# ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

El Análisis ha sido durante trescientos años una de las ramas más importantes de la Matemática, y las ecuaciones diferenciales constituyen la parte central del Análisis, además es la que mejor permite comprender las ciencias físicas y la técnica. Las cuestiones que plantean proporcionan una fuente de teoría e ideas que permiten avanzar al pensamiento.

En este libro se pretende establecer la relación existente entre las matemáticas puras y las aplicadas, por lo que se ha considerado muy interesante introducir las ecuaciones diferenciales presentando muchos ejemplos concretos y situaciones sencillas del mundo real, y de esta forma conseguir dos objetivos, por un lado la comprensión de la importancia histórica que las ecuaciones diferenciales han tenido en el desarrollo de la Matemática y su actual vigencia y relevancia, es decir, el interés que tiene su estudio desde el punto de vista matemático. Por otro lado, al estudiar modelos válidos para explicar situaciones sencillas del mundo real, se motiva la aplicación en contextos diversos y el tratamiento de diferentes cuestiones asociadas a ellos, como existencia y unicidad de las soluciones de un problema de valor inicial, estabilidad, problemas de contorno, comportamiento cualitativo de las soluciones, que explican la solución del problema y permiten generalizar los resultados. Para que el ingeniero pueda usar con confianza las ecuaciones diferenciales debe tener un cierto dominio sobre las técnicas de solución y un conocimiento suficiente sobre la teoría básica.

Las ecuaciones diferenciales aparecen en casi todas las áreas de la Ingeniería Civil, desde la Resistencia de Materiales hasta la Hidráulica. Pero también tienen como finalidad básica servir como instrumento para el estudio del cambio en el mundo físico; por todo esto se exponen aplicaciones tales como la del problema de la braquistócrona, las leyes de Kepler, el oscilador armónico, la teoría del potencial, las ecuaciones depredador-presa, la mecánica no lineal, el principio de *Hamilton* o el problema mecánico de *Abel*..., pues el tratamiento matemático de estos problemas es un gran logro para nuestra civilización.

La razón de esta gran cantidad de aplicaciones se debe a que la derivada se puede interpretar como el índice de cambio de una variable respecto de la otra, y las variables que explican los fenómenos se relacionan entre sí por sus índices de cambio. Al expresar estas relaciones mediante símbolos matemáticos se obtiene una gran cantidad de ecuaciones diferenciales.

Es interesante detenerse en algunas de las aplicaciones, pues como dice *Simmons*[1]: *"... que tratan sobre este tema* (ecuaciones diferenciales ordinarias) *me hacen pensar en un autobús turístico cuyo conductor conduce a gran velocidad para cumplir sus horarios, y sus pasajeros tienen pocas o ninguna oportunidad para gozar del paisaje. Es mejor que lleguemos algunas veces con retraso; pero que obtengamos un mayor provecho del viaje".* Por ello es necesario programar cuidadosamente el viaje, para detenerse y gozar de los mejores paisajes de las ecuaciones diferenciales, aunque procurando llegar sin retraso.

1 Simmons, F. (1988): *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones y notas históricas*. McGraw-Hill.

Para captar la naturaleza y el interés de las ecuaciones diferenciales y desarrollar métodos para resolver problemas científicos y técnicos no es conveniente construir una estructura matemática lógicamente impecable, y si se tiene presente además los niveles de rigor comentados por *Freudenthal* es preciso alcanzar exactamente el nivel de rigor adecuado, sin pasarse ni quedarse cortos, y en algunas ocasiones, presentar argumentos razonablemente convincentes, aunque puedan no ser auténticas demostraciones para el profesorado de matemáticas. La historia proporciona la génesis de los conceptos, y ya se sabe que muchos grandes matemáticos cometieron, con la óptica actual, graves errores, pero que sin embargo aportan noticia de la dificultad que pueden tener esos conceptos cuando son aprendidos por primera vez. En este libro se trata por tanto de combinar, de la forma más adecuada, el conocimiento teórico con una gran variedad de aplicaciones.

Los **objetivos** que se plantean en esta sección son los siguientes:

1. Comprender los conceptos sobre ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones diferenciales.

2. Introducir una serie de métodos y técnicas de solución que se deberán manejar con soltura, que permitan calcular la solución de determinadas ecuaciones diferenciales, y en particular de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales y de las ecuaciones diferenciales lineales de orden superior con coeficientes constantes.

3. Aplicar a problemas de valor inicial las hipótesis y conclusiones de los teoremas de existencia y unicidad presentados, lo que en la actualidad

resulta de gran importancia para poder utilizar los métodos numéricos.

4. Saber realizar el análisis de las aplicaciones, con construcción de modelos e interpretación de las soluciones.

5. Puesto que pueden presentarse problemas que, por los teoremas de existencia y unicidad estudiados, se sabe que tienen solución, pero no se conocen métodos para calcularla, (o son demasiado complicados), se dedica una sección completa a la resolución numérica del problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_o) = y_0 \end{cases}$$

6. Analizar el comportamiento cualitativo de las soluciones.

# HISTORIA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

Las **ecuaciones diferenciales** sirven como modelo matemático para el estudio de problemas que surgen en disciplinas muy diversas. Desde sus comienzos han contribuido de manera muy notable a solucionar muchas cuestiones y a interpretar numerosos fenómenos de la naturaleza. Su origen histórico es inseparable de sus aplicaciones a las ciencias físicas, químicas e ingeniería, ya que para resolver muchos problemas significativos se requiere la determinación de una función que debe satisfacer una ecuación en la que aparece su derivada.

En la historia de las ecuaciones diferenciales se pueden considerar cinco etapas[2], donde cada una de ellas marca un avance definitivo. La primera etapa iría desde los inicios hasta 1 820 cuando *Cauchy* publica su teorema de existencia, que da inicio a la segunda etapa que marca la edad del rigor. La tercera comienza en 1 870 con *M. S. Lie* (1 842 – 1 899) y la aplicación de la teoría de grupos continuos a las ecuaciones diferenciales, particularmente aquellos de la dinámica de *Hamilton-Jacobi*. La cuarta comienza en 1 880 con el trabajo de *E. Picard* (1 856 – 1 941) y su teorema de existencia. La construcción de las ecuaciones diferenciales es análoga a la teoría de las ecuaciones algebraicas de *Galois*. La última etapa comienza en 1 930 donde el análisis se hace más general. Ya *E. H. Moore* en 1 908 estudia ecuaciones con un número infinito numerable de variables; ahora se estudiarán ecuaciones diferenciales de dimensión infinita, y comienza el cálculo de variaciones y el análisis funcional.

Quizá se podría situar **la primera idea** sobre ecuación diferencial hacia finales del siglo XVI y principios del siglo XVII en los trabajos realizados por *John Napier* (1 550 – 1 617) cuando inventó los logaritmos. Vistas las tablas confeccionadas por él, si se utilizara el simbolismo moderno del cálculo infinitesimal, se podrían considerar como la resolución numérica de una ecuación diferencial.

Lo infinitamente pequeño tenía para *Galileo Galilei* (1 564 – 1 642) una importancia más inmediata que lo infinitamente grande, puesto que lo necesitaba en su dinámica. Galileo analizó el comportamiento del movimiento de un proyectil con una componente horizontal y uniforme, y una componente vertical uniformemente acelerada, consiguiendo demostrar que la trayectoria

[2] Bell, E. T. (1985): *Historia de las Matemáticas*. (2ª ed.). Edic. Fondo de Cultura Económica.

del proyectil, despreciando la resistencia del aire, es siempre una parábola. Estudió el problema del espacio recorrido por un cuerpo en caída libre y se puede considerar que utilizó para su resolución ecuaciones diferenciales. De *Pierre Fermat* (1601-1665) dice *Laplace* que es el verdadero inventor del cálculo diferencial.

Las ecuaciones diferenciales aparecen simultáneamente al cálculo infinitesimal. Por ejemplo en 1 638 apareció el **problema de la tractriz**, propuesto por *René Descartes* (1 596 – 1 650) a *Fermat*, que realmente es un problema de tangentes a una curva, (no pudo resolverlo pues no conocía el cálculo), y fue resuelto en 1 674 por *Leibniz* y en 1 690 por *Jakob Bernoulli*, cuando ya se conocían los trabajos de *Newton* y *Leibniz*.

Las ecuaciones diferenciales comienzan con *Isaac Newton* (1 642 - 1727) y *Gottfried Withelm Leibniz* (1 646 – 1 716). Dice este último *"Considerando la matemática desde el comienzo del mundo hasta la época de Newton, lo que él ha hecho es, con mucho, la mitad mejor"*. Muy pronto los científicos se dan cuenta de que **las ecuaciones diferenciales son la expresión matemática de las leyes naturales**.

***Isaac Newton*** (1 642 – 1 727) nació el mismo año en que murió *Galileo*. Los problemas que motivaron sus descubrimientos fueron el estudio de la dinámica del punto y del sólido rígido. Sus primeros descubrimientos matemáticos datan de 1 665 en que expresó funciones en series de potencias, y empezó a pensar en la velocidad del cambio, o fluxión de magnitudes que varían de manera continua tales como áreas, longitudes, distancias, temperaturas, etc. asociando de manera conjunta ambos problemas, las series infinitas y las velocidades de cambio.

Figura 1: Isaac Newton (1 642 – 1 727)

El "*De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*", publicado en 1 711, contiene la primera exposición sistemática del cálculo, donde formula un método sistemático de diferenciación, (aunque no se distingue mucho del que publicó *Barrow* en 1 670). En 1 742 se publicó "*Methodus fluxionum et serierum infinitorum*", escrito hacia 1 671, en el que ya aparecen ecuaciones diferenciales. En 1 676 escribió "*De quadratura curvarum*" donde evitaba las cantidades infinitamente pequeñas reemplazándolas por las llamadas "razones primeras y últimas", aunque su primera obra impresa: "*Philosophiae naturalis principia mathematica*" fue en 1 687 siendo el trabajo científico más admirado de todos los tiempos, donde es plenamente consciente del papel de las ecuaciones diferenciales. Escribió, en la segunda ley de los principios, la ecuación de una piedra que cae por acción de la gravedad en diferentes medios: aire, agua, aceite... $mv' = mg - kv$ donde $m$, $g$ y $k$ son constantes reales mayores que cero, con lo que se obtiene una ecuación diferencial en la que se quiere encontrar $v = v(t)$. Pero esta ecuación diferencial no proporciona propiamente el estado sino que dice como evoluciona el sistema. Para conocer el estado se debe imponer una condición inicial.

La influencia cultural fue tremenda. La naturaleza obedece a leyes generales. Da origen a la concepción filosófica de *Kant*, al pensamiento de la Ilustración y al determinismo científico por el que el conocimiento de estas leyes llevaría a conocer completamente el pasado y el futuro. Este concepto de que las leyes físicas son ecuaciones diferenciales es el único concepto de *Newton* que, en opinión de *Einstein*, sigue hoy totalmente vigente.

*Newton* clasifica las ecuaciones diferenciales en tres tipos:

a) $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = f(x)$ integral indefinida

b) $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = f(y)$

c) $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = f(x,y)$ caso general.

Cree saber resolverlas todas. Su método consiste en desarrollar la función *f* en serie de potencias, derivar, y sustituir término a término. El cálculo de coeficientes es recursivo y el primero es arbitrario (aunque la noción de constante arbitraria es más tardía).

A modo de ejemplo se transcribe una expresión de *Newton*:

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3x\dot{x}\dot{x}0 - a\dot{x}\dot{x}0 + a\dot{x}\dot{y}0 - 3y\dot{y}\dot{y}0 + \dot{x}^3 00 - y^3 00 = 0$$

donde se puede observar que había una cierta vaguedad en el modo de formulación.

Actualmente está claro que el descubrimiento de *Newton* precedió al de *Leibniz* en unos diez años, así como que *Leibniz* hizo sus descubrimientos de forma paralela a los de *Newton*, aunque a *Leibniz* le corresponde la prioridad de su publicación, pues publicó en la revista *"Acta Eruditorum"* una exposición del cálculo en 1 684.

***Gottfried Wilhelm Leibniz*** (1 646 – 1 716) leyó con atención las obras de *Pascal* sobre la cicloide, y se dio cuenta, hacia 1 673, de que la determinación de la tangente a una curva depende de la razón entre las diferencias entre las ordenadas y las abscisas, cuando estas diferencias se hacen infinitamente pequeñas. Se hacía pues necesario crear un lenguaje y una notación adecuados para tratar estos problemas, y lo elegido fue especialmente afortunado ya que facilitó el razonamiento lógico. Utilizó la notación que hoy día se emplea de *dx* y del signo de integral, fue el primero en introducir el término "*ecuación diferencial*" y el término "*derivar*" en el sentido de "deducir" (en una carta de *Leibniz* a *Newton*).

Figura 2: *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1 646 – 1 716)

Dice *Ince*:[3] "*Todos nuestros vagos conocimientos sobre el nacimiento y el desarrollo de la ciencia de las ecuaciones diferenciales se resume en una fecha importante, el 11 de noviembre de 1 675, cuando por primera vez Leibniz*

[3] Ince, E. L.: *Ordinary Differential Equations*. Longmans, Green, 1927.

*asertó en un papel la ecuación:* $\int y \cdot dy = \frac{1}{2} y^2$ ”.

El problema crucial que resolvió el cálculo de *Newton* y *Leibniz* fue el siguiente. Si una variable *y* depende de otra *x*, y se conoce la tasa de variación de *y* respecto de *x* para cambios muy pequeños de la variable *x*, lo que *Leibniz* ya denotó: $dy = f(x) \cdot dx$, entonces la determinación de *y* respecto de *x* se puede realizar mediante el cálculo de un área, lo que es conceptualmente mucho más simple. Esta idea de generalizar las operaciones de derivación e integración como inversas la una de la otra, es el núcleo fundamental de sus descubrimientos. Ya en el siglo XVII se habían resuelto muchos problemas particulares: la tractriz, la braquistócrona, la catenaria y algunos problemas isoperimétricos, pero el interés del trabajo de *Newton* y *Leibniz* reside en la generalización. *Leibniz* descubre métodos de separación de variables de resolución de ecuaciones homogéneas de primer orden y de ecuaciones lineales de primer orden, utiliza en 1696 el cambio $y = z^{1-n}$, y mantiene correspondencia con otros matemáticos, en especial con los hermanos *Bernoulli*.

En este periodo fundamentalmente se centra el esfuerzo en la búsqueda de métodos particulares de resolución aplicables a diferentes tipos concretos de ecuaciones diferenciales. Se pueden considerar los trabajos de los hermanos *Jakob Bernoulli* (1 654 – 1 705) y *Johann Bernoulli* (1 667 – 1 748), y del hijo de *Johann, Daniel Bernoulli* (1 700 – 1 782). La familia Bernoulli tuvo, en tres generaciones, ocho matemáticos, de los que los tres ya citados fueron extraordinarios.

Figura 3: *Jakob Bernoulli* (1 654 – 1 705)

En 1 690 ***Jakob Bernoulli*** resuelve el problema de la isócrona y plantea el problema de la catenaria. El **problema de la braquistócrona**, curva por la que el tiempo de caída es mínimo, propuesto en 1 696 por ***Johann Bernoulli,*** que es posible considerar como el origen del cálculo de variaciones, provocó discusiones entre ellos. *Daniel* asocia su nombre a la famosa ecuación de *Bernoulli* de la mecánica de fluidos.

*Jacob Bernoulli* estudió teología, pero pronto se dedicó a estudiar a *Newton* y a *Leibniz*. Fue profesor de matemáticas en Basilea. Su hermano más joven, *Johann Bernoulli* estudió medicina y se doctoró con una tesis sobre la contracción de los músculos, aunque pronto se sintió fascinado por el cálculo. En 1 695 fue profesor de matemáticas y física en Groningen, Holanda, y al morir su hermano, le sucedió como profesor en Basilea. *Daniel Bernoulli* estudió medicina como su padre y se doctoró con un trabajo sobre los pulmones. También como su padre fue profesor de matemáticas en San Petersburgo. Obtuvo diez premios de la Academia Francesa.

Los *Bernoulli* introdujeron los fundamentos para la clasificación de las ecuaciones diferenciales. Los primeros esfuerzos estuvieron dirigidos a reducir ecuaciones de primer orden a ecuaciones de variables separadas. *Leibniz* redujo la ecuación homogénea mediante la sustitución $y = u \cdot x$, y la lineal de primer orden mediante $y = u \cdot v$, y los *Bernoulli* redujeron a lineal la ecuación que hoy lleva su nombre. *Johann Bernoulli* utilizó factores integrantes y probó que la ecuación que hoy se denomina de *Euler* (pues *Euler* encontró la sustitución $x = e^t$) puede reducirse de orden multiplicando por un factor $x^k$.

Es interesante analizar las dificultades que encontraban en la solución de ecuaciones que hoy se consideran elementales, así como los logros que alcanzaron. A finales del siglo XVII se conocían muchos de los métodos elementales de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, y se dirigió la atención hacia las ecuaciones diferenciales de orden superior y las ecuaciones en derivadas parciales. En la tumba de *Jakob Bernoulli* aparece la espiral logarítmica y llevan su nombre la elástica de *Bernoulli* y la lemniscata de *Bernoulli*. *Johann Bernoulli* resolvió las trayectorias ortogonales a una familia dada como un reto con los ingleses. Por ejemplo, *Johann Bernoulli* en 1 694, al utilizar el método de separación de variables para integrar una ecuación diferencial, se dio cuenta de que en ocasiones, como ocurre en la ecuación diferencial $\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x}$, se oculta la naturaleza de las soluciones, y que si se multiplica por un factor integrante adecuado, como se llamará más tarde, se obtiene una solución algebraica.

De forma simplificada se considera el **siglo XVIII** como el siglo de la **integración elemental** de las ecuaciones diferenciales. Éstas se convirtieron en el instrumento básico de investigación en problemas de mecánica, geometría diferencial y cálculo de variaciones[4] y se relacionaron con la teoría de funciones de variable compleja y con las series trigonométricas. Aparecieron también algunos problemas físicos, como el problema de la cuerda vibrante, formulados en ecuaciones en derivadas parciales.

Las ecuaciones diferenciales encontrarán un gran número de aplicaciones durante la segunda mitad del siglo XVIII. Su estudio llegó a ser una de las disciplinas matemáticas más importantes debido a su utilización como herramienta fundamental en el campo científico y por la gran cantidad de problemas prácticos que con ellas se podían resolver. Los matemáticos más famosos del siglo XVIII contribuyeron enormemente al desarrollo de las ecuaciones diferenciales. Se pueden citar de una manera especial por la importancia de sus trabajos en este campo a *Euler* (1 707 – 1 783), *Clairaut* (1 713 – 1 765), *D'Alembert* (1 717 – 1 783), *Daniel Bernoulli* (1 700 – 1 782), *Lagrange* (1 736 –1 813) y *Laplace* (1 749 – 1 827). Se estudiaron los distintos tipos de ecuaciones diferenciales integrables por cuadraturas, se elaboraron los primeros procesos de aproximación y se introdujeron conceptos fundamentales dentro de la teoría como los de solución singular y solución general de una ecuación diferencial. Se estudiaron algunos tipos de ecuaciones de orden superior y se elaboraron los cimientos para una teoría geométrica de las ecuaciones en derivadas parciales.

***Leonard Euler*** obtuvo importantes progresos en la teoría de ecuaciones diferenciales, que utilizó en la resolución de problemas de mecánica celeste y de balística. Sobre el trabajo de *Euler* en mecánica dijo *Lagrange* que era el primer gran trabajo en el que se aplica el análisis a la ciencia del movimiento.

[4] Guzmán, M. (1975): *Ecuaciones diferenciales ordinarias. Teoría de estabilidad y control.* Alhambra.

Con él, la teoría de las ecuaciones diferenciales se transforma en una disciplina independiente, con sus dos ramas, ecuaciones diferenciales ordinarias y derivadas parciales. Los resultados fueron recogidos en la magistral obra *"Institutiones calculi integralis"* en cuatro tomos, publicados los tres primeros entre 1 768 y 1 770 y el cuarto en 1 794, siendo utilizado desde entonces como manual obligado para el estudio de matemáticas.

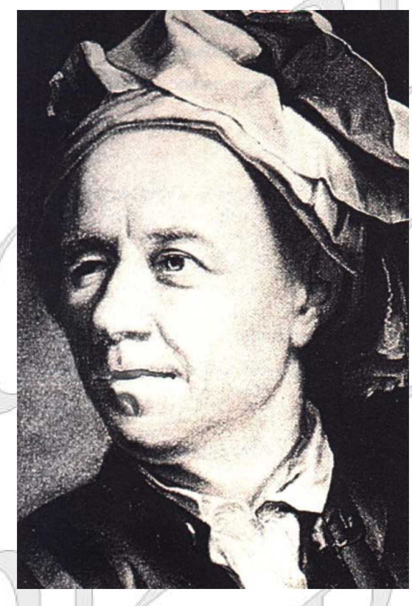

Figura 4: Leonhard Euler (1 707 – 1 783)

A él se deben varios cambios de variables, como aquellos que permiten reducir ecuaciones de segundo orden en ecuaciones de primer orden, y creó el concepto de factor integrante que proporciona la forma de integrar directamente algunas ecuaciones diferenciales ordinarias. En 1 735 trabajó las ecuaciones diferenciales mediante series, en 1 739 dio un tratamiento general de las ecuaciones diferenciales lineales ordinarias con coeficientes constantes encontrando una solución exponencial, dando en 1 743 el método más general de la ecuación característica, y resolviendo en 1 753 la ecuación no homogénea.

La teoría general de coeficientes variables se debe a *D'Alembert*, en 1765, y el método de variación de parámetros a *Lagrange* en 1 776.

Figura 5: Jean Le Rond d'Alembert (1 717 – 1 783)

Estudió la denominada "*Ecuación de Euler*" y algún caso particular de la ecuación de *Bessel*, (trabajada en un estudio más general por *F. W. Bessel* (1784 – 1 846)), para lo que usó series de potencias. Por ejemplo, buscando la solución de $u''_{xx} + u = 0$, encontró la función: $2\cos x$, y la función: $e^{xi} + e^{-xi}$, llegando por desarrollos en serie a la convicción de que ambas funciones coinciden, (de donde nacen las primeras ideas sobre como debe ser una función exponencial compleja).

Un problema en el que se interesaron los matemáticos del siglo XVIII fue el de encontrar el número de parámetros que determinan la solución de una ecuación diferencial. Una ecuación diferencial ordinaria de orden *n* escrita en forma explícita tiene una solución dependiente de *n* parámetros. Sin embargo se encontraron ejemplos de ecuaciones diferenciales en forma implícita que admitían soluciones con un número menor de parámetros, aunque, admitían también otras soluciones denominadas soluciones singulares. *Euler* probó que el número de parámetros necesarios en una ecuación diferencial lineal de orden $n$ es exactamente igual a $n$.

El uso de factores integrantes, los métodos sistemáticos para resolver las ecuaciones lineales homogéneas y no homogéneas, y obtener soluciones particulares y generales e incluso soluciones singulares, son algunas de las contribuciones de *Euler*, compartidas con *Daniel Bernoulli*, (que por ejemplo resolvió $y'' + k \cdot y = f(x)$) y *D'Alembert*. *Daniel Bernoulli* y *Euler* proponen, al estudiar las oscilaciones de una barra, la ecuación diferencial de cuarto orden: $k^4 \cdot y^{IV)} = y$, la más alta hasta entonces. Contribuye al método de solución en series de potencias, a las series trigonométricas, y crea una primera discusión sistemática del cálculo de variaciones. Se debe a *Euler* el procedimiento numérico de resolución de ecuaciones diferenciales. Se fija en el método de las isoclinas $f(x, y) = cte.$, y para valores de $x$ dados elige rectas verticales sobre las que se calculan pendientes, introduciendo así el método de las poligonales de *Euler* como una simplificación del método de las isoclinas.

La resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias comenzó tan pronto como se conoció la relación inversa existente entre los procesos de diferenciación e integración. El problema de resolver ecuaciones en derivadas parciales era un campo abierto a los pioneros. *D'Alembert* tuvo intereses muy variados, pues publicó tratados sobre dinámica, música, el problema de los tres cuerpos, la precesión de los equinocios, el movimiento en medios resistentes y las perturbaciones del movimiento lunar. El estudio de la cuerda vibrante le condujo a la ecuación en derivadas parciales: $u''_{tt} = u''_{xx}$, para la que dio en 1747, en las *Memoirs* de la Academia de Berlín, la solución $u = f(x + t) + g(x - t)$, donde $f$ y $g$ son, según *D'Alembert*, funciones arbitrarias que pueden determinarse a partir de las condiciones iniciales. *Euler* dio en 1 753 para la ecuación más general $u''_{tt} = a^2 \cdot u''_{xx}$, la solución $u = f(x + at) + g(x - at)$, y la interpretación es diferente pues *D'Alembert* no concebía que la solución no fuese continua, incluso con segundas derivadas continuas, mientras *Euler* mantenía que *f* y *g* eran completamente arbitrarias, pudiendo ser discontinuas.

La mayoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias no eran sencillas de resolver mediante cuadraturas, y requerían ingeniosas sustituciones o algoritmos especiales para encontrar su solución. Se descubrieron familias de ecuaciones resolubles por artificios relativamente sencillos como las ecuaciones de *Bernoulli* ya comentadas. *Taylor* en 1715 descubre el fenómeno de las soluciones singulares. *Alexis Claude Clairaut* (1 713 – 1 765), precoz matemático que a los diez años estudiaba ya los textos de *L'Hôpital*, identificó la familia $y = xy' + f(y')$, que además de la solución general $y = cx + f(c)$ tiene una solución singular, siendo una de las primeras de este tipo que se encontraron. *D'Alembert* encontró la solución singular de la ecuación un poco más general: $y = xf(y') + g(y')$ que lleva su nombre. *Euler* considera una cierta paradoja el hecho de que las soluciones singulares se obtengan "derivando" en vez de "integrando". Y *Lagrange* en 1776 demuestra que la envolvente de una familia de soluciones de una ecuación diferencial, si existe, es también una solución, y es una solución singular. *Clairaut* observó que las derivadas parciales de segundo orden cruzadas de una función son iguales (hoy se conocen las condiciones suficientes para que esto ocurra), y utilizó este hecho en el familiar criterio de reconocimiento de las ecuaciones diferenciales exactas. Escribió obras de matemáticas aplicadas que se hicieron famosas.

Una de las ecuaciones diferenciales ordinarias más interesantes del siglo XVIII fue la ecuación que *D'Alembert* denominó de *Riccati*, y fue estudiada por muchos matemáticos como los *Bernoulli*.

Produjo problemas la imposibilidad de obtener soluciones explícitas para la ecuación de *Riccati*, que debe su nombre a *Jacopo Riccati* (1 676 – 1 754), matemático italiano que consideró ecuaciones de la forma $f(y, y', y'') = 0$, o la importante ecuación no lineal que lleva su nombre. Ya se habían encontrado ecuaciones cuya solución únicamente se puede obtener como series de potencias, como: $xy' = y^2$, y los *Bernoulli* habían iniciado la integración numérica sustituyendo derivadas por incrementos finitos.

Figura 6: *Jacopo Riccati* (1 676 – 1 754)

***Daniel Bernoulli*** estudia en 1 724 valores de *n* para los que la ecuación de *Riccati* es integrable por separación de variables. *Euler* fue el primero en llamar la atención sobre que si se conoce una solución particular entonces, haciendo una sustitución, se convierte en una ecuación diferencial lineal, por lo que se puede hallar su solución general; o que si se conocen dos soluciones particulares entonces se puede obtener la solución general por medio de una simple cuadratura. En 1 841 *Liouville* demuestra que existen ecuaciones diferenciales sencillas que **no pueden resolverse por integración elemental.** La teoría de *Galois* cierra por radicales esta idea.

***Lagrange*** (1 736 – 1 813) en su artículo *“Recherches sur la nature et la propagation du son”* (1 759) se mostró de acuerdo con que las soluciones de la ecuación diferencial deben ser continuas. Observó que es útil tratar ecuaciones de la forma $F(x, y, y') = 0$ y no siempre utilizar la variable $x$ como independiente. En *“Nouvelles recherches sur la nature et propagation du son*” (1 761) transforma la ecuación en derivadas parciales en un par de ecuaciones diferenciales ordinarias. Obtuvo las técnicas que se denominan de los multiplicadores de *Lagrange*. También se debe a *Lagrange* la técnica que se conoce como de variación de parámetros o de constantes para encontrar una solución particular de una ecuación diferencial ordinaria no homogénea de orden $n$, o de un sistema, conociendo la solución general de la homogénea asociada. Otra de sus contribuciones es el cálculo de variaciones, cuyo nombre deriva de las notaciones usadas por *Lagrange* hacia 1 760. Trata de encontrar una relación funcional $y = f(x)$ para que una integral $\int_a^b g(x, y, y') \cdot dx$ tome un valor máximo o mínimo. Como casos particulares están los problemas sobre isoperimetrías o de descenso más rápido. Hizo también importantes aportaciones a la mecánica analítica. El trabajo monumental de *Lagrange* *“Mecanique analytique”* contiene las ecuaciones generales del movimiento de un sistema dinámico, que hoy llevan su nombre, deduciendo las ecuaciones de la mecánica aplicando el principio de mínima acción (o cálculo de variaciones ya comentado).

En la misma época *Laplace* obtuvo y estudió la conocida ecuación que lleva su nombre, y que aparece continuamente en problemas de hidrodinámica, elasticidad y electromagnetismo, así como su famosa transformada que permite resolver numerosas ecuaciones lineales. El trabajo de cinco volúmenes *"Traité de mecanique céleste"* le valió el título de *Newton* de Francia.

Figura 7: Pierre Simon de Laplace (1 749 – 1 827)

Las posturas de *Lagrange* y *Laplace* proveen de dos filosofías distintas de las Matemáticas. Para *Laplace* la naturaleza era esencial y las Matemáticas una herramienta; mientras que para *Lagrange* las Matemáticas eran un arte que justificaba su propia existencia.

En *Boyce*[5] se encuentra la siguiente afirmación de *N. Bowditch*: "*No puedo encontrar una afirmación de Laplace "Así, es evidente", sin tener la seguridad de que deberé emplear horas de trabajo intenso, para cubrir el abismo y averiguar y demostrar lo evidente que es*". *Mary Sommerville* fue traductora y comentarista de esta obra, y con sus explicaciones profundas hizo posible que fuese comprendida.

*Monge*, más conocido por sus trabajos en geometría, también hizo aportaciones a las ecuaciones diferenciales que destacan por su visión geométrica. Estudió ecuaciones de primer y segundo orden mediante el

[5] Boyce, W. E.; DiPrima, R. C.: *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Editorial Limusa. (1ª edición). 1967. (10ª reimpresión) 1992.página 25.

método de las ecuaciones características. Introdujo transformaciones de contacto, con las que es posible reducir ecuaciones a otras cuya solución sea conocida. Observó que ecuaciones de la forma:

$$P(x, y, z) \cdot dx + Q(x, y, z) \cdot dy + R(x, y, z) \cdot dz = 0$$

que según *Euler* no tienen sentido cuando no existen familias de superficies que las satisfagan, pueden resolverse si se obtienen como soluciones variedades de orden inferior, (como curvas). Posteriormente fueron generalizadas a más dimensiones por *Pfaff*. Tanto ellas como sus generalizaciones a sistemas, tienen aplicaciones en campos como Termodinámica o Mecánica Clásica, por lo que posteriormente han sido estudiadas por *Grassmann, Frobenius, Lie, Darboux* y *Cartan*. El formalismo de formas diferenciales introducido por este último permite escribir de forma elegante el teorema de *Frobenius* que establece cuando un sistema general de ecuaciones de *Pfaff* admite factores integrantes.

*Jacobi* y *Abel* trabajaron sobre funciones elípticas. *Jacobi* descubrió un método, que se denomina de *Hamilton-Jacobi*, que permite integrar un sistema de ecuaciones canónicas de *Hamilton* por medio de una integral completa de una ecuación en derivadas parciales de primer orden. Estudió un método que extiende el de *Charpit-Lagrange* a dimensiones superiores a dos, que hace comprender que el método anterior es una técnica para reducir la dimensionalidad de los problemas considerados si uno es capaz de encontrar cantidades conservadas en involución para el sistema de características, y que en particular esto reduce el problema a resolver ecuaciones donde aparecen jacobianos. También se deben a *Jacobi* las condiciones que llevan su nombre y que debe satisfacer un problema de cálculo de variaciones para que un extremal sea mínimo.

La influencia de *Gauss* en las ecuaciones diferenciales ordinarias es menor que en otras ramas de la Matemática, y a veces indirecta. Estudió ecuaciones hipergeométricas y funciones elípticas, e hizo también estudios en geometría diferencial o variable compleja que incidieron indirectamente en las ecuaciones diferenciales. Estudió también electromagnetismo y fluidos, por lo que se debe mencionar su teorema de la divergencia.

Durante la primera mitad del siglo XIX aparecen nuevas ideas generadas en parte para dar respuesta a problemas de física matemática, siendo los más notables los relacionados con las series de *Fourier*, y también en parte originados por la transformación general que experimentó el análisis matemático durante este periodo que dio lugar al planteamiento de nuevos enfoques dentro de la teoría de ecuaciones diferenciales.

El punto de partida es el famoso trabajo sobre **la difusión del calor de *J. B. Fourier*** (1 768 – 1 830) comenzado en 1 807 y publicado en 1 822, donde para obtener la solución de la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

con distintas condiciones de contorno, *Fourier* desarrolló de forma sistemática el método de separación de variables, y llevando adelante las ideas de *D. Bernoulli* llegó a la representación de soluciones en series trigonométricas, indicando además que la clase de funciones que podían ser así representadas era muy amplia. "*Prueba*" la convergencia de sus series a las correspondientes funciones periódicas, utilizando razonamientos en muchos caso faltos de rigor, que hoy día, mediante la teoría de distribuciones se pueden formular correctamente.

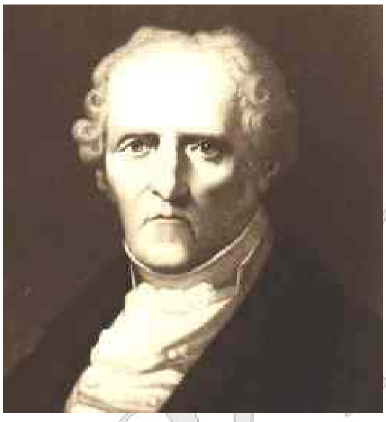

Figura 8: Jean Baptiste Joseph *Fourier* ( 1768 – 1 830)

Por entonces las tres grandes L (*Lagrange, Laplace y Legendre*) criticaron la memoria de *Fourier* por sus lagunas y vaguedad de razonamiento, y quizás esta sea la causa para que comenzara la época del rigor. El trabajo de *Fourier* desempeñó un papel catalizador en la nueva fundamentación del Análisis, pues suscitó cuestiones como las condiciones exactas de representabilidad de funciones mediante series trigonométricas. El primer resultado riguroso en esta línea fue obtenido por *Dirichlet*, en 1 829, un año antes de la muerte de *Fourier*.

Con *Cauchy* comienza la **edad del rigor**, desde 1 820 a 1 870. Hacia 1810 se consideraba obvia la existencia de soluciones por desarrollo de series. *Cauchy* dice de forma clara que no todas las ecuaciones diferenciales se pueden resolver, pues nada garantiza que la serie sea convergente, e incluso si converge, que sea hacia la función deseada. *Cauchy* desarrolló, entre 1 820 y 1830 en sus cursos de la Escuela Politécnica de París, los conocidos métodos que permiten probar la **existencia de las soluciones** del problema de valor inicial $y' = f(x, y)$; $y(x_0) = y_0$ que hoy se denomina *problema de Cauchy*, adaptando el método del polígono de *Euler* a sus objetivos. En un manuscrito recientemente encontrado dice: *"la resolución del problema de valor inicial daría la solución general"*. Se debe a *Cauchy* en 1 824 la idea básica del método de las aproximaciones sucesivas, mejorado por *Peano* en 1 890, presentado en forma más moderna y general en 1 890 por *E. Picard* (1 856 -1 941), y en 1 894 por *Lindelöf*. Considera Cauchy la ecuación integral equivalente: $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(z,y(z)) \cdot dz$ y la analiza por el método que hoy se conoce como el de las poligonales de *Euler*, aunque entonces él no lo conocía.

De 1 839 a 1 842 utilizó el método de la mayorante si *f*(*x, y*) es analítica, lo que se aplica bien en el campo complejo. En 1 842 en la reunión semanal de la Academia, aplicó el método de la mayorante a las ecuaciones en derivadas parciales, base de lo que hoy se denomina teorema de *Cauchy-Kovaleskaya*. Extendió su teorema de existencia a ecuaciones de orden superior, y también a ecuaciones diferenciales ordinarias y sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden en el campo complejo. Las técnicas son también aplicables a numerosas ecuaciones en derivadas parciales por lo que se debe recordar a la matemática rusa *Sofía Kovaleskaya* (1 850 – 1 891) por sus resultados para la resolución de ecuaciones con datos en forma normal sobre una superficie no característica, y el teorema que lleva el nombre de *Cauchy-Kovalevskaya* que demostró en 1 874, teorema fundamental de existencia de una única solución analítica de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales en forma normal. *Kovaleskaya* presentó un ejemplo, sorprendente entonces, de una ecuación que no cumple las hipótesis del teorema y no posee solución analítica alguna.

Figura 9: *Sofía Kovaleskaya* (1 850 – 1 891)

Los teoremas de existencia tuvieron importancia no sólo desde un punto de vista teórico, sino también desde un punto de vista práctico, ya que permitieron justificar la aplicación de los métodos de la teoría de ecuaciones diferenciales a la física. Por otra parte los métodos utilizados en las demostraciones de estos teoremas proporcionaron algoritmos para obtener aproximaciones de la solución con el grado de exactitud deseada, así como para medir el error de la aproximación, por lo que sirvieron de fundamento para los procesos de integración numérica que fueron elaborados durante el siglo XIX.

Se debe a *Cauchy* la memoria sobre la propagación de ondas ópticas *"Mémoire sur la théorie des ondes"* que apareció en 1 815 precisamente cuando tomaba forma definitiva la teoría ondulatoria de la luz por obra de *Young* y de *Fresnel*, y el ser uno de los fundadores de la teoría matemática de la elasticidad. Son importantes los trabajos de *Cauchy* sobre funciones complejas, para tener en cuenta la relación entre variable compleja y la teoría de ecuaciones diferenciales, que no se manifiesta únicamente en las aplicaciones como la inversión de la transformada de *Laplace*, sino también en los estudios llevados a cabo por *Fuchs, Kummer, Riemann, Painlevé, Klein,* *Poincaré, Hilbert*, entre otros, sobre puntos singulares de las soluciones de las ecuaciones diferenciales. Cuando se abordaban problemas de la Física Matemática donde las condiciones iniciales no eran regulares (como por ejemplo, una cuerda sometida a un fuerte plegamiento, tratado por *Christoffel*, o la propagación de ondas planas con ondas de choque) la consideración de singularidades era inevitable.

Hacia 1 869 seguía sin resolverse el problema de la **unicidad** de una ecuación diferencial. En 1 854 *Briot* y *N. Bouquet* simplificaron la demostración de *Cauchy* y analizaron el caso en que $f(x, y)$ es singular en un punto del campo complejo, comprobando que el radio de convergencia es el máximo posible hasta que se alcanza la singularidad. El que la solución no sea única se contradice con la idea de *Laplace* de que es posible un conocimiento completo y se utiliza la aleatoriedad en el contexto de las ecuaciones diferenciales. *Peano* trató la existencia local de soluciones e introdujo las inecuaciones diferenciales probando que el ínfimo de las supersoluciones y el supremo de las subsoluciones son soluciones. *Picard*, al final de un largo artículo, trabajando sobre las ecuaciones de segundo orden trató las aproximaciones sucesivas e impuso las condiciones de *Lipschitz*. La teoría de las sub y super soluciones, y de las inecuaciones, no es válida para sistemas. Se tienen entonces los métodos basados en la teoría de la integral: $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(z, y(z)) \cdot dz$. *Vallé-Poussin* asoció a la ecuación diferencial la suma superior y la suma inferior. Este método admite alguna discontinuidad de la función *f* lo que es importante en control. *Caratheodory* en 1 918 utilizó la integral de *Lebesgue*. *Lipschitz* fue el primero que abordó los criterios de unicidad, *Jordan* los simplificó y el método de *Perrón* de 1 926 unificó y mejoró los métodos anteriores.

La formulación exacta del **concepto de independencia lineal de un sistema de funciones**, de tanto interés dentro de la teoría de ecuaciones diferenciales, proviene de la segunda mitad del siglo XIX, en la que se obtuvo una condición para la independencia lineal en términos del determinante llamado wronskiano, que había introducido *H. Wronski* (1 775 – 1 853) en la primera mitad del siglo XIX.

Con la ecuación de *Euler* ya se observó que las soluciones son más irregulares que la propia ecuación. A *L. Fuchs* (1 833 – 1 902) se debe el concepto de sistema fundamental de soluciones y se debe también una nueva orientación en la teoría de ecuaciones diferenciales con coeficientes algebraicos, que pronto se transformó en una teoría analítica de ecuaciones diferenciales, ocupándose de las propiedades generales de las soluciones de ecuaciones diferenciales, no necesariamente lineales, en el campo complejo. Las ecuaciones cuyas singularidades son todas regulares se denominan fuchsianas, en ellas la rotación en torno al punto singular transforma una solución de un conjunto de soluciones linealmente independientes en una combinación lineal de las mismas. *Fuchs* observó hacia 1 865 que en las ecuaciones no lineales las singularidades son móviles, por ejemplo: $y' = y^2$ tiene de solución $y = \frac{1}{x - c}$ cuya singularidad depende de la constante y por tanto del valor inicial. *Frobenius* en 1 874 desarrolló en serie y probó la convergencia en los puntos singulares regulares. Se ocuparon también de este problema, entre otros, *Hilbert, Poincaré, Klein*, desarrollando *Painlevé* entre 1

900 y 1 906 una teoría general.

***Riemann*** obtuvo la solución general de la ecuación hiperbólica no lineal de segundo orden de dos variables, para la que demostró que es posible reducirla siempre a una ecuación lineal de segundo orden, técnica que se emplea en el estudio de la dinámica de gases. Estudió también soluciones discontinuas para estas ecuaciones, y aunque anticipó el concepto de onda de choque, no obtuvo la solución correcta, debida a *Hugoniot*, pues realizó la hipótesis errónea de que la entropía es constante a lo largo de la discontinuidad. A él se debe el estudio del grupo de monodromía.

Los **problemas de contorno**, que aparecen en geometría diferencial, teoría de ecuaciones integrales y en física matemática (ecuaciones del calor y ondas), cuyas soluciones se obtienen mediante el método de variables separadas, dan lugar a los problemas conocidos con los nombres de *J. Sturm* (1 803 – 1 855) y *J. Liouville* (1 809 – 1 882).

Figura 10: *J. Liouville* (1 809 – 1 882)

Consisten en tratar de resolver una ecuación de la forma: $(Py')' + Gy = 0$, donde $P$ y $G$ son funciones dependientes de $x$ y de un parámetro $\lambda$, y suponiendo conocidos en dos puntos del eje $x$ los valores de combinaciones lineales de $y(x)$ y de $y'(x)$. Especial interés presentan los teoremas de oscilación de *Sturm* que permiten examinar la oscilación de dos soluciones comparándola con otras como las de la ecuación elemental $y'' + \lambda y = 0$. Se caracterizan por la existencia de un parámetro $\lambda$ con el que, para valores particulares que se denominan autovalores, el problema de contorno tiene soluciones no triviales. Los teoremas de *Sturm* permiten obtener soluciones de los problemas de *Sturm-Liouville* mediante las técnicas que se denominan de "tiro", en la dirección de las primeras investigaciones en este área. La herramienta más poderosa ha sido la función de *Green*, y el uso que de ella hizo *Freldhom* a principios de siglo, demostrando que dicha función es analítica en el parámetro $\lambda$, excepto para los autovalores donde presenta polos, lo que permite de nuevo utilizar las potentes técnicas de variable compleja en el tratamiento de estos problemas.

Figura 11: Lejeune *Dirichlet*

El estudio de los problemas de contorno para la ecuación de *Laplace* y la formulación del principio de *Dirichlet* son de la segunda mitad del siglo XIX. El desarrollo de la teoría de ecuaciones en derivadas parciales de orden superior al primero se realizó en íntima conexión con problemas de física y en particular de elasticidad. Se desarrolló el cálculo de variaciones, aparecieron ejemplos de funciones que no satisfacen las ecuaciones de *Euler-Lagrange*. El carácter central del problema de *Dirichlet* asociado a la ecuación de *Laplace* hizo que se trabajase intensamente en su solución. Se desarrollaron las técnicas de la teoría de potencial y ecuaciones integrales para el estudio de ese problema. La generalización de los operadores diferenciales a funciones absolutamente continuas o derivables en casi todo punto hizo aparecer la noción de solución generalizada. Tienen su origen en el problema de *Dirichlet*, que inicialmente fue invalidado por *Weierstrass*, e influyó decisivamente en el desarrollo del análisis funcional y la topología, particularmente en la consideración de los espacios funcionales y en el concepto de compacidad.

La **teoría de distribuciones**, que tiene su origen en *Dirac, Heaviside* y *Sobolev*, fue sistematizada por *Schwartz* y *Gelfand*. Estudiaron las aplicaciones a los problemas en ecuaciones en derivadas parciales. La idea más interesante es la sustitución del concepto de función por el de distribución, que viene a generalizar el de función. La clase de funciones admisibles consideradas por *Levi* es esencialmente lo que hoy se conoce como espacio de *Sobolev* $H_2^1$, es decir, funciones integrables tales que su derivada en el sentido de las **distribuciones** pertenece también a $\boldsymbol{L}^2$. Algunos métodos de definición de soluciones generalizadas de ecuaciones en derivadas parciales son:

- La sustitución de una ecuación diferencial por otro modelo de sistema físico. (*Lagrange, Riemann, Christoffel...*).
- La sustitución de varios límites por uno. (Derivadas de *Dini*).
- Diferenciación en casi todo punto. (*Lebesgue, Levi*, y sirvió para la

introducción de los espacios de *Sobolev*).

- Método de las curvas y superficies de prueba. (Se parte del teorema de *Stokes*, y al integrar la ecuación diferencial ésta se convierte en una ecuación integro-diferencial por lo que se generaliza. Se emplea en la teoría del potencial).
- Método de las funciones test. (La ecuación diferencial se multiplica por una función y el resultado se integra por partes, con lo que el operador diferencial se transfiere a esta función test. Su origen está en el estudio de ecuaciones hiperbólicas y parabólicas. Es el método básico de la teoría de distribuciones).
- Método de las sucesiones. (Se define la solución generalizada como límite de una sucesión de soluciones clásicas: *Euler, Laplace, Sobolev, Schwartz*...)

Una **ecuación integral**[6] es una ecuación en la que aparece una función incógnita bajo un signo integral, y el problema de resolver dicha ecuación consiste en determinar esa función. Muchos problemas de la física matemática conducen a ecuaciones integrales. Los primeros problemas aislados tratados por este procedimiento se deben a *Laplace*, con su ecuación que recibe el nombre de transformada de *Laplace* y trabajaron en ellos *Poisson, Fourier, Abel, Liouville, y Neumann. Vito Volterra* (1 860 – 1 940), que fue el primer fundador de la teoría de las ecuaciones integrales, ideó un método para resolver las ecuaciones integrales del segundo tipo, y estudió las del primer tipo. *Erik Ivar Fredholm* (1 866 – 1 927) recogió las ideas de *Volterra* y las

[6] Kline, M. (1972): *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. (Vol. I, II y III). Alianza.

utilizó para continuar resolviéndolas, y usó la analogía entre estas ecuaciones y las ecuaciones algebraicas lineales para establecer el teorema de la alternativa que lleva su nombre.

***David Hilbert*** (1 866 – 1 943) pensó que el estudio de las ecuaciones diferenciales tenía interés para la teoría de integrales definidas, el desarrollo de funciones arbitrarias en serie, la teoría de ecuaciones diferenciales lineales, la teoría del potencial y el cálculo de variaciones. Estableció la teoría espectral general para núcleos simétricos y demostró el teorema del eje principal generalizado para las formas cuadráticas simétricas, en el que aparecen las autofunciones y los autovalores, por lo que encontró que se podía generalizar un producto escalar entre funciones. Demostró el teorema que se conoce como de *Hilbert-Schmidt*, que demuestra que una función puede expresarse como un desarrollo en serie de las autofunciones. Hizo un tratamiento de las formas cuadráticas infinitas, probando que toda forma cuadrática acotada y con continuidad completa puede transformarse mediante una transformación ortogonal única en una suma infinita de cuadrados siendo los coeficientes los autovalores. Aplicó estas formas cuadráticas a las ecuaciones integrales.

Definió sistema ortogonal completo de funciones, y demostró la desigualdad generalizada de *Bessel* que es equivalente a la completitud. Transformó la ecuación integral en un sistema de infinitas ecuaciones lineales con infinitas incógnitas que se resuelve calculando los coeficientes de *Fourier* de una función, por lo tanto, si el sistema tiene solución única, la ecuación integral también la tiene. Probó que la ecuación tiene una única solución para toda función, si el valor del parámetro no coincide con ningún autovalor, o si coincide, tiene solución si se dan unas condiciones de ortogonalidad. Aplicó estos resultados al problema de *Sturm-Liouville*, que relacionó con la función de *Green*. Esta función se utiliza para resolver problemas físicos y técnicos, por ejemplo en dinámica de gases, convirtiendo ecuaciones diferenciales en ecuaciones integrales. Seguidores de esta obra son: *Schmidt, Riesz, Fischer, Weyl. Riesz* y *Fischer* probaron la correspondencia biunívoca entre las funciones de cuadrado integrable y las sucesiones de cuadrado sumable de sus coeficientes de *Fourier*. Las funciones son consideradas puntos de un espacio de *Hilbert*.

Otras direcciones son los resultados de regularidad de *Bernstein* y *Gevrey*. Las ecuaciones que se utilizan en la física matemática son estudiadas por *Hilbert*, *Volterra* y *Hadamard* entre otros, y de ello arranca la teoría de los espacios de *Hilbert* y el análisis funcional, lo que permite formular de manera abstracta muchos problemas, recibiendo un importante impulso con los trabajos de *Banach*. El **análisis funcional** se desarrolló a partir de la introducción de los espacios de funciones de *Hilbert*, y de la obra de *Banach* que proporcionó instrumentos que se han aplicado en las ecuaciones diferenciales, como los operadores compactos o la teoría espectral, o como el análisis de las desigualdades a priori.

Se ha puesto de manifiesto que en muchos campos de la matemática se utilizan transformaciones u operadores que actúan sobre funciones: el operador diferencial, el operador integral, el operador lineal ***L*** en ecuaciones diferenciales, o una ecuación integral que actúan sobre una función para producir otra. El **análisis funcional** tiene como idea estudiar estos operadores dentro de una formulación abstracta de una teoría general de operadores actuando sobre clases de funciones. Se puede considerar a las funciones como puntos de un espacio por lo que el operador transforma puntos en puntos con lo que se tiene entonces una generalización de las transformaciones geométricas. Si el operador transforma una función en un número real o complejo entonces se llama un funcional, reservándose el nombre de operador exclusivamente a los que transforman funciones en funciones.

Los antecedentes de la **teoría abstracta de funcionales** se encuentran en *Riemann, Giulio Ascoli* (1 843 – 1 896) y *Cesare Arzelà. Hadamard* y *Borel* ya lo sugirieron. La inició *Volterra* con su trabajo sobre cálculo de variaciones. *Maurice Fréchet* unificó las ideas de los antecesores y aplicando las ideas de la teoría de conjuntos de *Cantor* formuló los conceptos para espacios de funciones. Introdujo los espacios métricos y la norma, y conceptos como continuidad, diferencial y diferenciabilidad de un funcional. *Charles Albert Fischer* (1 884 – 1 922) mejoró las definiciones. Y las formulaciones finales fueron realizadas por *Elizabeth le Stourgeon* (1 881 – 1 971) para obtener las condiciones necesarias para que un funcional admita un mínimo y se pueda utilizar en el cálculo de variaciones. *Leonida Tonelli* (1 885 – 1 946) se propuso reemplazar los teoremas de existencia de las ecuaciones diferenciales por teoremas de existencia para minimizar integrales curvas, utilizando asiduamente el concepto de semicontinuidad inferior.

La primera tentativa de elaborar una **teoría abstracta de** funcionales y **operadores lineales** fue hecha por *E. H. Moore* que intentó un planteamiento axiomático. *Hilbert* consideró una función dada por sus coeficientes de *Fourier* con respecto a una sucesión ortonormal de funciones, pero no llegó a considerar esos coeficientes como coordenadas de un punto del espacio, ni usar un lenguaje geométrico. Este paso lo dieron *Schmidt* y *Fréchet*, con lo que las funciones son puntos de un espacio de dimensión infinita que se denomina *espacio de Hilbert*. Se introdujeron los conceptos de norma y producto escalar, y se obtuvo la desigualdad de *Bessel*, la de *Schwarz* y la desigualdad triangular para las normas. *Schmidt* y *Fréchet* observaron, en 1 907, que el espacio de las funciones de cuadrado sumable $\boldsymbol{L^2}$ tiene una geometría análoga a la del espacio de las sucesiones formadas por los coeficientes de *Fourier*, y utilizando la correspondencia biunívoca del teorema de *Riesz-Fischer* se definió una distancia en $\boldsymbol{L^2}$, y se comprobó que $\boldsymbol{L^2}$ es un espacio completo. Para los espacios $\boldsymbol{L^p}$, introducidos por *Riesz*, que también son completos, se probó el teorema de representación que lleva su nombre.

La parte central del análisis funcional se ocupa de la teoría abstracta de los operadores que aparecen en las ecuaciones diferenciales e integrales; esta teoría unifica la teoría de autovalores para ecuaciones diferenciales e integrales y para transformaciones lineales. Si el núcleo es simétrico, el operador es autoadjunto. Para operadores autoadjuntos arbitrarios los autovalores son todos reales, y las autofunciones correspondientes a autovalores distintos son ortogonales entre sí.

Hasta ahora se ha definido la norma partiendo de un producto escalar. *Stefan Banach* (1 892 – 1 945), *Hahn, Helly* y *Wiener* trabajaron sobre normas. *Banach* construyó un espacio dotado de una norma que en general no está definida sobre un producto escalar, que es un espacio vectorial normado y completo. Una diferencia entre los espacios de *Banach* y los de *Hilbert* es que en los primeros (que no sean también de *Hilbert*) no se puede hablar de ortogonalidad. Espacios de *Banach* son los espacios $\boldsymbol{L^p}$, los espacios de funciones continuas, los espacios de funciones medibles acotadas, siempre que se defina una norma adecuada. Estudió los operadores sobre estos espacios y los utilizó para la resolución de ecuaciones integrales formulados de una forma abstracta. En 1 929 introdujo *Banach* el concepto de espacio dual o adjunto de un espacio de *Banach*, que es el espacio de todos los funcionales lineales continuos acotados sobre el espacio dado.

La idea de espacios de funciones y operadores parecía la abstracción por la abstracción, pero como dijo *Weyl*, fue *favor de la fortuna* que fuese el instrumento adecuado para la mecánica cuántica, en la que los autovalores son los niveles de energía de un electrón en un átomo, y las autofunciones los correspondientes estados cuánticos estacionarios del sistema, y la diferencia entre dos autovalores proporciona la frecuencia de los cuantos de luz emitida, definiendo el espectro de radiación de la substancia. En 1 926 *Erwin Schrödinger* presentó su teoría cuántica basada en ecuaciones diferenciales. Esta aplicación estimuló el trabajo en la teoría abstracta en espacios de *Hilbert* y operadores, tarea que emprendió *John von Newmann* en 1 927, que ofreció un tratamiento axiomático y un buen número de resultados sobre operadores lineales, donde la integración se entiende generalmente en el sentido de *Lebesgue-Stieljes*. Se continuó aplicando el análisis funcional al problema generalizado de los momentos, a la mecánica estadística, a los teoremas de existencia y unicidad de ecuaciones en derivadas parciales, a los teoremas del punto fijo, en el cálculo de variaciones, en la teoría de representación de grupos continuos compactos, entre otros.

Dos nuevas direcciones merecen la atención, una relacionada con la **teoría de grupos** y otra con la mecánica celeste y la astronomía. *F. Klein* señaló en 1 872 que las diversas geometrías pueden caracterizarse por su grupo de transformaciones. *S. Lie* las aplicó en 1 873 a las ecuaciones diferenciales. Si una ecuación diferencial permanece invariante al efectuar una transformación continua entonces se dice que admite ese grupo de transformaciones, y clasificó las ecuaciones diferenciales por sus grupos de transformaciones. Se aplican con éxito las nuevas ideas del álgebra al estudio de las ecuaciones diferenciales por *Picard* en 1 883 y 1 887. Se creó una teoría de estructura de ecuaciones diferenciales lineales probando *Vessiot* que una ecuación diferencial lineal de orden superior al primero no es resoluble por cuadraturas. La construcción de una teoría general de resolución por cuadraturas resulta imposible, al ser pocas las ecuaciones que pueden resolverse así. Los trabajos de *Lie* cerraron este tipo de problemas.

La mecánica celeste ya fue estudiada por *Lagrange, Laplace, Hamilton* y *Jacobi*, que proveen de una teoría planetaria con el problema de los tres cuerpos, el uso sistemático del método de las perturbaciones de *Hanser*. Las soluciones de *Delaunay* siguen siendo la mejor prueba para evaluar un nuevo sistema de álgebra simbólica. Las ecuaciones de *Hill* de 1 877 modelizan el movimiento de la luna y *Adams* y *Le Verrier* teorizaron en 1 845/46 sobre la existencia de Neptuno. Surgió el problema de la estabilidad de sistemas y de control, como el control de la máquina de vapor de *Watt*, o el diseño de control de *Airy*, astrónomo real, para seguir a las estrellas. *Maxwell* en “*On Governors*” relacionó las ideas básicas de las nociones de estabilidad con las raíces del polinomio característico.

La geometría, con el estudio de la geometría diferencial, las geometrías no euclideas y la topología, incide en la física matemática, donde aún hoy se trabaja estableciendo condiciones para las soluciones de las ecuaciones.

Interesa saber el comportamiento de las soluciones en todo su dominio, lo que se denominó la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales. La **teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales** fue creada simultáneamente por *Poincaré* (1 854 – 1 912) y *Liapunov* (1 857 – 1 918). La contribución más importante en este campo del siglo XIX se debe a *H. Poincaré* que introdujo la topología al estudiar las propiedades de las trayectorias.

***Henri Poincaré*** fue ingeniero de minas, y su tesis de doctorado fue un trabajo sobre ecuaciones diferenciales, sobre teoremas de existencia, lo que

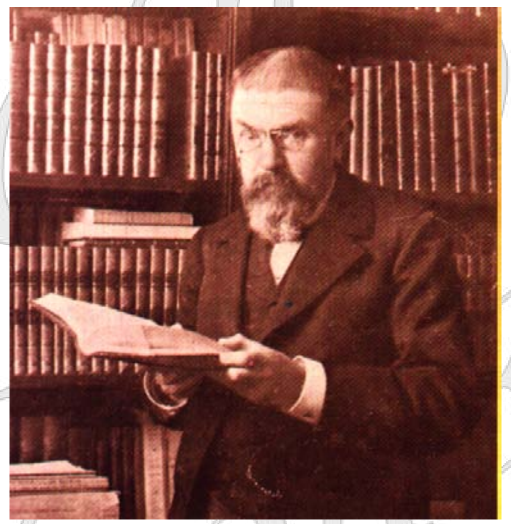

Figura 12: Henri Poincaré (1 854 – 1 912)

contribuyó al estudio de las funciones automorfas (se observa de nuevo la relación entre ecuaciones diferenciales ordinarias y la variable compleja). Sus cursos en la Sorbona trataban temas tan distintos como capilaridad, elasticidad, termodinámica, óptica, electricidad, telegrafía, astronomía, cosmogonía... abriendo nuevas ramas de la Matemática. *Poincaré* pensaba que para saber si el sistema solar es estable y conocer si un cuerpo permanece en un lugar del cielo, o se escapa, no tiene sentido iniciar el estudio cuantitativo si no se conoce antes el comportamiento de las soluciones, por lo que hace falta un estudio cualitativo. *Poincaré* se propuso averiguar el comportamiento de las soluciones de una ecuación diferencial o de un sistema de dos ecuaciones en todo el plano, y hacerlo sin integrar las ecuaciones, utilizando únicamente las propiedades de las funciones.

Definió punto singular de ***y'*** = ***f***(*x*, ***y***) como un punto que anula a ***f***(*x*, ***y***). Clasificó los puntos singulares, estudiando el comportamiento de las soluciones con respecto a estos puntos. Se deben a él las técnicas geométricas de análisis de un espacio de fases, donde en un sistema autónomo bidimensional se visualizan las soluciones como curvas paramétricas y al eliminar el parámetro se representan las trayectorias; se deben también a él también el estudio del caso lineal con los focos, nodos, puntos de silla y centros, y el caso más general, el estudio local en los puntos críticos, en los puntos de silla o en los centros; la definición de índice de un punto singular, y las propiedades globales de los puntos singulares, el estudio de ciclos límites (órbitas cerradas que corresponden a trayectorias periódicas) y el teorema de *Poincaré-Bendixon. Poincaré* estudió las soluciones sobre un toro. También estudió las singularidades de ecuaciones no lineales en el campo complejo, e introdujo y sistematizó los desarrollos asintóticos que hoy se llaman de *Poincaré*, aunque ya habían sido usados cincuenta años antes por *Stokes*.

Estudió las ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes racionales para las que obtuvo una sorprendente generalización de las funciones elípticas. Comprobó que ciertas funciones que se pueden obtener a partir de cocientes de dos soluciones independientes de la ecuación lineal de segundo orden, admiten grupos de transformaciones análogos a los de las funciones elípticas, pero que son un subgrupo lineal de las transformaciones de

*Möbius*, grupos estrechamente relacionados con los grupos cristalográficos en el espacio de *Lobatchewsky*. Estudió también condiciones para que las ecuaciones diferenciales tengan integrales algebraicas. Muchas de estas técnicas fueron usadas en el estudio de los problemas de la mecánica clásica y en particular en el problema de los tres cuerpos. En su obra *"Les méthodes nouvelles de la méchanique celeste"* introdujo la idea de reducir los hamiltonianos a formas canónicas, y descubrió la compleja estructura que pueden tener las variedades estables e inestables de iteraciones de aplicaciones en problemas de mecánica clásica, anticipándose en los desarrollos en lo que hoy se denomina teoría del caos, intuyendo muchas de las dificultades de la teoría de perturbaciones. *I. Bendixson* prosiguió estos trabajos hacia 1 901.

De forma independiente se tienen los trabajos de la escuela rusa. Las investigaciones de *Liapunov*, discípulo de *Chebichev*, surgieron de la astronomía. Buscaba figuras en equilibrio de un fluido en rotación diferentes del elipsoide. Se ocupó también de la estabilidad del equilibrio y del movimiento de un sistema mecánico determinado por un número finito de parámetros. Estos estudios se utilizaron en la investigación de las oscilaciones de sistemas físicos y mecánicos. Su tesis doctoral trató sobre el problema general de la estabilidad de los movimientos. Se deben a él el primer método de *Liapunov*, que se basa en escribir la solución en forma de serie, y el método directo o segundo método de *Liapunov* que se utiliza en los sistemas físicos disipativos. La escuela rusa se caracterizó por una eficaz organización entre matemáticos, físicos e ingenieros.

Los trabajos de *Poincaré* y *Liapunov* pasaron inadvertidos durante un tiempo.

Una teoría cualitativa abstracta de los sistemas dinámicos fue desarrollada por *G. D. Birkhoff* (1 884 – 1 944). *George Birkhoff* fue el mejor discípulo de *Poincaré*. Para analizar los sistemas dinámicos distinguía entre sistemas constantes, periódicos, casi-periódicos, recurrentes, estables de *Poisson*, centrados... La noción abstracta de sistema dinámico se debe a *Whitney* (1 918), que sin necesidad de usar ecuaciones diferenciales, define así: Un **sistema dinámico** es un par ($X$, $f$) donde $X$ es un espacio topológico y $f$ una función continua de $S \times X \to X$ tal que $f(0, x) = x$; $f(t+s, x) = f(t, f(s, x))$, donde $S$ es un semigrupo, usualmente $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$ o $\mathfrak{R}$.

Es interesante comentar la demostración de los teoremas ergódicos de *Von Neumann* y *Birkhoff*, el desarrollo de la teoría de sistemas dinámicos y sus muchas aplicaciones tanto dentro de otras ramas de la Matemática, como en otras ciencias y técnicas, como las dinámicas caóticas, que ya fueron anticipadas por *Hadamard*. Por poner un ejemplo, se puede comentar que los estudios sobre el sistema de *Lorenz* y su atractor, llevan a *Feigenbaum* a mostrar la universalidad existente en la cascada de bifurcaciones mediante el doblamiento de periodos que lleva su nombre.

Los problemas más importantes de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales se han centrado en el estudio de la naturaleza de los puntos críticos, de los ciclos límites, en el comportamiento global y asintótico de las trayectorias en un entorno de los puntos críticos y ciclos límites, en la teoría de bifurcaciones y en los conceptos de estabilidad estructural. La noción de estabilidad estructural fue introducida por *Andronov* y *Pontryagin* en 1 937. De forma intuitiva se puede explicar que un sistema dinámico es estructuralmente estable cuando una variación pequeña de las ecuaciones induce una transformación de las trayectorias que apenas se diferencia de las anteriores, con lo que se tendra la misma estructura de puntos críticos y ciclos límites. *Andronov* y *Pontryagin* estudiaron las condiciones de estabilidad estructural en un sistema de dimensión dos. *Andronov* conectó la práctica de sus problemas con diodos, con las teorías de *Poincaré*, relacionando los resultados del oscilador de *Van der Pol* con los ciclos límites de *Poincaré*. Hacia 1 960 se sintetizaron las dos grandes escuelas.