se puede resolver en términos elementales, pero por procedimientos que se estudian posteriormente en el *capítulo 9*, *apartado 9.3.3*, se obtiene:

$$\frac{(a - b \cdot y)dy}{y} = \frac{-(c - f \cdot x)dx}{x}.$$

Integrando esta ecuación se tiene la solución: $y^a \cdot e^{-by} = kx^{-c} \cdot e^{fx}$.

7.2.7. La catenaria

Un ejemplo de gran importancia histórica es el estudio de la forma que toma un hilo flexible homogéneo suspendido entre sus dos extremos y que cuelga por su propio peso.

Sea $M(0, b)$ el punto más bajo del hilo y $P(x, y)$ un punto cualquiera. La sección MP del hilo está equilibrada por las siguientes fuerzas:

- La tensión T, que actúa a lo largo de la tangente al punto P y forma un ángulo α con el eje de abscisas.

- La tensión *H* en el punto *M* que es paralela al eje de abscisas.
- El peso del hilo, paralelo al eje de ordenadas, y cuyo módulo es $s \cdot p$, siendo *s* la longitud del arco *MP* y *p* el peso específico del hilo.

Al descomponer *T* en sus dos componentes se obtienen las ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{cases} T \cdot \cos \alpha = H \\ T \cdot \operatorname{sen} \alpha = s \cdot p \end{cases}$$

Si se dividen estas igualdades se tiene que: $tg\ \alpha = \frac{s \cdot p}{H}$, y llamando:

$$a = \frac{H}{p} \Rightarrow tg\ \alpha = \frac{s}{a}.$$

Si se supone que la ecuación de la curva es $y = f(x)$ se tiene que $y' = \frac{s}{a}$.

Al derivar respecto de *x* ambos miembros de la igualdad: $y'' = \frac{1}{a} s'$. Teniendo en cuenta que $s' = \sqrt{1+(y')^2}$ se obtiene la ecuación:

$$y'' = \frac{1}{a}\sqrt{1+(y')^2},$$

que es la ecuación diferencial de la catenaria.

En el *capítulo 9, apartado 9.3.1* se estudia con detalle la forma de integrar esta ecuación.

Al integrar esta ecuación y al imponer la condición de que pase por el punto $M(0, b)$ se tiene la solución particular:

$$y = \frac{a}{2} \cdot (e^{x/a} + e^{-x/a}) + b - a.$$

Si la ordenada del punto *M* es *a*, la ecuación se simplifica:

$$y = a \cdot cosh(\frac{x}{a}).$$

7.2.8. Ecuación diferencial de una familia de curvas

Dada una familia de curvas planas $y = \varphi(x, C)$ que dependen de un parámetro C, se puede buscar la ecuación diferencial que las define, es decir, la ecuación diferencial que tiene como solución general a la familia de curvas $y = \varphi(x, C)$. En efecto, al derivar con respecto de x se tiene $y' = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, C)$. Eliminando el parámetro entre las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} y = \varphi(x,C) \\ y' = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,C) \end{array}\right\}$$

se obtiene $F(x, y, y') = 0$, que es la ecuación diferencial buscada ya que expresa una propiedad común de todas las curvas de la familia.

Si la familia viene expresada por una función implícita respecto de y, es decir, está definida por una ecuación de la forma $\phi(x, y, C) = 0$, la ecuación diferencial de la familia $F(x, y, y') = 0$ resulta de eliminar el parámetro C entre las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} \phi(x,y,C) = 0 \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial x} + \dfrac{\partial\phi}{\partial y}y' = 0 \end{array}\right\}$$

En el caso de que la familia de curvas dependa de n parámetros, es decir, esté definida por $\phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$ con C_i parámetros $1 \leq i \leq n$, derivando respecto a x n veces y eliminando los n parámetros entre la ecuación de la familia y las obtenidas, se llega a una expresión de la forma:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{n)}) = 0$$

que es la ecuación diferencial de la familia n–paramétrica dada, de manera que $\phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$ es la solución general de la ecuación diferencial $F(x, y, y', y'', ..., y^{n)}) = 0$.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 7.2.1: Deducir la ley del movimiento rectilíneo de un punto material que se desplaza con una aceleración constante a, si en el instante $t = t_0$ se tiene que el espacio recorrido es y_0 y su velocidad es v_0.

El problema se reduce a resolver la ecuación diferencial de segundo orden $y''(t) = a$, siendo $y(t)$ la función que determina el espacio en función del tiempo y a una constante. Es suficiente integrar dos veces dicha ecuación.

Al integrar una vez se obtiene que: $y'(t) = a \cdot t + C$, y al imponer la condición $v(t_0) = v_0$ se calcula el valor de C: $C = v_0 - a \cdot t_0$. Por lo tanto:

$$y'(t) = a \cdot (t - t_0) + v_0.$$

Se vuelve a integrar dicha ecuación:

$$y(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t - t_0)^2 + v_0 \cdot t + C_1.$$

Al sustituir las condiciones iniciales se obtiene que $C_1 = y_0 - v_0 \cdot t_0$, y por tanto:

$$y(t) = \frac{1}{2} a(t - t_0)^2 + v_0\,(t - t_0) + y_0.$$

Ejemplo 7.2.2: Hallar la ecuación diferencial de la familia de curvas:

$$x^2 - y^2 = C \cdot x.$$

Se deriva esta ecuación con respecto a x y se obtiene $2x - 2y \cdot y' = C$ eliminando C entre estas dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x^2 - y^2 - Cx = 0 \\ 2x - C - 2y \cdot y' = 0 \end{array}\right\}$$

resulta la ecuación diferencial $x^2 + y^2 - 2x \cdot y \cdot y' = 0$ que define la familia de hipérbolas equiláteras del enunciado del problema.

Ejercicios

7.5. Está nevando con regularidad. A las 12 de la mañana sale una máquina quitanieves que durante la primera hora recorre 2 km y durante la segunda 1 km. Si se supone que la cantidad de nieve que quita la máquina es uniforme, de modo que su velocidad de avance es inversamente proporcional a la altura de la nieve, ¿a qué hora comenzó a nevar?

7.6. El diámetro de una bola de naftalina que era inicialmente de 2.5 cm, al cabo de un mes se ha reducido a la mitad. Suponiendo que su evaporación es proporcional a su superficie, ¿cuánto tardará en desaparecer?

7.7. Sea *r* el radio de la circunferencia de la figura, y la curva, la cicloide que se obtiene a partir de dicha circunferencia.

Si una bola se desliza, sin rozamiento, desde el punto *O* hasta el punto *M*.

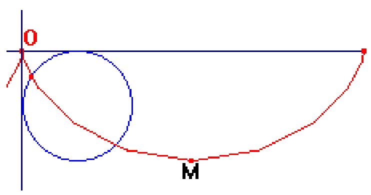

Figura 7.6: Cicloide . Ejercicio 7.7.

a) Demostrar que el tiempo que tarda en llegar la bola desde $O(0, 0)$ al punto $M(\pi r, -2r)$ es $\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$.

b) Comprobar que si P es un punto intermedio de la curva entre O y M el tiempo que tarda la bola en llegar de P a M es también $\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$.

7.8. Calcular las ecuaciones diferenciales de las siguientes familias de curvas.

a) $x^2 - y^2 = C\cdot x$.

b) $y = C\cdot e^{\frac{x}{C}}$.

c) $y = e^x\cdot(C_1 x + C_2)$.

d) $(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = 1$.

7.3. INTEGRACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

La forma general de una ecuación diferencial de primer orden es:

$$F(x, y, y') = 0.$$

Si en esta expresión es posible despejar y' se obtiene:

$$y' = f(x, y).$$

Otra forma de expresar una ecuación diferencial de primer orden es:

$$M(x, y)\cdot dx + N(x, y)\cdot dy = 0.$$

La solución general de una ecuación diferencial es una función:

$$y = \varphi(x, C),$$

que satisface la ecuación diferencial para cualquier valor de C.

7.3.1. Ecuaciones diferenciales con variables separadas

Definición 7.3.1:

Una ecuación diferencial de la forma $g(y)\cdot y' = f(x)$ se denomina ***ecuación diferencial de variables separadas*** ya que se puede expresar como:

$$g(y)\cdot dy = f(x)\cdot dx.$$

Su solución general se obtiene integrando ambos términos:

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + C.$$

Ecuaciones diferenciales reducibles a este tipo

Las ecuaciones diferenciales de la forma:

$$f_1(x)\cdot g_2(y)\cdot dx = f_2(x)\cdot g_1(y)\cdot dy$$

en las que cada miembro de la igualdad se descompone en factores que dependen sólo de x o sólo de y, se reducen fácilmente a ecuaciones de variables separadas. Así se obtiene:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = \frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy,$$

que tiene como solución general

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = \int \frac{g_1(y)}{g_2(y)}dy + C.$$

Al pasar dividiendo a $f_2(x)$ y a $g_2(y)$ se pueden perder soluciones particulares que anulen a estas funciones.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 7.3.1: Resolver la ecuación $4y \cdot y' + x = 0$.

Esta ecuación se puede expresar como $4y \cdot dy = -x \cdot dx$, que tiene por solución general $\frac{4y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \Rightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = C'$, que para $C' > 0$ representa una familia de elipses centradas en el origen de coordenadas.

Ejemplo 7.3.2: Integrar la ecuación diferencial $(1 + e^x) \cdot y \cdot y' = e^x$ y encontrar la solución particular que pasa por el punto (0, 0).

Esta ecuación se puede expresar de la forma: $y \cdot dy = \frac{e^x}{1+e^x} dx$, de donde al integrar se obtiene la solución general:

$$\frac{y^2}{2} = Ln\,(1 + e^x) + C.$$

Para encontrar una solución particular que pase por el punto (0, 0) se sustituye $x = 0$ e $y = 0$ en la solución general y se obtiene $C = -Ln\,(2)$.

La solución particular buscada es:

$$y^2 = Ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^2.$$

Ejercicios

7.9. Calcular la solución general de la ecuación:

$$x \cdot dx + y \cdot dy = 0.$$

7.10. Resolver la ecuación $y' = e^y \cdot sen(x)$ y calcular la solución particular que pase por el punto (0, 0).

7.11. Calcular la solución general de la ecuación diferencial:

$$y'\cdot \cos x = (\operatorname{sen} x + x\cdot \sec x) \operatorname{cotg} y$$

7.12. Dada la ecuación diferencial $\sqrt{1+x^2}\,y' = x\cdot e^{-y}$, encontrar la solución general.

7.13. Calcular la familia de curvas que verifican que la pendiente de la recta tangente en cada uno de sus puntos sea igual a la ordenada del punto de tangencia.

7.3.2. Ecuaciones diferenciales homogéneas

Definición 7.3.2:

Una función $f(x, y)$ es una función ***homogénea*** de grado n en las variables x e y si $f(tx, ty) = t^n\cdot f(x, y)$.

Así, la función $f(x, y) = x^3 + x\cdot y^2 - x^2\cdot y$ es una función homogénea de grado tres y la función $g(x, y) = \dfrac{x\cdot y}{x^2+y^2}$ es una función homogénea de grado cero.

Definición 7.3.3:

Una ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ se denomina ***ecuación diferencial homogénea*** si la función $f(x, y)$ es homogénea de grado cero.

En este caso se puede expresar de la forma $y' = g\left(\dfrac{y}{x}\right)$ y al hacer el cambio de variables $z = \dfrac{y}{x}$ la ecuación se reduce a otra ecuación diferencial que tiene las variables separadas. En efecto, al derivar $y = z\cdot x$ se obtiene que: $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{dz}{dx} + z$, por lo tanto: $x\cdot\dfrac{dz}{dx} = g(z) - z$, de forma que: $\dfrac{dz}{g(z)-z} = \dfrac{dx}{x}$.

Si la ecuación diferencial está expresada de la forma:

$$M(x, y)\cdot dx + N(x, y)\cdot dy = 0$$

la ecuación es una ***ecuación diferencial homogénea*** si $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son funciones homogéneas del mismo grado.

También en este caso haciendo el cambio $y = z\cdot x$ la ecuación se reduce a otra ecuación diferencial de variables separadas.

Ecuaciones diferenciales reducibles a homogéneas

Una ecuación diferencial de la forma:

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right)$$

en la que las rectas:

$$\begin{cases} r: ax + by + c = 0 \\ s: a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

no son paralelas y f es una función continua, se puede transformar en una ecuación diferencial homogénea.

Se puede suponer que c o c' son distintos de cero, ya que si $c = 0$ y $c' = 0$ la ecuación es ya homogénea.

El método para trasformar esta ecuación en una ecuación diferencial homogénea consiste en trasladar el origen de coordenadas al punto de intersección de estas rectas.

Esto se consigue haciendo el cambio de variable:

$$\begin{cases} x = x_1 + h \\ y = y_1 + k, \end{cases}$$

siendo (h, k) las coordenadas del punto de intersección.

Con este cambio la ecuación se convierte en una ecuación diferencial homogénea en las variables x_1 e y_1: $y' = f\left(\dfrac{ax_1 + by_1}{a' x_1 + b' y_1}\right)$. Se obtiene la solución al resolver esta ecuación y deshacer el cambio de variable.

Si las rectas *r* y *s* son paralelas, existe un valor *t* tal que $a' = t \cdot a$ y $b' = t \cdot b$ de manera que la ecuación diferencial se puede expresar de la forma:

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{t(ax + by) + c'}\right).$$

Llamando $z = a \cdot x + b \cdot y$ la ecuación se reduce a una ecuación diferencial de variables separadas.

En efecto $z' = a + b \cdot y'$, de donde $y' = \dfrac{z'}{b} - \dfrac{a}{b}$, que al sustituirlo en la ecuación se tiene:

$$\frac{z'}{b} - \frac{a}{b} = f\left(\frac{z + c}{t \cdot z + c'}\right).$$

Ejemplos resueltos

Ejemplo 7.3.4: Resolver $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{x \cdot y}$.

Esta ecuación diferencial se transforma en:

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}.$$

Se hace el cambio de variables: $z = \dfrac{y}{x}$, por lo se tiene que: $y = z \cdot x$, al derivar: $y' = z' \cdot x + z$, y al sustituir en la ecuación se tiene: $z' \cdot x + z = z + \dfrac{1}{z}$.

Se separan variables:

$$z \cdot dz = \frac{dx}{x}.$$

Se integra:

$$z^2 = 2(Ln\ x + Ln\ C).$$

Se deshace el cambio se obtiene la solución general:

$$y^2 = x^2 \cdot Ln\ (x^2 \cdot C^2).$$

Ejemplo 7.3.5: Resolver la ecuación diferencial: $(3y - x) \cdot y' = 3x - y - 4$.

Esta ecuación diferencial es reducible a homogénea. El punto de intersección de las rectas $3y - x = 0$ y $3x - y - 4 = 0$ es el punto (3/2, 1/2). Se trasladan los ejes a ese punto con el cambio de variable:

$$\begin{cases} x = x_1 + 3/2 \\ y = y_1 + 1/2 \end{cases}$$

Al sustituirlo en la ecuación se tiene que:

$$(3y_1 - x_1) \cdot y_1' = 3x_1 - y_1.$$

Por tanto:

$$y_1' = \frac{3x_1 - y_1}{3y_1 - x_1}$$

es una ecuación diferencial homogénea.

Al hacer el cambio de variables: $z = \frac{y_1}{x_1}$ se obtiene la ecuación de variables separadas:

$$\frac{\frac{1}{3} - z}{z^2 - 1} dz = \frac{dx_1}{x_1}.$$

Al integrar se obtiene como solución general:

$$x_1^3 \cdot (z + 1)^2 \cdot (z - 1) = C.$$

Al deshacer los cambios de variable:

$$(x + y - 2)^2 \cdot (y - x + 1) = C,$$

que es la solución general de la ecuación inicial.

Ejemplo 7.3.6: Integrar $(2x - 4y + 5)\cdot y' = x - 2y + 3$.

En esta ecuación diferencial las rectas $2x - 4y + 5 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$ son paralelas, por lo tanto haciendo el cambio de variable $z = x - 2y$ se tiene que $z' = 1 - 2y'$ y al sustituir en la ecuación se obtiene $(2z + 5)\cdot(1 - z') = 2(z + 3)$ que tiene como solución general $z^2 + 5z = -x + C$. Al deshacer el cambio da lugar a:

$$(x - 2y)^2 + 6x - 10y = C,$$

que es la solución general de la ecuación inicial.

Ejemplo 7.3.7: Resolver la ecuación $(1 - x^2\cdot y^2)\cdot y' = 2x\cdot y^3$ haciendo el cambio $y = u^r$ para un valor de r que la transforme en ecuación diferencial homogénea.

Algunas veces una ecuación se puede reducir a homogénea haciendo el cambio $y = u^r$. Consiste en asignar a y grado r, a y' grado $r - 1$ y a x grado 1, y comprobar si para algún valor de r la ecuación es homogénea.

Al hacer el cambio $y = u^r$ se tiene: $(1 - x^2\cdot u^{2r})\cdot r\cdot u^{r-1}\cdot u' = 2x\cdot u^{3r}$ o bien:

$$(u^{r-1} - x^2\cdot u^{3r-1})\cdot r\cdot u' = 2x\cdot u^{3r}.$$

Para que sea homogénea se debe verificar que

$$r - 1 = 2 + 3r - 1 = 3r + 1$$

y esto se cumple para $r = -1$.

Haciendo el cambio $y = u^{-1}$ se tiene la ecuación:

$$(u^{-2} - x^2\cdot u^{-4})\cdot(-1)\cdot u' = 2x\cdot u^{-3}$$

o bien

$$(x^2 - u^2)\cdot u' = 2x\cdot u,$$

que es una ecuación diferencial homogénea que se resuelve entonces haciendo el cambio $z = \frac{u}{x}$. Al separar variables e integrar se obtiene como solución:

$$\frac{x(z^2+1)}{z} = C,$$

y al sustituir z por $\frac{1}{x \cdot y}$, se tiene la solución general de la ecuación diferencial dada:

$$1 + x^2 \cdot y^2 = C \cdot y$$

Ejercicios

7.14. Calcular la solución general de la ecuación diferencial:

$$(x^2 - y^2) \cdot y' = x \cdot y.$$

7.15. Resolver la ecuación diferencial:

$$x \cdot (x^2 - 6y^2) \cdot dy = 4y \cdot (x^2 + 3y^2) \cdot dx.$$

7.16. Dada la ecuación diferencial $x \cdot (x + y) \cdot dy = (x^2 + y^2) \cdot dx$, encontrar la solución general.

7.17. Reducir a homogéneas las siguientes ecuaciones diferenciales y encontrar la solución general:

a) $y' = (x + y)^2$

b) $x^2 \cdot y' = (2x - y + 1)^2$

c) $(x - y)^2 \cdot y' = (x - y + 1)^2$.

7.18. Resolver la ecuación $(x + y + 1) \cdot dx + (2x + 2y - 1) \cdot dy = 0$.

7.3.3. Ecuaciones diferenciales exactas

Definición 7.3.4:

Una ecuación diferencial $M(x, y) \cdot dx + N(x, y) \cdot dy = 0$ se denomina

ecuación diferencial exacta si el primer miembro de la ecuación es la diferencial total de una función *U*(*x, y*), de forma que:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = M \cdot dx + N \cdot dy.$$

Teorema 7.3.1:

La ecuación *M*(*x, y*)·*dx* + *N*(*x, y*)·*dy* = 0 es una ecuación diferencial exacta si y sólo si:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Demostración:

Si la ecuación es una ecuación diferencial exacta, entonces existe una función *U*(*x*, *y*) tal que $\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}$ = *M*(*x*, *y*) y $\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}$ = *N*(*x*, *y*), por el teorema de Schwarz se sabe que las segundas derivadas parciales cruzadas de la función *U*(*x*, *y*), cuando existen y son continuas, coinciden, es decir:

$$\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y \partial x}$$

y por tanto

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x},$$

lo que prueba que la condición es necesaria para que la ecuación sea diferencial exacta.

Esta condición también es suficiente ya que permite encontrar una función *U*(*x*, *y*) que satisface la definición. En efecto, al integrar con respecto de *x*: $\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}$ = *M*(*x*, *y*) y se tiene que: *U*(*x*, *y*) = $\int M(x,y)dx + g(y)$, siendo *g(y)* la constante de integración que puede ser una función de *y*. Al derivar esta igualdad con respecto a *y* e igualar el resultado a la función *N*(*x*, *y*) se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + g'(y) = N(x,y),$$

y por lo tanto:

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\,,$$

se integra respecto a *y*: $g(y) = \int\left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right)dy$. De esta forma queda determinada la función $U(x, y) = \int M(x,y)dx + g(y)$.

Del mismo se puede comenzar el proceso, teniendo en cuenta que $\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}$ = *N*(*x*, *y*), integrando respecto a *y*, para determinar la función:

$$U(x, y) = \int N(x,y)dy + f(x).\ \square$$

Este teorema proporciona una condición para detectar con facilidad las ecuaciones diferenciales exactas. Además la demostración describe un método para calcular la solución general de dicha ecuación.

Corolario 7.3.2:

La solución general de la ecuación diferencial exacta *M*(*x, y*)*dx* + *N*(*x, y*)*dy* = 0 es de la forma *U*(*x, y*) = C, siendo *U*(*x, y*) la función que verifica cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:

a) $\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}$ = *M*(*x*, *y*) y $\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}$ = *N*(*x*, *y*),

b) $U(x, y) = \int M(x,y)dx + g(y)$ con $g(y) = \int\left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right)dy$,

c) $U(x, y) = \int N(x,y)dx + f(x)$ con $f(x) = \int\left(M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)dy\right)dx$.

La equivalencia entre las condiciones a) y b) es consecuencia inmediata del teorema anterior y, mediante una demostración similar a la realizada en este teorema, se podría demostrar que a) y c) también son equivalentes.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 7.3.8: Resolver $e^{-y}\cdot dx - (2y + x\cdot e^{-y})\cdot dy = 0$.

Para calcular la solución general de la ecuación $e^{-y}\cdot dx - (2y + x\cdot e^{-y})\cdot dy = 0$, primero se comprueba que la ecuación dada es una ecuación diferencial exacta, ya que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial e^{-y}}{\partial y} = \frac{\partial(2y + xe^{-y})}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} = -e^{-y}$.

Para encontrar la solución se agrupan términos: $e^{-y}\cdot dx - x\cdot e^{-y}\cdot dy - 2y\cdot dy = 0$ y se obtiene $d(x\cdot e^{-y}) - d(y^2) = 0$; por lo tanto la solución general es:

$$x\cdot e^{-y} - y^2 = C.$$

Ejemplo 7.3.9: Calcular la solución general de la ecuación diferencial:

$$(3x^2 + 6x\cdot y^2)\cdot dx + (6x^2\cdot y + 4y^3)\cdot dy = 0.$$

Se comprueba que la ecuación es una ecuación diferencial exacta pues:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 12x\cdot y;\ \frac{\partial N}{\partial x} = 12x\cdot y.$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 + 6x\cdot y^2 \Rightarrow U(x, y) = \int (3x^2 + 6xy^2)dx = x^3 + 3x^2\cdot y^2 + g(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2\cdot y + 4\,y^3 = 6x^2\cdot y + g'(y),$$

por tanto $g'(y) = 4y^3$, e integrando:

$$g(y) = y^4 + C,$$

de donde:

$$U(x, y) = x^3 + 3x^2\cdot y^2 + y^4 + C = 0.$$

Ejemplo 7.3.10: Calcular la solución general de la ecuación diferencial:

$$(x\cdot y^2 - 1)\cdot dx + y\cdot(x^2 + 3)\cdot dy = 0.$$

Se comprueba que la ecuación es una ecuación diferencial exacta pues $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x\cdot y = \frac{\partial N}{\partial x}$.

$$\frac{\partial U}{\partial y} = y\cdot(x^2 + 3) \Rightarrow U(x, y) = \int y(x^2+3)dy = (x^2 + 3)\frac{y^2}{2} + f(x)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x\cdot y^2 - 1 = x\cdot y^2 + f'(x),$$

por tanto $f'(x) = -1$, e integrando:

$$f(x) = - x + C,$$

se obtiene la solución general:

$$U(x, y) = (x^2 + 3)\frac{y^2}{2} - x + C = 0.$$

Ejemplo 7.3.11: Resolver $(2x+\frac{1}{y})dx+(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2})dy=0$.

Se comprueba que la ecuación diferencial $(2x+\frac{1}{y})dx+(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2})dy=0$ es exacta: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(2x+\frac{1}{y})}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}$ que coincide con $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2})}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}$.

Se agrupan términos:

$$2xdx+(\frac{1}{y}dx-\frac{x}{y^2}dy)+\frac{1}{y}dy=0$$

de donde se obtiene la solución:

$$x^2 + \frac{x}{y} + Ln\ y = C.$$

Ejercicios

7.19. Comprobar que la ecuación diferencial:

$$(x^3 + x\cdot y^2)\cdot dx + (x^2\cdot y + y^3)\cdot dy$$

es una ecuación diferencial exacta y calcular su solución general.

7.20. Dada la ecuación: $(3x^2 + 2y\cdot sen\ 2x)\cdot dx = -\ 2(sen^2\ x + 3y^2)\cdot dy$, comprobar que es una ecuación diferencial exacta y calcular su solución general.

7.21. Calcular la solución general de la ecuación diferencial

$$x\cdot y^3\cdot dx + (\frac{3}{2}x^2\cdot y^2 - 1)\cdot dy = 0.$$

7.3.4. Factores integrantes

Definición 7.3.5:

Un **factor integrante** de una ecuación diferencial es una función $\mu(x, y)$ tal que al multiplicar la ecuación diferencial por $\mu(x, y)$, se trasforma en una ecuación diferencial exacta.

Sea $M(x, y)\cdot dx + N(x, y)\cdot dy = 0$ una ecuación diferencial que no es diferencial exacta y sea $\mu(x, y)$ el posible factor integrante. Se impone que $\mu\cdot M\cdot dx + \mu\cdot N\cdot dy = 0$ sea una ecuación diferencial exacta, para lo que es necesario y suficiente que se verifique la igualdad:

$$\frac{\partial(\mu\cdot M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu\cdot N)}{\partial x},$$

es decir:

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}\cdot M + \mu\cdot\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial\mu}{\partial x}\cdot N + \mu\cdot\frac{\partial N}{\partial x},$$

por lo tanto:

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot M - \frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot N = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right),$$

y al dividir por μ los dos miembros de esta igualdad se tiene:

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} \cdot M - \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} \cdot N = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \tag{7.3.1}$$

Por lo tanto toda función $\mu(x, y)$ que verifique esta condición es un factor integrante de la ecuación inicial.

La obtención de un factor integrante para una ecuación diferencial puede ser muy complicado puesto que la condición anterior es una ecuación en derivadas parciales que puede ser difícil de resolver. Sin embargo existen situaciones especiales en las que se puede calcular un factor integrante sin demasiada dificultad.

Factores integrantes que dependen exclusivamente de la variable *x* o de *y*

Si se supone que la ecuación diferencial admite un factor integrante $\mu(x)$ que depende sólo de la variable x, entonces $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ y la condición (7.3.1) queda de la forma:

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}.$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene $\mu(x)$.

Para que exista este factor integrante, el segundo miembro de la ecuación anterior debe depender sólo de x.

Sea $h(x) = \dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$, entonces $\mu(x) = e^{\int h(x)dx}$.

De forma análoga, para que la ecuación diferencial admita un factor integrante $\mu(y)$, es decir, que dependa sólo de y, entonces $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$ y la condición (7.3.1) queda de la forma:

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}.$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene $\mu(y)$.

Para que exista este factor integrante, el segundo miembro de la ecuación anterior debe depender sólo de y.

Sea $k(y) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$, entonces $\mu(y) = e^{\int k(y)dy}$.

Se pueden buscar también factores integrantes que dependan de x y de y, como una combinación lineal: $\mu(ax + by)$, o como un producto de potencias de ambas variables: $\mu(x^r \cdot y^s)$. En el *ejemplo 7.3.13* se muestra como resolver una ecuación diferencial buscando un factor integrante de la forma: $\mu(ax + by)$.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 7.3.12: Resolver la ecuación $(1 - x\cdot y)\cdot dx + (1 - x^2)\cdot dy = 0$.

Esta ecuación diferencial no es exacta ya que $\frac{\partial M}{\partial y} = -x$, $\frac{\partial N}{\partial x} = -2x$.

Se calcula:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-x + 2x}{1 - x^2} = \frac{x}{1 - x^2}.$$

Como esta función depende sólo de x la ecuación admite un factor integrante $\mu(x)$ que depende sólo de x, que resulta de resolver la ecuación:

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{x}{1 - x^2} \Rightarrow \ln(\mu(x)) = (-1/2)\ln(1 - x^2) \Rightarrow \mu(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Se multiplica la ecuación inicial por el factor integrante:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx - \frac{x.y}{\sqrt{1-x^2}}dx + \sqrt{1-x^2}dy = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + y.\frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}dx + \sqrt{1-x^2}dy = 0,$$

que es una ecuación diferencial exacta que tiene como solución general:

$$arcsen(x) + y\cdot\sqrt{1-x^2} = C.$$

Ejemplo 7.3.13: Resolver la ecuación diferencial:

$$(x^2 - y^2 + 1)\cdot dx + (x^2 - y^2 - 1)\cdot dy = 0,$$

sabiendo que tiene un factor integrante que depende de una combinación lineal de x e y.

Sea $z = ax + by$ y sea $\mu = \mu(z)$ el factor integrante buscado.

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\cdot M - \frac{\partial z}{\partial x}\cdot N\right)\frac{d}{dz}(ln\mu).$$

Se calculan estas derivadas:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -2y; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = a; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = b$$

y se sustituyen en la ecuación:

$$\frac{d}{dz}(ln\mu) = \frac{2x+2y}{b(x^2-y^2+1)-a(x^2-y^2-1)} = \frac{2(x+y)}{x^2(b-a)-y^2(b-a)+b+a}.$$

Para $a = 1$ y $b = -1$, se tiene $z = x - y \Rightarrow \frac{d}{dz}(ln\mu) = \frac{x+y}{y^2-x^2} = \frac{1}{y-x} = \frac{-1}{z}$,

se integra $ln(\mu) = -ln(z)$ y por tanto $\mu = \frac{1}{z} = \frac{1}{x-y}$.

Se multiplica la ecuación inicial por $\frac{1}{x-y}$:

$$(x+y)\cdot dx + \frac{dx}{x-y} + (x+y)\cdot dy - \frac{dy}{x-y} = 0,$$

que es una ecuación diferencial exacta que se puede expresar por $d\left(\frac{(x+y)^2}{2}\right) + d(Ln\ |x-y|) = 0$ y por lo tanto su solución general es:

$$\frac{(x+y)^2}{2} + Ln\ |x-y| = C.$$

Ejercicios

7.22. Integrar la ecuación diferencial:

$$(2x\cdot y + x^2\cdot y + \frac{y^3}{3})\cdot dx + (x^2 + y^2)\cdot dy = 0,$$

sabiendo que existe un factor integrante que depende sólo de x.

7.23. Resolver la ecuación diferencial $\frac{y}{x}\cdot dx + (y^3 - \ln\ x)\cdot dy = 0$, sabiendo que tiene un factor integrante que depende sólo de y.

7.24. Integrar la ecuación diferencial $(y^2 - x\cdot y)\cdot dx + x^2\cdot dy = 0$ sabiendo que existe un factor integrante que es función de $x\cdot y^2$.

7.25. Calcular la solución general de la ecuación diferencial

$$x\cdot y^3\cdot dx + (x^2\cdot y^2 - 1)\cdot dy = 0.$$

(*Solución:* $\frac{x^2\cdot y^2}{2} - Lny = K$)

7.26. Demostrar que toda ecuación de la forma:

$$y\cdot f(x, y)\cdot dx + x\cdot g(x, y)\cdot dy = 0,$$

en la que la f y g son funciones del producto $x\cdot y$ admite un factor integrante $\mu(x, y) = \frac{1}{xy(f(x,y) - g(x,y))}$. Aplicar este resultado a la resolución de la ecuación:

$$x^3 \cdot y^4 \cdot dx - (x^2 \cdot y - x^4 \cdot y^3) \cdot dy = 0.$$

7.27. La ecuación diferencial $2x \cdot y \cdot dy + (x^2 - y^2 - 1) \cdot dx = 0$ admite como solución general la familia de curvas $x^2 + y^2 - Cx + 1 = 0$. Calcular un factor integrante de la ecuación

7.3.5. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Definición 7.3.6:

Una ecuación diferencial de primer orden es una ***ecuación diferencial lineal*** si es lineal respecto a la variable y y respecto a su derivada y', lo que significa que es una expresión de la forma:

$$y' + p(x) \cdot y = q(x),$$

siendo $p(x)$ y $q(x)$ funciones cualesquiera, que se suponen continuas en la región en la que se pretende integrar la ecuación.

Si $q(x) = 0$ la ecuación diferencial lineal se denomina ***ecuación diferencial lineal homogénea***. Si $q(x) \neq 0$ la ecuación diferencial lineal se denomina ***no homogénea*** o ***completa***.

En el *capítulo 10* se estudian las ecuaciones diferenciales lineales de orden n, de las que éstas son un caso particular cuando $n = 1$, y entonces se demostrará que el conjunto de soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea tiene estructura de espacio vectorial de dimensión n, y que el conjunto de soluciones de una ecuación diferencial lineal no homogénea tiene estructura de espacio afín cuyo espacio vectorial asociado es el de las soluciones de su ecuación diferencial homogénea. Pero por su interés, tanto histórico como práctico, se estudian ahora algunos métodos de solución de estas ecuaciones.

Métodos de resolución

Las ecuaciones lineales, y en particular las de primer orden, que son las estudiadas en este capítulo, representan un tipo especial de ecuaciones diferenciales para las que, casi siempre, resulta fácil encontrar la solución general, y quizás por esta misma razón existen distintos procedimientos para calcularla. El primer método estudiado consiste en encontrar un factor integrante del mismo modo que se calculaba en el apartado anterior, en el segundo se realiza un cambio de variable y el tercero supone un método general que se volverá a utilizar con las ecuaciones diferenciales lineales de orden *n.*

Método 1º: Factor integrante

La ecuación $y' + p(x)\cdot y = q(x)$ se puede expresar:

$$(p(x)\cdot y - q(x))\cdot dx + dy = 0,$$

como $\frac{\partial M}{\partial y} = p(x)$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 0$, se tiene que $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = p(x)$ que depende sólo de x, y por lo tanto existe siempre un factor integrante: $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$. Al multiplicar la ecuación lineal por $\mu(x)$ resulta ser una ecuación diferencial exacta cuya solución general está determinada.

Método 2º: Cambio de variable

Otra forma de resolver una ecuación lineal no homogénea es suponer $y(x) = u(x)\cdot v(x)$, de donde resulta que $y' = u'\cdot v + u\cdot v'$.

Se sustituye en la ecuación:

$u'\cdot v + u\cdot v' + p\cdot u\cdot v = q \Rightarrow u'\cdot v + u(v' + p\cdot v) = q$.

Se calcula v de forma que sea una solución, distinta de cero, de la ecuación $v' + p\cdot v = 0$: $v(x) = Ke^{-\int p(x)dx}$ y se elige la solución particular para $K = 1$.

Se determina $u(x)$ solución general de la ecuación $u'\cdot v = q$:

$$u(x) = \int \frac{q(x)}{v(x)}dx$$

de donde la solución general de la ecuación inicial es:

$$y(x) = u(x)\cdot v(x) = \left(\int \frac{q(x)}{v(x)}dx + C\right)\cdot v(x) = v(x)\int \frac{q(x)}{v(x)} + Cv(x)$$

Se observa que esta solución no varía si en lugar de tomar $v(x) = e^{-\int p(x)dx}$ se toma $v(x) = Ke^{-\int p(x)dx}$ con $K \neq 0$.

Método 3º: Variación de las constantes

Un método de resolución, generalizable a ecuaciones diferenciales lineales de orden n, consiste en encontrar la solución general de la ecuación homogénea $y_H(x)$ y una solución particular de la ecuación completa $y_P(x)$. El siguiente teorema demuestra que $y_H(x) + y_P(x)$ es una solución de la ecuación completa.

Teorema 7.3.3

Sea $y' + p(x)\cdot y = q(x)$ una ecuación diferencial lineal con $p(x)$ y $q(x)$, funciones continuas en un intervalo abierto (a, b). Si $y_H(x)$ es la solución general de la ecuación diferencial homogénea $y' + p(x)\cdot y = 0$ e $y_P(x)$ es una solución particular de la ecuación no homogénea, entonces $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$ es la solución general de la ecuación completa.

Demostración:

Si $y_H(x)$ es solución de la ecuación homogénea entonces verifica que $y'_H(x) + p(x)\cdot y_H(x) = 0$.

Si $y_P(x)$ es solución de la ecuación completa entonces verifica que $y'_P(x) + p(x)\cdot y_P(x) = q(x)$.

Efectivamente $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$ es la solución general de la ecuación completa ya que $y'(x) + p(x)\cdot y(x) = (y'_H(x) + y'_P(x)) + p(x)\cdot(y_H(x) + y_P(x)) = y'_H(x) + p(x)\cdot y_H(x) + y'_P(x) + p(x)\cdot y_P(x) = q(x)$. □

Solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea:

La ecuación $\frac{dy}{dx} = -p(x)\cdot y$ es de variables separadas por lo que si se expresa como $\frac{dy}{y} = -p(x)dx$, se integra, se obtiene $ln(y) = -\int p(x)dx + K$. Por tanto la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea asociada viene expresada por:

$$y_H(x) = Ke^{-\int p(x)dx}.$$

Solución particular de la ecuación diferencial lineal no homogénea:

Uno de los métodos para obtener una solución particular de la ecuación completa es el denominado ***método de variación de las constantes***. Consiste en considerar la constante de integración de la solución de la ecuación lineal homogénea como una función, que se calcula imponiendo la condición de que sea solución de la ecuación completa.

Si $y_P(x) = C(x)e^{-\int p(x)dx}$ entonces:

$$y'_P(x) = C'(x)\cdot e^{-\int p(x)dx} + C(x)\cdot(-p(x))\cdot e^{-\int p(x)dx}$$

y sustituyendo en la ecuación $y' + p(x)\cdot y = q(x)$ se tiene que:

$$C'(x)\cdot e^{-\int p(x)dx} + C(x)\cdot(-p(x))\cdot e^{-\int p(x)dx} + p(x)\cdot C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x) \Rightarrow$$

$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}$;

integrando esta expresión:

$$C(x) = \int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx\ ,$$

De esta forma se obtiene:

$$y_P(x) = C(x)e^{-\int p(x)dx} = e^{-\int p(x)dx}\cdot\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx\ ,$$

que es una solución particular de la ecuación completa.

La solución general es:

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\cdot\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx\ .$$

Ejemplos resueltos

Ejemplo 7.3.14: Resolver $x\cdot y' + (1 - x)\cdot y = x\cdot e^x$.

Se divide la ecuación diferencial por x para expresarla de la forma:

$$y' + \frac{1-x}{x}y = e^x\ .$$

Paso 1º: Se resuelve la ecuación homogénea asociada $y' + \frac{1-x}{x}y = 0$,

$$y_H(x) = e^{-(\ln x - x)+C} = K\ e^{-\ln x + x} = K\frac{e^x}{x}\ .$$

Paso 2º: Se busca una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea, de la forma $y_P(x) = C(x)\frac{e^x}{x}$. Para ello se sustituye en la ecuación completa:

$$C'(x)\cdot\frac{e^x}{x} + C(x)\cdot\frac{e^x x - e^x}{x^2} + \frac{1-x}{x}\cdot C(x)\frac{e^x}{x} = e^x.$$

Como los dos últimos sumandos del primer miembro de la ecuación anterior son iguales y de distinto signo, se simplifica:

$$C'(x)\frac{e^x}{x} = e^x.$$

Integrando se obtiene:

$$C(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Por tanto, una solución particular de la ecuación completa es:

$$y_P(x) = \frac{x^2}{2}\cdot\frac{e^x}{x} = \frac{x\cdot e^x}{2}.$$

Paso 3º: La solución general de la ecuación completa es:

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = K\frac{e^x}{x} + \frac{x\cdot e^x}{2} = e^x\left(\frac{K}{x}+\frac{x}{2}\right).$$

Ejemplo 7.3.15: Integrar $y' = \dfrac{1}{e^y - x}$.

La ecuación diferencial anterior se puede expresar como $\dfrac{dx}{dy} + x = e^y$, que es una ecuación diferencial lineal respecto de x considerada esta variable como función de *y*. En general, una ecuación que se pueda expresar de la forma $\dfrac{dx}{dy} + x\cdot r(y) = s(y)$ se resuelve por el mismo método considerando a *x* como una función de *y*.

Paso 1º: La solución general de la ecuación homogénea es:

$$x_H(y) = K\cdot e^{-y}.$$

Paso 2º: Una solución particular de la no homogénea $x_P(y) = C(y)\cdot e^{-y}$, por tanto $x'(y) = C'(y)\cdot e^{-y} - C(y)\cdot e^{-y}$, al sustituir en la ecuación completa anulando términos opuestos se obtiene $C'(y)\cdot e^{-y} = e^y \Rightarrow C'(y) = e^{2y} \Rightarrow C(y) = \dfrac{e^{2y}}{2}$. Por lo tanto una solución particular de la ecuación completa:

$$x_P(y) = \frac{e^{2y}}{2} \cdot e^{-y} = \frac{e^{y}}{2}.$$

Paso 3º: La solución general de la ecuación completa:

$$x(y) = K\,e^{-y} + \frac{e^{y}}{2}.$$

Ejemplo 7.3.16: Resolver la ecuación diferencial lineal $y' + \frac{y}{x} = 3cos(2x)$ buscando un factor integrante.

El factor integrante que transforma esta ecuación lineal en una ecuación diferencial exacta es $\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = x$.

Expresándola de la forma $dy + \left(\frac{y}{x} - 3cos(2x)\right)dx = 0$ y multiplicándola por x se tiene: $(y - 3x\cdot cos(2x))\cdot dx + x\cdot dy = 0$.

Llamando $M(x, y) = y - 3x\cdot cos(2x)$ y $N(x, y) = x$ se tiene $\frac{\partial M}{\partial y} = 1\ \frac{\partial N}{\partial x} = 1$, por lo que es una ecuación diferencial exacta que se puede expresar como:

$$x\cdot dy + y\cdot dx - 3x\cdot cos(2x)dx = 0.$$

Al integrar se obtiene:

$$x\cdot y - 3\int x\,cos(2x)dx = K.$$

Por lo tanto la solución general es:

$$x\cdot y - \frac{3xsen(2x)}{2} - \frac{3cos(2x)}{4} = K.$$

Ejemplo 7.3.17: Integrar la ecuación diferencial lineal $y' = y\cdot tg\ x + cos\ x$ realizando el cambio de variable $y = u\cdot v$.

Si $y = u\cdot v$ se tiene que $y' = u'\cdot v + u\cdot v'$.

Se sustituye en la ecuación:

$u'\cdot v + u\cdot v' - u\cdot v\cdot tg\ x = cos\ x \Rightarrow u'\cdot v + u(v' - v\cdot tg\ x) = cos\ x$.

Se calcula v de forma que sea una solución, no nula, de la ecuación:

$v' - v\cdot tg\ x = 0 \Rightarrow v(x) = Ke^{\int tgxdx} = K\cdot sec\ x$.

Para $K = 1 \Rightarrow v(x) = sec\ x$.

Se determina $u(x)$ solución de la ecuación:

$u'\cdot v = cos\ x \Rightarrow u'\cdot sec\ x = cos\ x \Rightarrow$

$$u(x) = \int \frac{cos\ x}{sec\ x}dx = \int cos^2 xdx = \int \frac{1+cos\ 2x}{2}dx = \frac{x}{2}+\frac{sen2x}{4}+C.$$

La solución general de la ecuación es:

$$y(x) = \left(\frac{x}{2}+\frac{sen2x}{4}+C\right)\cdot sec\ x$$

Ejercicios

7.28. Resolver la ecuación $y' + 2x\cdot y = 2x\cdot e^{-x^2}$.

7.29. Calcular la solución particular de la ecuación diferencial:

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{cos(x)}{x^2}$$

que verifique la condición inicial $y(\pi) = 0$.

7.30. Calcular la solución general de la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xcos(y)+sen(2y)}.$$

7.31. Resolver la ecuación diferencial lineal $y' + y\cdot tg\ x = sec^2 x$.

7.32. Hallar la familia de curvas tales que el área del trapecio limitado por los ejes de coordenadas, la recta tangente a la gráfica de una función en un punto y la recta paralela al eje de ordenadas que pasa por el punto de tangencia sea constante e igual a a^2.

7.3.6. Algunas ecuaciones diferenciales especiales

Ecuación de *Bernoulli*

Definición 7.3.7:

La ***ecuación de Bernoulli*** es una ecuación diferencial de la forma:

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^n,$$

con $p(x)$ y $q(x)$ funciones dadas y $n \neq 0$ y $n \neq 1$.

Para $n = 0$ esta ecuación es una ecuación diferencial lineal y para $n = 1$ la ecuación es una ecuación diferencial de variables separadas.

Esta ecuación se reduce a una ecuación diferencial lineal dividiendo los términos de la ecuación por y^n, y haciendo el cambio $z = y^{-n+1}$.

Al dividir por y^n, se obtiene: $y' \cdot y^{-n} + p(x) \cdot y^{-n+1} = q(x)$. Al hacer el cambio de variables $z = y^{-n+1}$ se tiene que $z' = (-n + 1) \cdot y^{-n} \cdot y'$. Al sustituir en la ecuación:

$$\frac{z'}{-n+1} + p(x)z = q(x) \Rightarrow z' + (-n + 1) \cdot p(x) \cdot z = (-n + 1) \cdot q(x)$$

que es una ecuación diferencial lineal. Resolviéndola y deshaciendo el cambio de variable se obtiene la solución general.

Otra forma de resolverla consiste en sustituir $y(x)$ por $u(x) \cdot v(x)$, método que ya se estudió para resolver las ecuaciones diferenciales lineales.

Ecuación de *Ricatti*

Definición 7.3.8:

La ***ecuación de Ricatti*** es una ecuación diferencial de la forma:

$$y' = r(x) \cdot y^2 + q(x) \cdot y + p(x),$$

donde $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son funciones dadas.

En general, esta ecuación no puede resolverse por métodos elementales, excepto en ciertos casos particulares, por ejemplo:

Si $r(x) = 0$, entonces la ecuación es una ecuación diferencial lineal.

Si $p(x) = 0$, la ecuación es una ecuación diferencial de Bernoulli.

Se puede determinar la solución general de la ecuación a partir de soluciones particulares. Si se conoce una solución particular $y_1(x)$, entonces haciendo el cambio:

$$y(x) = y_1(x) + u(x),$$

la ecuación se transforma en una ecuación diferencial de Bernoulli:

$$y' = y'_1 + u' = r(x)\cdot(y_1 + u)^2 + q(x)\cdot(y_1 + u) + p(x) =$$

$$(r(x)\cdot y_1^2 + q(x)\cdot y_1 + p(x)) + r(x)\cdot u^2 + r(x)\cdot 2u\cdot y_1 + q(x)\cdot u.$$

Al ser y_1 es una solución particular y verificar la ecuación, se tiene que:

$$u' = r(x)\cdot u^2 + r(x)\cdot 2u\cdot y_1 + q(x)\cdot u = r(x)\cdot u^2 + (r(x)\cdot 2\cdot y_1 + q(x))\cdot u.$$

La ecuación que resulta $u' = r(x)\cdot u^{2} + (2\cdot r(x)\cdot y_1 + q(x))\cdot u$, es una ecuación diferencial de Bernoulli y se resuelve realizando el cambio $w = u^{1-2} = u^{-1}$.

Por lo tanto, directamente, cuando en la ecuación de Ricatti se conoce una solución particular y_1, el cambio de variable:

$$y(x) = y_1(x) + w^{-1}(x) \Rightarrow \mathrm{w} = \frac{1}{y - y_1},$$

la transforma en una ecuación diferencial lineal:

$$w' + (2r(x)\cdot y_1 + q(x))\cdot w = r(x)$$

Si se conocen dos soluciones particulares y_1 e y_2 de la ecuación de Ricatti, se puede reducir mediante un cambio de variables adecuado a una ecuación diferencial lineal homogénea.

En efecto, si y_1 es una solución de la ecuación de Ricatti, entonces el cambio de variables $w = \frac{1}{y - y_1}$ la transforma en la ecuación diferencial lineal:

$$w' + (2r(x)\, y_1 + q(x))\cdot w = r(x).$$

Si y_2 es otra solución de la ecuación de Ricatti, entonces $w_2 = \frac{1}{y_2 - y_1}$ es solución de la ecuación anterior, y el cambio:

$$z = w - w_2 = \frac{1}{y - y_1} - \frac{1}{y_2 - y_1},$$

transforma la ecuación de Ricatti en la ecuación diferencial lineal homogénea:

$$z' + (2r(x)\cdot y_1 + q(x))\cdot z = 0,$$

como consecuencia inmediata del *teorema 7.3.3*.

Por último, si se conocen tres soluciones particulares y_1, y_2 e y_3, entonces:

$$w_2 = \frac{1}{y_2 - y_1} \text{ y } w_3 = \frac{1}{y_3 - y_1}$$

son dos soluciones particulares de la ecuación diferencial lineal:

$$w' + (2r(x)\cdot y_1 + q(x))\cdot w = r(x).$$

La solución general se puede obtener directamente a partir de ella, al verificar que:

$$w = C(w_2 - w_3) + w_2.$$

Al sustituir:

$$\frac{1}{y - y_1} = C\left(\frac{1}{y_2 - y_1} - \frac{1}{y_3 - y_1}\right) + \frac{1}{y_2 - y_1}.$$

Ecuación de *Lagrange*

Definición 7.3.9:

La ***ecuación de Lagrange*** es una ecuación diferencial de la forma:

$$y = x\cdot p(y') + q(y'),$$

lineal con respecto a x e y.

Para resolver una ecuación diferencial de este tipo se realiza el cambio $y' = t$, por tanto $dy = t\cdot dx$. Al sustituir este cambio en la ecuación diferencial se reduce a otra que considerando x en función de t es lineal. Al resolverla se obtiene la solución general en forma paramétrica:

$$\left.\begin{array}{rcl} x &=& r(t,C) \\ y &=& r(t,C)p(t)+q(t) \end{array}\right\}.$$

La ecuación de Lagrange puede tener soluciones singulares de la forma:

$$y = p(x_0)\cdot x + q(x_0),$$

siendo x_0 una raíz de la ecuación $x_0 = p(x_0)$

Ecuación de *Clairaut*

Definición 7.3.10:

La ***ecuación de Clairaut*** es una ecuación diferencial de la forma:

$$y = x\cdot y' + q(y').$$

Es por tanto un caso especial de la ecuación de Lagrange y su método de resolución es esencialmente el mismo, es decir, mediante el cambio $y' = t$.

La solución general obtenida es: $y = C\cdot x + q(C)$

Igual que la ecuación de Lagrange, también puede tener soluciones singulares que resultan de eliminar el parámetro t entre las ecuaciones:

$$\begin{cases} y = x\cdot t + q(t) \\ x + q'(t) = 0. \end{cases}$$

Ejemplos resueltos

Ejemplo 7.3.18: Resolver la ecuación $3x\cdot y' - 2y = x^3\cdot y^{-2}$.

Se observa que es una ecuación de Bernouilli. Al realizar el cambio $y(x) = u(x)\cdot v(x)$ se obtiene:

$$3x\cdot(u'\cdot v + u\cdot v') - 2u\cdot v = x^3\cdot u^{-2}\cdot v^{-2} \Rightarrow 3x\cdot u'\cdot v + u(3x\cdot v' - 2v) = x^3\cdot u^{-2}\cdot v^{-2}.$$

Al resolver $3x\cdot v' - 2v = 0$ se obtiene la solución $v(x) = x^{2/3}$.

Sustituyendo en $3x\cdot u'\cdot v^3 = x^3\cdot u^{-2}$ se obtiene: $3u'\cdot x^3 = x^3\cdot u^{-2} \Rightarrow 3u^2\cdot u' = 1$. Integrando: $u^3 = x + C \Rightarrow u(x) = (x + C)^{1/3}$. Al deshacer el cambio:

$$y(x) = (x + C)^{1/3}\cdot x^{2/3}.$$

Ejemplo 7.3.19: Integrar $y = x\cdot y' + (y')^2$.

Se observa que es una ecuación de Clairaut. Al hacer el cambio $y' = t$ se obtiene $y = x\cdot t + t^2$.

Al diferenciar: $t\cdot dx = t\cdot dx + x\cdot dt + 2t\cdot dt \Rightarrow dt\cdot(x + 2t) = 0$.

Igualando a 0 el primer factor de esta ecuación se tiene que:

$$dt = 0 \Rightarrow t = C.$$

La solución general de la ecuación es:

$$y = C\cdot x + C^2$$

que es un haz de rectas dependientes del parámetro C.

Igualando a 0 el segundo factor se tiene que $x = -2t$. Eliminando t entre esta ecuación y la ecuación $y = x\cdot t + t^2$ resulta una solución singular, la parábola $y = -\dfrac{x^2}{4}$, que es la envolvente del haz de rectas determinado por la solución general.

Ejemplo 7.3.20: Resolver la ecuación diferencial:

$$x\cdot y' - y = \frac{2x}{x^4 - 1}\cdot(y^2 - x^2),$$

sabiendo que admite soluciones particulares del la forma $y = ax + b$.

Es una ecuación diferencial de Ricatti. Al imponer que $y = ax + b$ sea solución se obtiene que $y = x$ es una solución. Se hace el cambio $z = y - x$, con lo que la ecuación se transforma en una ecuación de Bernoulli:

$$x\cdot z' = \frac{2x}{x^4 - 1}z^2 + \left(\frac{4x^2}{x^4 - 1} + 1\right)z.$$

Con el cambio $w = 1/z$ se transforma en una ecuación lineal:

$$-x\cdot w' = \left(\frac{4x^2}{x^4-1}+1\right)w+\frac{2x}{x^4-1}.$$

Al resolverla se obtiene:

$$w = C\frac{x^2+1}{x(x^2-1)}+\frac{1}{x(x^2-1)}.$$

Deshaciendo los cambios se tiene finalmente la solución buscada:

$$y = x+\frac{x(x^2-1)}{C(x^2+1)+1}.$$

Ejemplo 7.3.21: Resolver la ecuación diferencial $y = 2x\cdot y' + sen\ y'$.

Se observa que es una ecuación de Lagrange. Para resolverla se realiza el cambio $y' = t$ y se obtiene la ecuación $y = 2x\cdot t + sen\ t$.

Diferenciando: $t\cdot dx = 2t\cdot dx + 2x\cdot dt + cos\ t\cdot dt$.

Agrupando términos:

$$t\cdot dx = -2x\cdot dt - cos\ t\cdot dt \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{-2}{t}x-\frac{cos\,t}{t}$$

que es una ecuación diferencial lineal considerando x como función de t. Resolviéndola se obtiene la solución:

$$x(t) = C\cdot t^{-2} - t^{-1}\cdot sen\ t - t^{-2}\cdot cos\ t,$$

y sustituyendo este valor en y se tiene que:

$$y(t) = 2C\cdot t^{-1} - sen\ t - 2t^{-1}\cdot cos\ t\ .$$

La solución general de la ecuación en forma paramétrica es $(x(t), y(t))$:

$$\begin{cases} x(t) = Ct^{-2} - t^{-1}\cdot sen\ t - t^{-2}\cdot cos\ t \\ y(t) = 2Ct^{-1} - sen\ t - 2t^{-1}\cdot cos\ t \end{cases}$$

Ejercicios

7.33. Resolver la ecuación diferencial: $x \cdot y' + y = y^2 \cdot \ln x$.

7.34. Dada la ecuación diferencial $3x \cdot y' - 2y = \dfrac{x^3}{y^2}$, calcular la solución general.

7.35. Calcular la solución general de la ecuación diferencial:

$$2\, sen\, x \cdot y' + y \cdot \cos x = y^3 \cdot (x \cdot \cos x - sen\, x).$$

7.36. Integrar la ecuación diferencial $2y = x \cdot y' + y' \cdot \ln y'$.

7.37. Resolver la ecuación diferencial: $y' \cdot (x^3 + x^2) + y^2 - 3x^2 \cdot y - 4x^3 = 0$ sabiendo que admite soluciones polinómicas de grados uno y dos. Si $y = \varphi(x)$ es la solución tal que $-1 = \varphi(-1)$, calcular $\varphi(2)$. (*Solución*: $\varphi(2) = 2$)

7.3.7. Trayectorias ortogonales

Sea una ecuación de la forma $\phi(x, y, C) = 0$ donde C es un parámetro que puede tomar distintos valores. Cada valor de C determina una curva en el plano de manera que dando a C todos los valores posibles se obtiene un haz de curvas, que queda definido por la ecuación anterior.

Definición 7.3.10:

Dada una familia uniparamétrica de curvas: $\phi(x, y, C) = 0$, se denominan ***trayectorias isogonales*** de la familia al haz de curvas en el que cada elemento corta a las curvas de la familia dada bajo un ángulo constante.

Cuando el ángulo que forman vale $\frac{\pi}{2}$, las trayectorias se denominan ***trayectorias ortogonales***.

Si se suponen dos cargas eléctricas iguales en dos puntos fijos del plano y una tercera carga que se desplaza en ese plano bajo la acción de las dos primeras, el movimiento de la carga libre sigue una trayectoria que corta perpendicularmente a las líneas equipotenciales del campo creado por las dos primeras cargas.

Este fenómeno es general: en un campo gravitatorio, térmico, electromagnético, ..., las curvas de nivel y las líneas de flujo se cortan ortogonalmente; por esta razón es importante tener un procedimiento para calcular el haz de curvas formado por las trayectorias ortogonales a las curvas de otra familia dada.

La solución general de una ecuación diferencial de primer orden $F(x, y, y') = 0$ es una familia uniparamétrica de curvas $\phi(x, y, C) = 0$.

Recíprocamente, en el *apartado 7.2.8* de este capítulo se ha desarrollado un método para calcular la ecuación diferencial de un haz de curvas $\phi(x, y, C) = 0$, que consiste en eliminar el parámetro C entre la ecuación que define el haz y la que resulta de derivar con respecto a x esta ecuación. Es decir:

Eliminando C en $\left.\begin{array}{l} \phi(x, y, C) = 0 \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial x} + \dfrac{\partial \phi}{\partial y} y' = 0 \end{array}\right\}$ se obtiene $F(x, y, y') = 0$.

Dada la familia de curvas $\phi(x, y, C) = 0$ que tiene por ecuación diferencial $F(x, y, y') = 0$, se tiene que y' es el coeficiente angular de las tangentes a las curvas de la familia, por lo tanto la pendiente de las tangentes de las trayectorias ortogonales es $\dfrac{-1}{y'}$ y la ecuación diferencial que las define $F(x, y, \dfrac{-1}{y'}) = 0$. Al integrar, la solución general $\phi_1(x, y, K) = 0$ determina el haz de trayectorias ortogonales de la familia dada.

Trayectorias isogonales

Si se pretende calcular el haz de curvas que cortan con un ángulo fijo α a las curvas de una familia dada $\phi(x, y, C) = 0$, cuya ecuación diferencial es $F(x, y, y') = 0$, existen dos familias de soluciones ya que las pendientes de las rectas tangentes a las curvas de la familia que se quieren calcular pueden ser $tg(\beta + \alpha)$ o $tg(\beta - \alpha)$ donde $tg\,\beta = y'$.

Como $tg(\beta + \alpha) = \dfrac{tg\beta + tg\alpha}{1 - tg\beta \cdot tg\alpha}$ y $tg(\beta - \alpha) = \dfrac{tg\beta - tg\alpha}{1 + tg\beta \cdot tg\alpha}$ para $m = tg(\alpha)$ se tiene $tg(\beta + \alpha) = \dfrac{y' + m}{1 - my'}$ y $tg(\beta - \alpha) = \dfrac{y' - m}{1 + my'}$, por lo tanto las dos familias de trayectorias isogonales están determinadas por las ecuaciones diferenciales $F(x, y, \dfrac{y' + m}{1 - my'})$ y $F(x, y, \dfrac{y' - m}{1 + my'})$ y se calculan resolviendo estas ecuaciones.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 7.3.22: Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de rectas que pasan por el origen definida por $y = Cx$.

Se calcula su ecuación diferencial eliminando k entre las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} y - Cx = 0 \\ -C + y' = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y - y' \cdot x = 0.$$

Sustituyendo y' por $\dfrac{-1}{y'}$ se obtiene la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales:

$$y + \frac{1}{y'} x = 0 \Rightarrow y \cdot y' + x = 0 \Rightarrow y \cdot dy = -x\, dx,$$

cuya solución general es:

$$x^2 + y^2 = K,\ (K > 0),$$

que son circunferencias con centro en el origen de coordenadas, y constituyen la familia de las trayectorias ortogonales de la familia de rectas $y = Cx$.

Ejemplo 7.3.23: Hallar las familias de curvas que cortan al haz de rectas y

= Cx bajo un ángulo $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$.

Eliminando C, entre las ecuaciones:

$$\begin{cases} y = Cx \\ y' = C, \end{cases}$$

se obtiene la ecuación diferencial del haz de rectas $y = y' \cdot x$.

Sea $m = tg(\alpha)$, sustituyendo y' por $\frac{y'+m}{1-my'}$ se obtiene la ecuación diferencial de la familia buscada:

$$y = \frac{y'+m}{1-my'} \cdot x \Rightarrow y \cdot (1 - my') = x \cdot (y' + m) \Rightarrow y' \cdot (x + my) = y - xm,$$

ecuación homogénea cuya solución general es:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = Ke^{-\frac{1}{m} arctg \frac{y}{x}}.$$

Análogamente sustituyendo y' por $\frac{y'-m}{1+my'}$ se obtiene la ecuación diferencial:

$$y' \cdot (x - my) = y + xm,$$

cuya solución general es:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = Ke^{\frac{1}{m} arctg \frac{y}{x}}.$$

Estas dos familias de curvas expresadas en forma polar son: $\rho = Ke^{-\frac{\theta}{m}}$ y, $\rho = Ke^{\frac{\theta}{m}}$ es decir, están formadas por espirales logarítmicas.

Ejercicios

7.38. Calcular las trayectorias ortogonales al haz de curvas $y^2 = 4C \cdot x$.

7.39. Dada la familia de curvas $y = C \cdot e^{-x^2}$, calcular el haz de las trayectorias ortogonales.

7.40. Calcular las trayectorias isogonales que cortan con un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes al haz de circunferencias $x^2 + y^2 = C$.

7.41. Hallar el haz de las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $e^x \cdot \cos y = C$.

7.3.8. Envolvente de un haz de curvas

Definición 7.3.11:

Se denomina ***envolvente*** de un haz de curvas a una curva que verifica que en cada uno de sus puntos es tangente a una curva del haz.

Ecuación de la envolvente de un haz de curvas

Sea $\phi(x, y, C) = 0$ la ecuación que define un haz de curvas dependientes del parámetro C, y sea $y = \varphi(x)$ la envolvente de dicho haz donde $\varphi(x)$ es una función que se supone derivable.

Sea $P(x, y)$ un punto de la envolvente. Como por definición este punto pertenece a una curva del haz para un determinado valor de C, viene determinado por la ecuación $C = C(x, y)$, que verifica la ecuación del haz. Es decir: $\phi(x, y, C(x, y)) = 0$

Para calcular el coeficiente angular de la tangente a la curva del haz en el punto $P(x, y)$, se deriva con respecto a x la ecuación anterior:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}y'+\frac{\partial\phi}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial C}\frac{\partial C}{\partial y}y' = 0 \Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}y'+\frac{\partial\phi}{\partial C}\left(\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial y}y'\right) = 0$$

El coeficiente angular de la tangente a la curva del haz que pasa por el punto $P(x, y)$ se deduce de la ecuación $\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}y'=0$ ya que en esta curva C es constante.

Se supone que $\frac{\partial\phi}{\partial y}\neq 0$ (en caso contrario $\frac{\partial\phi}{\partial x}\neq 0$ y se consideraría x como función de y).

El coeficiente angular de la envolvente en el punto P ha de ser el mismo por lo que tiene que verificar que $\frac{\partial\phi}{\partial C}\left(\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial y}y'\right)=0$.

Como la función $C(x, y)$ no es constante $\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial y}y'\neq 0$ y por lo tanto se verifica que $\frac{\partial \phi}{\partial C}(x, y, C) = 0$.

La ecuación de la envolvente resulta de eliminar el parámetro C entre las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \phi(x, y, C) = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial C}(x, y, C) = 0 \end{array}\right\} \qquad (7.3.2)$$

Sin embargo no toda solución de este sistema es una envolvente del haz ya que si una cierta función $y = \alpha(x)$ es la ecuación del lugar geométrico de los puntos singulares del haz de curvas, es decir, de los puntos que verifican $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$, entonces las coordenadas de estos puntos también verifican las ecuaciones (7.3.2).

En efecto, como las coordenadas de los puntos singulares se pueden expresar en función del parámetro C, si $x = p(C)$ e $y = q(C)$, se verifica que:

$$\phi(p(C), q(C), C) = 0,$$

derivando esta expresión con respecto a C se tiene que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{dp}{dC} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{dq}{dC} + \frac{\partial \phi}{\partial C} = 0,$$

por lo que $\frac{\partial \phi}{\partial C} = 0$ y se verifican las ecuaciones (7.3.2).

Por lo tanto, al obtener una curva que verifica estas ecuaciones hay que determinar si es la envolvente o si es el lugar geométrico de los puntos singulares o bien si es una combinación de ambas cosas.

El siguiente teorema proporciona una condición suficiente para que una curva solución del sistema (7.3.2) sea envolvente del haz.

Teorema 7.3.4:

Sea $\varphi(x, y)$ una curva solución del sistema $\left.\begin{array}{l} \phi(x, y, C) = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial C}(x, y, C) = 0 \end{array}\right\}$ donde la función $\phi(x, y, C)$ verifica las siguientes condiciones.

a) Las derivadas parciales $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ y $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ existen y están acotadas

b) $\frac{\partial \phi}{\partial x} \neq 0$ o bien $\frac{\partial \phi}{\partial y} \neq 0$.

Entonces $\varphi(x, y)$ es la envolvente del haz de curvas definido por la ecuación $\phi(x, y, C) = 0$.

Sin embargo estas condiciones no son necesarias, es decir una función solución de (7.3.2) puede ser envolvente del haz y no cumplir alguna de las condiciones anteriores.

En general la ecuación que resulta de eliminar *C* en el sistema de ecuaciones (7.3.2) se denomina *C*-discriminante y la curva determinada por esta ecuación curva *C*-discriminante o *CCD*.

El *C*-discriminante contiene a la envolvente (E), al lugar geométrico de los puntos anodales (A) al cuadrado y al lugar geométrico de los puntos cuspidales o de retroceso (R) al cubo, es decir $\Delta_C = E{\cdot}A^2{\cdot}R^3$.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 7.3.24: Hallar la envolvente del haz de curvas definido por la ecuación $(x - C)^2 + y^2 - 4 = 0$.

Para calcular la envolvente de este haz de circunferencias de radio 2 con centro en el eje de abscisas se halla la curva *C*-discriminante que resulta de eliminar *C* en el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} (x-C)^2+y^2-4=0 \\ 2(x-C)=0 \end{array}\right\}$$

y se obtienen las rectas $y = \pm 2$, que son la envolvente del haz, ya que las circunferencias no tienen puntos singulares.

Ejemplo 7.3.25: Calcular la envolvente del haz de curvas $y^2 - (x + C)^3 = 0$.

Para calcular la envolvente de esta familia se halla la curva *C*-discriminante, que resulta de eliminar *C* en el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} y^2-(x+C)^3=0 \\ -3(x-C)^2=0 \end{array}\right\}$$

que tiene como solución la recta $y = 0$.

Como $\frac{\partial\phi}{\partial x} = -3(x+C)^2 = 0$ y $\frac{\partial\phi}{\partial y} = 2y = 0$, la ecuación $y = 0$ representa el lugar geométrico de los puntos singulares de la familia. Pero a la vez la recta $y = 0$ es la envolvente de la familia, pues en cualquier punto $(-C, 0)$ tanto para la recta $y = 0$ como para $y = (x + C)^{3/2}$ sus coeficientes angulares son iguales.

Ejercicios

7.42. Calcular la envolvente del haz de curvas $y\cdot(C - x) = C^2$.

7.43. Hallar la envolvente de la familia de curvas $y = C\cdot e^x + \dfrac{1}{C}$.

7.44. Calcular la envolvente del haz de curvas $x^2 + C\cdot(x - 3y) + C^2 = 0$.

7.3.9. Soluciones singulares

Definición 7.3.12:

Una solución $y = \varphi(x)$ de una ecuación diferencial $F(x, y, y') = 0$ se llama ***singular*** si verifica dicha ecuación, y además por cada uno de sus puntos $(x_0, \varphi(x_0))$ pasa también una solución particular de la ecuación diferencial que en ese punto tiene la misma tangente pero que no coincide con ella en un entorno suficientemente pequeño del punto.

Si la función $F(x, y, y')$ y sus derivadas parciales $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y'}$ son continuas con respecto a x, y e y' cualquier solución singular verifica también que $\dfrac{\partial F}{\partial y'}(x,y,y')=0$.

La ecuación que se obtiene al eliminar y' entre esta ecuación y la ecuación inicial se denomina *p*-discriminante y la curva que determina curva *p*-discriminante o abreviadamente *CPD*.

El *p*-discriminante contiene a la envolvente (E), al lugar geométrico de los puntos de contacto al cuadrado (C) y al lugar geométrico de los puntos cuspidales o de retroceso (R), es decir $\Delta_P = E\cdot C^2\cdot R$.

Entre estos lugares geométricos sólo la envolvente del haz de soluciones de la ecuación diferencial es una solución singular y el hecho de saber que esta curva es también *C*-discriminante facilita la obtención de la solución singular.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 7.3.26: Calcular las soluciones singulares de la ecuación diferencial $y'^2 - y\cdot y' + e^x = 0$.

Para hallar las soluciones singulares de esta ecuación, se calcula primero la *CPD* eliminando y' en el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} y'^2 - y.y' + e^x = 0 \\ 2y' - y = 0 \end{array}\right\}.$$

Se obtiene $y^2 = 4e^x$.

Se calcula la solución general de la ecuación diferencial despejando *y* en la ecuación y haciendo el cambio $y' = p$.

Se obtiene $x = lnp + C$, por lo que la solución general en paramétricas viene dada por:

$$\left.\begin{array}{l} x = ln\, p + C \\ y = p + \dfrac{e^x}{p} \end{array}\right\}.$$

Al eliminar el parámetro *p* se tiene que $y = e^x \cdot C^{-1} + C$.

Se calcula ahora la *CCD* de esta familia de curvas, eliminando *C* en el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{e^x}{C} + C \\ -\dfrac{e^x}{C^2} + 1 = 0 \end{array}\right\}.$$

Se obtiene también $y^2 = 4e^x$.

Como las curvas $y = \pm\, 2\, e^{x/2}$ son *C*-discriminantes y *p*-discriminantes, son la envolvente del haz de soluciones generales de la ecuación y por lo tanto son soluciones singulares.

Ejemplo 7.3.27: Hallar las soluciones singulares de la ecuación diferencial $y'^2 \cdot (2 - 3y)^2 = 4(1 - y)$.

Para calcular las soluciones singulares de esta ecuación, se calcula la *CPD* eliminando *y'* en el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y'^2 (2-3y)^2 = 4(1-y) \\ 2y'(2-3y)^2 = 0 \end{array}\right\}$$

y se obtiene $(2 - 3y)^2 \cdot (1 - y) = 0$.

Se halla la solución general de la ecuación diferencial considerando *x* como función de *y* así $\dfrac{dx}{dy} = \pm \dfrac{2-3y}{\sqrt{1-y}}$ y se obtiene:

$$x = y\sqrt{1-y} + C,$$

que se puede expresar de la forma:

$$(x - C)^2 = y^2 \cdot (1 - y).$$

Se calcula la *CCD* de este haz de curvas eliminando *C* en el sistema:

$$\left.\begin{array}{c}(x-C)^2 = y^2(1-y)\\ 2(x-C)=0\end{array}\right\}$$

de donde resulta $y^2\cdot(1 - y) = 0$.

Comparando los resultados de la *CPD* y la *CCD* se tiene que el único factor común es $(1 - y)$, por lo tanto $y = 1$ es la ecuación de la envolvente y una solución singular de la ecuación diferencial.

El factor $2 - 3y$ que está elevado a 2 en el *p*-discriminante, como no figura en el *C*-discriminante, representa el lugar geométrico de los puntos de contacto, que viene dado por la ecuación $2 - 3y = 0$

Por otra parte el factor *y* no figura en el *p*-discriminante y está elevado a 2 en el *C*-discriminante, luego la ecuación $y = 0$ representa el lugar geométrico de los puntos anodales.

Ejercicios

7.45. Hallar las soluciones singulares de la ecuación diferencial $y'^2 - 4y = 0$.

7.46. Calcular las soluciones singulares de la ecuación diferencial $y = x\cdot y' + y'^2$, que tiene por solución general $y = Cx + C^2$.

7.47. Hallar las soluciones singulares de la ecuación diferencial:

$$y^2\cdot y'^2 + y^2 = 1,$$

sabiendo que tiene por solución general $(x - C)^2 + y^2 = 1$.

7.3.10. Aplicaciones

Circuitos eléctricos

En el *apartado 7.2.5* de este capítulo se estudió que en un circuito eléctrico formado por una fuerza electromotriz *E* que impulsa una carga eléctrica y produce una corriente de intensidad *I,* una resistencia *R* que se opone a la corriente, un inductor de inductancia *L*, que se opone a cualquier cambio en la corriente, y un condensador de capacitancia *C*, que almacena una carga *Q* y se opone a la entrada de una carga adicional, aplicando la ley de Kirchhoff, se obtenía la ecuación diferencial:

$$L\cdot\frac{dI}{dt} + R\cdot I + \frac{1}{C}\cdot Q = E.$$

Cuando no existe condensador y *E* tiene un valor constante E_0 se tiene que $L\cdot\frac{dI}{dt} + R\cdot I = E_0$, que es una ecuación diferencial lineal de primer orden con variables separadas $L\cdot\frac{dI}{dt} = E_0 - R\cdot I$, luego $\frac{dI}{E_0 - RI} = \frac{dt}{L}$, e integrando:

$$-\ ln(E_0 - RI) = \frac{Rt}{L} + K.$$

Si se sabe que en el instante $t = 0$, hay una corriente inicial I_0, la constante K se puede determinar: $K = -\ ln(E_0 - R\cdot I_0)$.

Sustituyendo en la ecuación:

$$-\ ln(E_0 - RI) = \frac{Rt}{L} - ln(E_0 - R\cdot I_0) \Rightarrow E_0 - RI = (E_0 - RI_0)e^{\frac{-Rt}{L}},$$

despejando I se tiene:

$$I = \frac{E_0}{R} - \frac{E_0 - RI_0}{R}e^{\frac{-Rt}{L}} = \frac{E_0}{R} + \left(I_0 - \frac{E_0}{R}\right)e^{\frac{-Rt}{L}}.$$

Se observa que I tiene una parte constante $\frac{E_o}{R}$ y una parte transitoria $\left(I_0 - \frac{E_0}{R}\right)e^{\frac{-Rt}{L}}$ que tiende a 0 para valores grandes de t, en cuyo caso límite se verifica la ley de Ohm: $E_0 = R\cdot I$.

Cuando $I_0 = 0$, se verifica que $I = \frac{E_0}{R}(1 - e^{\frac{-Rt}{L}})$, y si $E_0 = 0$, entonces:

$$I = I_0 e^{\frac{-Rt}{L}}.$$

La curva tractriz

Sea T un punto que a partir del origen se desplaza a lo largo de la parte positiva del eje de ordenadas, y que arrastra a un punto P, que parte del eje de abscisas, a lo largo del plano con una cuerda de longitud a. La curva que describe el punto P se denomina ***tractriz***.

Si inicialmente T está en el origen de coordenadas y la longitud de $PT = a$, P parte del punto $(a, 0)$.

En un punto $P(x, y)$ cualquiera de la curva $y = f(x)$ se verifica que:

$$y' = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x},$$

ecuación diferencial de primer orden que define la curva tractriz.

Integrando y aplicando que la curva pasa por el punto (a, 0) se obtiene la ecuación:

$$y = a \cdot log\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right) - \sqrt{a^2-x^2}\ .$$

La superficie obtenida al hacer girar esta curva en torno al eje de ordenadas es un modelo para la geometría no euclídea de Lobachevsky.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 7.3.28: Resolver la ecuación $\frac{dm}{dt} = -k \cdot m$, que rige los procesos de desintegración en reacciones químicas de primer orden (siendo $k > 0$ el coeficiente de proporcionalidad).

Esta ecuación de primer orden, que surgió en el *apartado 7.2.1*, es de variables separadas y por tanto $\frac{dm}{m} = -k \cdot dt$. Al integrar ambos miembros de la ecuación se obtiene $ln\ m = -k \cdot t + ln\ C$ y la solución general de esta ecuación viene dada por $m(t) = C \cdot e^{-kt}$.

Ejemplo 7.3.29: Resolver la ecuación diferencial $m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot g - k \cdot v$.

Esta ecuación diferencial lineal no homogénea de primer orden, que surgió en el *apartado 7.2.2*, modeliza el proceso de caída de un cuerpo de masa m, sobre el que actúa, además de la fuerza de gravedad, la resistencia del aire, que es proporcional a su velocidad, con coeficiente de proporcionalidad k.

La solución de la ecuación proporciona la velocidad, v, del cuerpo al caer.

Se resuelve primero la ecuación diferencial lineal homogénea asociada: $m \cdot \frac{dv}{dt} + k \cdot v = 0$. Se separan las variables $\frac{dv}{v} = \frac{-k}{m} dt$. Se integra:

$$ln\ v = \frac{-k}{m} t + ln\ C \Rightarrow v_H(t) = C \cdot e^{-\frac{k}{m}t}\ .$$

Se busca una solución particular de la ecuación diferencial lineal no homogénea por el método de variación de constantes:

$$v_P(t) = C(x)\cdot e^{-\frac{k}{m}t}$$

y se sustituye en la ecuación:

$$m\cdot(C'(x)\cdot e^{-\frac{k}{m}t} + C(x)\cdot(-\frac{k}{m})e^{-\frac{k}{m}t}) + kC(x)\cdot e^{-\frac{k}{m}t} = m\cdot g \Rightarrow$$

$$m\cdot C'(x)\cdot e^{-\frac{k}{m}t} = m\cdot g \Rightarrow C'(x) = ge^{\frac{k}{m}t},$$

integrando $C(x) = \frac{mg}{k}e^{\frac{k}{m}t}$ y la solución particular buscada es:

$$v_P(t) = \frac{mg}{k}.$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación es:

$$v(t) = C\cdot e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}.$$

Ejercicios

7.48. En la descomposición del azúcar de caña en una disolución de dextrosa y levulosa, la velocidad de transformación es proporcional a la cantidad de azúcar no descompuesta. Si m_0 es la cantidad de azúcar inicial, k el coeficiente de proporcionalidad y $m(t)$ la cantidad transformada en el tiempo t, expresado en minutos, se pide:

a) Calcular la ecuación diferencial del proceso.

b) El tiempo necesario para transformar todo el azúcar.

7.49. Demostrar que la tractriz es ortogonal a la familia de círculos de radio a y centros en el eje de ordenadas.

7.4. EJERCICIOS

7.50. Integrar la ecuación diferencial $y' = y\cdot|y|$, y hacer un esbozo de la gráfica de las curvas integrales.

7.51. Se supone que por el punto $(x, y) \in \mathfrak{R}^2$ pasa una curva integral y una isoclina de la ecuación $y' = f(x, y)$. Obtener la expresión del ángulo que forman ambas curvas.

7.52. Hallar la curva que pasando por el punto (1, 1) es tal que, para cada uno de sus puntos, la ordenada del punto de corte de la tangente con el eje *OY* y la abscisa del punto de corte de la normal con el eje *OX*, tienen el mismo valor.

7.53. Una curva pasa por el punto (1, 1) y el producto de la abscisa de un punto cualquiera de la curva, por la ordenada del punto de corte de la tangente a la curva en dicho punto con el eje *OY*, vale siempre 3. Obtener el punto donde la curva corta a la recta $x = 2$.

(*Solución*: –1/4).

7.54. Determinar la curva que pasa por el punto (5, 5) y es tal que la ordenada en cada punto *P* es igual a la distancia del origen a la recta normal a la curva en el punto *P*.

(*Solución*: $x^2 + y^2 = 10x$).

7.55. Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $x^2y' = 2y^2 - xy$ (*Solución*: $y = \dfrac{x}{1-Cx^2}$).

b) $(-x^2 + y^2)dy = 2xy\,dx = 0$ (*Solución*: $1 + x^2y^2 = Cy$).

c) $y' + y + y^2(sen\,x + cos\,x) = 0$ (*Solución*: $y = \dfrac{1}{Ce^x - cos\,x}$).

d) $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$ (*Solución*: $y = (Cx^2 + x^2 \ln \sqrt{x}\,)^2$), $y > 0$).

7.56. Integrar las siguientes ecuaciones diferenciales, sabiendo que admiten un factor integrante que depende sólo de *x* o sólo de *y*:

a) $2xy^3\,dx + (5x^2y^2 + 3)\,dy = 0$ (*Sol*: $\mu = y^2$; $x^2 \cdot y^5 + y^3 + C = 0$).

b) $-sen\,y(cos\,x + sen\,x)dx + cos\,x\,cos\,y\,dy = 0$

(*Sol*: $\mu = e^{-x}$; $e^{-x} \cdot cos\,x \cdot sen\,y - C = 0$).

c) $(9y^2 - 4x)\,dx + 6xy\,dy = 0$ (*Sol*: $\mu = x^2$; $3x^2y^2 - x^4 + C = 0$).

7.57. Integrar la ecuación diferencial $x \cdot y' - 2y = 2x$.

(*Sol*: $y = Cx^2 + 2x$).

7.58. Resolver la ecuación diferencial $y' - y = -2e^{-x}$.

(*Sol*: $y = e^{-x} + Ce^x$).

7.59. Integrar la ecuación diferencial: $x \cdot y' + y + x^2 \cdot y^2 = 0$.

(*Sol*: $Cx \cdot y - x^2 \cdot y + 1 = 0$).

7.60. Resolver la ecuación $\left(\dfrac{y^2}{x} - y\right)dx + xdy = 0$.

(*Solución*: $\ln x = \frac{x}{y} + C$)

7.61. Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $e^x \cdot \cos y = C$.

(*Solución*: $e^x \cdot \operatorname{sen} y = C$).

7.62. Calcular las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $y = Cx^3$.

7.63. Resolver la ecuación diferencial $(x^2 + y^2)\cdot dx - 2x\cdot y\cdot dy = 0$.

7.64. Hallar las soluciones singulares de la ecuación diferencial $(x\cdot y' + y)^2 = y^2\cdot y'$, sabiendo que su solución general es $y\cdot(C - x) = C^2$.

7.65. Dada la ecuación diferencial $y'^2 - y\cdot y' + e^x = 0$, calcular sus soluciones singulares, sabiendo que la solución general de la ecuación es $y = Ce^x + \frac{1}{C}$.

7.66. Hallar las trayectorias ortogonales del haz de curvas $x^2 + y^2 + Cx = 0$.