CAPÍTULO 3

Series complejas

El interés fundamental que se persigue en este capítulo es la representación de las funciones complejas por medio de series de potencias, lo que se puede conseguir si las funciones tienen buenas propiedades de regularidad. Como se podrá comprobar en este capítulo y en los capítulos siguientes, tanto las series de potencias como las *series de Laurent* tienen una importancia especial en la teoría de funciones de variable compleja, pues, por una parte toda función holomorfa en un punto admite un desarrollo en serie de potencias en dicho punto, es decir, es analítica en dicho punto, y por otra parte los coeficientes de la serie juegan un papel fundamental dentro de la teoría de integración compleja, lo que permite utilizar los desarrollos en *series de Laurent* en un punto singular para el cálculo de integrales.

En las *secciones 1 y 2* de este capítulo se estudian el comportamiento y las propiedades de las sucesiones y series de números complejos y las sucesiones y series de funciones complejas. Para ello es conveniente revisar los conocimientos sobre sucesiones y series reales, con el fin de adaptarlos al campo complejo. Las definiciones, teoremas y consecuencias que se verifican en el caso de series reales se mantienen, pues el campo complejo se comporta de manera similar a $\Re^2$, ya que una sucesión de números complejos $\{z_n\}_{n\in N}$ es igual a $\{x_n + i\cdot y_n\}_{n\in N}$, con lo cual basta estudiar las dos sucesiones de números reales $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para analizar el comportamiento de la sucesión compleja $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Se presentan las definiciones de sucesión de números complejos y de funciones complejas, límite de una sucesión, convergencia de sucesiones, sucesiones de *Cauchy* y convergencia absoluta, así como las consecuencias que se derivan del hecho de que el plano complejo ***C*** sea un espacio métrico completo. Una serie infinita se define como el límite de la sucesión de las sumas parciales asociadas a la serie. Se introduce el concepto de convergencia uniforme y se analiza el dominio de convergencia en el plano complejo.

Dentro de las series de funciones tienen un interés especial las series de potencias, y esta es la razón por la que se estudian de manera específica en la *sección 3*. Las series de potencias definen, dentro de su disco de convergencia, funciones complejas con muy buenas propiedades de regularidad. Esto motiva el que se las considere como un grupo especial de funciones, que se denominan funciones analíticas, y su estudio se desarrolla en la *sección 4*.

Sin embargo, muchas de las funciones que se utilizan habitualmente no se pueden expresar como series de potencias en determinados puntos, debido a que en esos puntos presentan singularidades. Se plantea entonces la posibilidad de extender el concepto de serie de potencias a una situación más general, es decir a la representación de una función a través de sumas infinitas de series de potencias positivas y negativas. Esto da lugar a la utilización de las series de Laurent o series dobles, que se estudian en la última sección de este capítulo.

3.1. SUCESIONES Y SERIES DE NÚMEROS COMPLEJOS

Las sucesiones y series de números complejos se comportan de la misma forma que las sucesiones y series de números reales. Así, una sucesión de números complejos es un conjunto ordenado de números complejos $\{c_n\}_{n\in N}$, y, dada la sucesión de números complejos $\{c_n\}_{n\in N}$, la serie asociada se representa de la forma $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k$.

Definición 3.1.1:

La sucesión de números complejos $\{c_n\}_{n\in N}$ es ***convergente*** y tiene como límite c si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número natural m tal que para todo $n > m$ los términos c_n de la sucesión están a una distancia de c menor o igual que ε.

Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} c_n = c \equiv \forall\varepsilon > 0 \text{ existe } m \in \mathbf{N} \text{ tal que } \forall n > m,\ |c_n - c| < \varepsilon.$$

Se comprueba fácilmente el siguiente resultado:

Proposición 3.1.1:

Si $c_n = a_n + ib_n$ y $c = a + ib$ se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = c \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ y } \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Basta entonces estudiar el comportamiento de las sucesiones de números reales $\{a_n\}_{n\in N}$ y $\{b_n\}_{n\in N}$ para analizar la convergencia de $\{c_n\}_{n\in N}$.

Las definiciones, propiedades y operaciones de las sucesiones reales se pueden así extender de manera automática al campo complejo.

Definición 3.1.2:

Una sucesión de números complejos $\{c_n\}_{n\in N}$ es una ***sucesión de Cauchy*** si para cada $\varepsilon > 0$ existe $m \in \mathbf{N}$ tal que $\forall n_1, n_2 > m$, $|c_{n1} - c_{n2}| < \varepsilon$.

Como en el caso real se verifica:

Proposición 3.1.2:

Sea $\{c_n\}_{n\in N}$ una sucesión de números complejos, entonces:

$\{c_n\}_{n\in N}$ es una sucesión de Cauchy $\Leftrightarrow$ $\{c_n\}_{n\in N}$ es convergente.

La convergencia de una serie de números complejos se define como el límite de la sucesión de las sumas parciales de la serie.

Definición 3.1.3:

Dada una sucesión de números complejos $\{c_n\}_{n\in N}$, se dice que la serie asociada $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k$ es ***convergente*** si la sucesión de las sumas parciales $S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k$ converge. Es decir:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k = \lim_{n\to\infty} S_n \equiv \forall\varepsilon > 0 \text{ existe } m \in \mathbf{N} \text{ tal que } \forall n > m, \left|\sum_{k=n}^{+\infty} c_k\right| < \varepsilon.$$

Si una serie compleja no es convergente, se dice que es ***divergente***.

Si una serie converge y $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, se dice que S es el valor de la ***suma de la serie***: $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k = S$.

En función de su conveniencia, se utilizará también la notación $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k$, en la que el primer término de la serie se denomina c_0.

Se comprueba fácilmente el siguiente resultado:

Proposición 3.1.3:

Sea $\{c_n\}_{n\in N}$ una sucesión de números complejos tales que $c_n = a_n + ib_n$. Entonces: $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k$ converge $\Leftrightarrow$ $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ convergen.

De la misma forma que en el caso de las sucesiones, basta estudiar el comportamiento de las series de números reales $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ para analizar la convergencia de la serie compleja $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k$. Se pueden utilizar entonces los criterios de convergencia de series reales para analizar la convergencia de las series complejas.

De este hecho se deduce de manera inmediata el siguiente resultado:

Corolario 3.1.4:

Una condición necesaria (no suficiente) para que la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k$ sea convergente es que $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$.

Definición 3.1.4:

La serie $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k$ es ***absolutamente convergente*** si la serie real de sus módulos $\sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|$ converge.

Si la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k$ es absolutamente convergente, como $|a_k| \le |c_k|$ y $|b_k| \le |c_k|$, el criterio de comparación de series reales asegura la convergencia de las series reales $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$ y $\sum_{k=1}^{+\infty} |b_k|$, y como consecuencia de ello la convergencia de las series $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ y $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k$. Se deduce entonces, igual que en el caso real, que la convergencia absoluta de una serie compleja implica la convergencia de la serie.

Dada una serie compleja $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k$ se tienen entonces tres series reales asociadas a ella:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} Re(c_k)\,,\ \sum_{k=1}^{+\infty} Im(c_k) \text{ y } \sum_{k=1}^{+\infty} |c_k|.$$

Basta revisar las propiedades, los teoremas y los criterios de convergencia de las series reales para estudiar automáticamente los de las series complejas. Son de especial utilidad los criterios de la raíz y del cociente, que se enuncian a continuación:

Proposición 3.1.5: ***Criterio de la raíz***

Sea $\{c_n\}$, $n \in$ ***N,*** una sucesión de números complejos, y sea $L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$. Si L es menor que 1 la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ converge absolutamente, y si L es mayor que 1 la serie diverge.

Se observa que en el caso en el que L sea igual a 1, el criterio no afirma nada, por lo que suele denominar el caso dudoso.

Proposición 3.1.6: ***Criterio del cociente***

Sea $\{c_n\}$, $n \in \mathbf{N}$ una sucesión de números complejos, y sea $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$. Si L es menor que 1 la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ converge absolutamente, y si L es mayor que 1 la serie diverge.

Se observa que en el caso en el que L sea igual a 1, el criterio no afirma nada, por lo que suele denominar el caso dudoso.

Es interesante recordar que ambos criterios están estrechamente ligados entre sí, ya que si existe $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ entonces también existe $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ y ambos coinciden.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 3.1.1: Estudiar la convergencia de la sucesión $c_n = \frac{n+i}{n-i}$.

La sucesión c_n se puede expresar como $c_n = \frac{(n+i)^2}{(n-i)(n+i)} = \frac{n^2-1}{n^2+1} + \frac{2ni}{n^2+1}$.

La sucesión de números reales $a_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+1}$ es convergente y tiende a 1, y la sucesión $b_n = \dfrac{2n}{n^2+1}$ también es convergente y tiende a 0. Por tanto la sucesión c_n es convergente y $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$.

Ejemplo 3.1.2: Estudiar la convergencia de la sucesión $c_n = \dfrac{1+(-2)^n i}{2^n}$.

La parte real es la sucesión de números reales $a_n = \dfrac{1}{2^n}$, que converge a 0. Pero la parte imaginaria $b_n = \dfrac{(-2)^n}{2^n}$ es una sucesión de números reales que no converge porque los términos pares de la sucesión tienden a 1 mientras que los impares tienden a –1. Por tanto, la sucesión c_n no converge.

Ejemplo 3.1.3: Demostrar que la serie geométrica $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} c_k = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} c^k$, definida para un número complejo c fijado previamente, es absolutamente convergente si $|c| < 1$, y es divergente si $|c| \geq 1$.

En efecto, si

$S_n = 1 + c + c^2 + \ldots + c^n$, multiplicando esta expresión por c se tiene:

$cS_n = c + c^2 + \ldots + c^{n+1}$.

Restando ambas expresiones:

$S_n (c - 1) = c^{n+1} - 1$, y por tanto $S_n = \dfrac{1-c^{n+1}}{1-c}$.

Si $|c| < 1$, al hacer tender n a infinito $\sum_{k=0}^{+\infty} c^k = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-c}$.

Sin embargo, si $|c| \geq 1$, la sucesión S_n es divergente, puesto que en este caso $\lim_{n\to\infty} c_n$ no tiende a cero.

Ejemplo 3.1.4: Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} = i - \frac{1}{2} - \frac{i}{3} + \frac{1}{4} + \frac{i}{5} - \ldots = (-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \ldots) + i(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots)$. Se tiene entonces que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$.

Las partes real e imaginaria de la serie son series reales alternadas monótonas decrecientes y por tanto convergen. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ es entonces convergente. Sin embargo no es absolutamente convergente ya que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{i^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es la serie armónica, que diverge.

Ejercicios

3.1. Demostrar que la sucesión $c_n = -1 + \frac{1-n}{n^3} i$ converge a -1.

3.2. Demostrar que la sucesión $c_n = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i)^n$ converge a 0.

3.3. Demostrar que la sucesión $c_n = \frac{1+2^n i}{2^n - i}$ converge a i.

3.4. Estudiar la convergencia de las series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n^3}+\frac{2n+3}{n^4}i\right)$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i})^n$

3.2. SUCESIONES Y SERIES DE FUNCIONES COMPLEJAS

Las sucesiones y series de funciones complejas se comportan también de la misma forma que las sucesiones y series de funciones reales. Dada una sucesión $\{f_n(z)\}_{n\in\mathrm{N}}$ de funciones complejas definidas en los puntos z de un conjunto $G \subseteq \boldsymbol{C}$, los conceptos de convergencia puntual, absoluta y uniforme de la sucesión $\{f_n(z)\}_{n\in\mathrm{N}}$ o de la serie asociada $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ son análogos al caso de sucesiones de funciones reales, así como los teoremas que permiten transmitir las buenas propiedades de las funciones que forman la sucesión a la función límite.

3.2.1. Sucesiones de funciones complejas

Sean $f_n(z)$, $n \in \mathbf{N}$, y $f(z)$ funciones complejas definidas en un subconjunto $G \subseteq \boldsymbol{C}$, sea z_0 un punto de G y sea $\{f_n(z)\}_{n\in\mathrm{N}}$ la sucesión de funciones complejas definida con las funciones $f_n(z)$.

Definición 3.2.1:

La sucesión $\{f_n(z)\}_{n\in\mathrm{N}}$ ***converge en el punto*** z_0 a $f(z_0)$ en G si la sucesión numérica $\{f_n(z_0)\}_{n\in\mathrm{N}}$ converge a $f(z_0)$. Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z_0) = f(z_0) \equiv \forall\varepsilon > 0, \exists m \in \boldsymbol{N} \text{ tal que } \forall n > m, |f_n(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Definición 3.2.2:

La sucesión $\{f_n(z)\}_{n\in\mathrm{N}}$ ***converge puntualmente*** a la función $f(z)$ en G si para cada $z_0 \in G$ la sucesión numérica $\{f_n(z_0)\}_{n\in\mathrm{N}}$ converge a $f(z_0)$.

Es decir, para cada $z_0 \in G$ y para cada $\varepsilon > 0$ existe $m \in \boldsymbol{N}$ tal que $\forall n > m$, $|f_n(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Definición 3.2.3:

La sucesión $\{f_n(z)\}_{n\in\mathrm{N}}$ ***converge absolutamente*** a la función $f(z)$ en G si para cada $z_0 \in G$ la sucesión numérica $\{f_n(z_0)\}_{n\in\mathrm{N}}$ converge absolutamente a $f(z_0)$.

Definición 3.2.4:

La sucesión $\{f_n(z)\}_{n\in\mathrm{N}}$ ***converge uniformemente*** a la función $f(z)$ en G si para cada $\varepsilon > 0$ existe $m \in \boldsymbol{N}$ tal que para todo $z \in G$ y todo $n > m$ se verifica que $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$.

Es importante resaltar que para que la convergencia de la sucesión en un conjunto G sea uniforme es preciso que para cada $\varepsilon > 0$ fijado exista un término m de la sucesión, **independiente** del punto z, a partir del cual la distancia entre

$f_n(z)$ y $f(z)$ sea menor ε, para todo $z \in G$.

3.2.2. Series de funciones complejas. Definición y convergencia

Los distintos tipos de convergencia de series se definen a través de la convergencia de las correspondientes sucesiones de sumas parciales asociadas. Sea $\{f_n(z)\}_{n\in \mathrm{N}}$ una sucesión de funciones complejas definidas en un conjunto $G \subseteq \boldsymbol{C}$.

Definición 3.2.5:

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ ***converge en el punto*** $z_0 \in G$ si la serie de números complejos $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z_0)$ converge. Es decir, si para cada $\varepsilon > 0$ existe $m \in \boldsymbol{N}$ tal que $\forall n > m$, se verifica que $\left| \sum_{k=n}^{+\infty} f_k(z_0) \right| < \varepsilon$.

Definición 3.2.6:

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ ***converge puntualmente*** en G si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z_0)$ converge para todo $z_0 \in G$.

Definición 3.2.7:

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ ***converge absolutamente*** en $z_0 \in G$ (respectivamente en G) si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(z_0)|$ converge (resp. $\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(z)|$ converge en todo $z \in G$).

Definición 3.2.8:

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ ***converge uniformemente*** en *G* si para cada ε > 0 existe $m \in \mathbf{N}$ tal que para todo $z \in G$ y $\forall n > m$, se verifica que $\left| \sum_{k=n}^{+\infty} f_k(z) \right| < \varepsilon$.

Es importante señalar que, igual que en el caso de las sucesiones, para que la convergencia de la serie en *G* sea uniforme, el valor *m* debe depender únicamente del ε elegido y no del punto *z* del dominio, como ocurría en la convergencia puntual. Tiene sentido, por tanto, hablar de convergencia uniforme en un conjunto (nunca en un punto).

La relación entre los distintos tipos de convergencia que se acaban de definir es la misma que en el caso real.

De la propia definición se deduce de manera inmediata que la convergencia absoluta implica la convergencia puntual.

La convergencia uniforme de una serie en un conjunto implica también la convergencia puntual de la serie en el conjunto.

Si una serie converge uniformemente en un conjunto *G* también converge uniformemente en cualquier subconjunto de *G*.

Por otra parte, es importante observar que, como en el caso real, la convergencia uniforme de una serie en un conjunto no implica necesariamente la convergencia absoluta de la serie en dicho conjunto.

Los criterios de convergencia de series de funciones reales son válidos para el estudio de la convergencia de series de funciones complejas. De ellos cabe destacar el criterio de Weierstrass que se enuncia a continuación.

Proposición 3.2.1: ***Criterio de la mayorante de Weierstrass***.

Sea $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ una serie de funciones complejas definidas en un subconjunto G del plano complejo, tales que para cada $n \in \mathbf{N}$ existe una constante $M_n \in \Re$ que verifica $|f_n(z)| \leq M_n$, $\forall z \in G$, y $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$. Entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ converge absolutamente y uniformemente en G.

El criterio de la mayorante de Weierstrass permite entonces asegurar la convergencia absoluta y uniforme de una serie de funciones a través de la convergencia absoluta de una serie numérica que la mayore, y será de gran utilidad en el estudio de la convergencia de las series de potencias.

Por ejemplo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge uniformemente y absolutamente en el conjunto $A_r = \{z;\ |z| \leq r\}$, siempre que r sea un número real tal que $0 \leq r < 1$, pues en este caso se tiene que $\left|\frac{z^n}{n}\right| \leq r^n = M_n$, y $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ converge si $r < 1$. En consecuencia, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge puntualmente en $A_1 = \{z;\ |z| < 1\}$ y converge además uniformemente y absolutamente en cualquier conjunto $A_r = \{z;\ |z| \leq r\}$, si $r < 1$.

De la convergencia puntual de una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ en un conjunto G se deduce la existencia de una función $f(z)$ definida en G tal que para cada $z \in G$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z).$$

Definición 3.2.9:

Dada una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ convergente en un conjunto G, se llama ***suma de la serie*** a la función $f(z)$ que define la serie en los puntos de G.

Así, la ***serie geométrica*** $\sum_{k=0}^{+\infty} z^k$, que como se ha comprobado en el *ejemplo 3.1.2.* es convergente para todo valor de z tal que $|z| < 1$, define una función $f(z)$ en el interior del disco unidad, $B_1(0)$, que representa la suma de la serie y es precisamente $\frac{1}{1-z}$, por lo que $\sum_{k=0}^{+\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$, si $|z| < 1$.

De la misma forma que en el caso de series de funciones reales, la obtención de la función que define una serie convergente no es en general una tarea fácil, pero sí lo es para algunos tipos especiales de series. Este es el caso anterior, en el que $\sum_{k=0}^{+\infty} z^k$ es una serie geométrica.

3.2.3. Series de funciones complejas. Continuidad y derivabilidad

La convergencia uniforme de una serie de funciones definidas en un subconjunto del plano complejo permite transmitir a la función límite muchas de las buenas propiedades de las funciones que definen la serie. Los teoremas que aseguran las condiciones que se precisan son los mismos que en el caso de series de funciones reales y se enuncian a continuación.

Proposición 3.2.2:

Si las funciones $f_n(z)$ son continuas en G y la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en G a $f(z)$, entonces $f(z)$ es una función continua en G.

La convergencia uniforme es suficiente para garantizar la continuidad de la función límite de una serie de funciones continuas. Más adelante, cuando se haya introducido el concepto de integración compleja, se podrá comprobar que la convergencia uniforme es también suficiente para asegurar la integrabilidad de la función límite de una serie de funciones integrables.

Sin embargo, la continuidad uniforme no es una condición suficiente para garantizar la derivabilidad de la función límite de una serie de funciones $f_n(z)$ derivables. Se necesitan para ello condiciones adicionales, como señala la siguiente proposición, que también se enuncia sin demostración.

Proposición 3.2.3:

Si las funciones $f_n(z)$ son derivables en G, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ converge en un punto $z_0 \in G$ y la serie de las derivadas $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(z)$ converge uniformemente en G, entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en G a una función derivable $f(z)$ y se tiene que $f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(z)$.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 3.2.1: Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$ = $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^n 2^{-n}$ en el conjunto $G \equiv \{z = x + iy;\ x \geq 0\}$.

Si $\left|\frac{1-z}{1+z}\right| \leq 1$ se tiene que $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}$, serie geométrica convergente, por lo que por el criterio de Weierstrass, si $\left|\frac{1-z}{1+z}\right| \leq 1$ la serie converge absoluta y uniformemente.

Si $z \in G$, se tiene que $\left|\frac{1-z}{1+z}\right|^2 = \frac{(x-1)^2 + y^2}{(x+1)^2 + y^2} \leq 1 \Rightarrow \left|\frac{1-z}{1+z}\right| \leq 1$ y por tanto la serie converge absoluta y uniformemente en *G.*

Ejemplo 3.2.2: Obtener la suma de la serie del *ejemplo 3.2.1.*

Esta serie es una serie geométrica de razón $\frac{1-z}{2(1+z)}$ y como $\left|\frac{1-z}{2(1+z)}\right|$ = $\frac{1}{2}\left|\frac{1-z}{1+z}\right| \leq \frac{1}{2} < 1$ si $z \in G$, la serie se puede sumar en *G* y se tiene

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z) = \frac{1}{1-\left(\frac{1-z}{2(1+z)}\right)} = \frac{2(1+z)}{2(1+z)-(1-z)} = \frac{2(1+z)}{1+3z}.$$

Este resultado se puede extender al subconjunto de puntos del plano complejo tales que $\left|\frac{1-z}{2(1+z)}\right| < 1$, es decir, al conjunto de puntos $z = x + iy$ tal que $(x-1)^2 + y^2 < 4((x+1)^2 + y^2) \Rightarrow 3\,[\,x^2 + y^2 + \frac{10}{3}x + 1] > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad (x + \frac{5}{3})^2 + y^2 - \frac{16}{9} > 0.$$

Se tiene entonces que la serie converge en el conjunto de puntos z tal que $|z + \frac{5}{3}| > \frac{4}{3}$, es decir, converge en el exterior del disco de centro el punto $-\frac{5}{3}$ y de radio $\frac{4}{3}$.

Ejercicios

3.5. Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2-z}{2+z}\right)^{n-1} 3^{-n-1}$ en el conjunto $G \equiv \{\, z = x + iy;\ x \geq 0\}$ y si es posible calcular su suma.

3.6. Estudiar el dominio de convergencia de las series

a) $\sum_{n=0}^{\infty} (2z-1)^{n+1} 4^{-n+1}$.

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{2+z}\right)^{n}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} (1-2z)^{n+1} 4^{-n+1}$

3.7. Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{nz}}{n^2}$ converge en la región $\{z;\ Re\ z < 0\}$.

3.3. SERIES DE POTENCIAS

Dentro de las series de funciones tienen un interés especial las series de potencias. Como se verá a continuación, las series de potencias juegan un papel fundamental dentro de la teoría de funciones de variable compleja.

3.3.1. Definición. Convergencia de una serie de potencias

Definición 3.3.1.

Se denomina ***serie de potencias*** alrededor del punto z_0 a una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, con $c_n \in \mathbf{C}$.

La serie geométrica $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ que se han estudiado en secciones anteriores son ejemplos de series de potencias desarrolladas alrededor del punto $z_0 = 0$, con unos coeficientes c_n que valen respectivamente 1 y $\frac{1}{n}$. Ambas series convergen uniformemente en cualquier disco cerrado de centro 0 y radio r, con $0 < r < 1$, y convergen puntualmente en el disco de radio uno, $\{z;\ |z| < 1\}$.

El primer problema que se puede plantear es el estudio de la convergencia de una serie de potencias. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ converge siempre en el punto $z = z_0$ y su valor es c_0. Se trata de estudiar si además converge en otros puntos distintos de z_0.

Sea $B_R(z_0)$ al disco abierto de centro z_0 y radio R, es decir, el conjunto de números complejos z tales que $|z - z_0| < R$.

La proposición que sigue aporta una información precisa sobre el comportamiento de una serie de potencias frente a la convergencia.

Proposición 3.3.1:

Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ converge en un punto $z_1 \neq z_0$, entonces converge absolutamente y uniformemente en cada disco cerrado $\overline{B}_r(z_0)$, con $r < |z_1 - z_0|$.

Demostración:

Como la serie numérica $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_1 - z_0)^n$ converge, el término general de la sucesión $\{c_n \cdot (z_1 - z_0)^n\}$ tiende a cero y la sucesión está acotada. Sea M una cota de la sucesión, es decir, sea M tal que $|c_n\ (z_1 - z_0)^n| \leq M$, para todo n, y sea $r < |z_1 - z_0|$. Se tiene entonces, para todo $z \in \overline{B}_r(z_0)$,

$$\left|c_n(z - z_0)^n\right| = \left|c_n \frac{(z - z_0)^n}{(z_1 - z_0)^n}(z_1 - z_0)^n\right| \leq M\left|\frac{(z - z_0)^n}{(z_1 - z_0)^n}\right| \leq M\left|\frac{r}{z_1 - z_0}\right|^n = M_n.$$

Al ser $|z_1 - z_0| > r$, la serie de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} M_n = M \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{r}{z_1 - z_0}\right|^n$ converge, ya que es una serie geométrica de razón menor que 1. Aplicando el criterio de Weierstrass se tiene entonces la convergencia absoluta y uniforme de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ en el disco $\overline{B}_r(z_0)$, $r < |z_1 - z_0|$. □

Corolario 3.3.2:

Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ converge en un punto $z_1 \neq z_0$, y no converge en otro punto z_2, existe un número real $R > 0$ tal que la serie converge en $B_R(z_0)$ y no converge en ningún número complejo z tal que $|z - z_0| > R$.

Demostración:

Basta tomar $R = sup\{s \in \Re;\ \exists\ z \in \mathbf{C},\ |z - z_0| = s$ y $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ converge$\}$. El supremo de este conjunto existe siempre puesto que es un conjunto de números reales no vacío y acotado superiormente por $|z_2 - z_0|$. □

La proposición y el corolario anteriores permiten asegurar que si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ además de converger en z_0 converge en algún otro punto z_1, existe un disco centrado en z_0, que contiene a z_1, en cuyo interior la serie converge mientras que fuera de él la serie diverge. Es importante observar que este disco puede tener radio infinito, en cuyo caso la serie converge en todo el plano complejo.

Definición 3.3.2:

Se llama ***radio de convergencia*** de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ al número real R tal que la serie converge en el interior de $B_R(z_0)$ y diverge si $|z - z_0| > R$.

Si la serie sólo converge en el punto z_0 el radio de convergencia es 0. Por el contrario, si la serie converge en todo el plano complejo su radio de convergencia es infinito. En este caso, la *proposición 3.3.1* asegura que la serie converge absolutamente en todo el plano complejo y converge uniformemente en cada disco $B_r(z_0)$, con $0 < r < \infty$.

Utilizando el criterio de la raíz se puede asegurar que

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}},$$

con el convenio de que $\frac{1}{0} = \infty$ y $\frac{1}{\infty} = 0$.

La fórmula anterior permite calcular el radio de convergencia de una serie a partir de los coeficientes de la serie. Sin embargo, en la práctica suele ser más sencillo calcularlo directamente, estudiando la convergencia de la serie.

Así, la serie geométrica $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ converge si $|z| < 1$ y diverge si $|z| > 1$. Tiene por tanto radio de convergencia 1.

Para estudiar el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ se puede aplicar el criterio del cociente, con el que se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{z^{n+1}/(n+1)}{z^n/n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{zn}{n+1} \right| = |z|.$$

La serie entonces converge si $|z| < 1$ y diverge si $|z| > 1$, por lo que su radio de convergencia es 1.

Mediante el criterio del cociente se calcula el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ y se obtiene que también es 1.

Definición 3.3.3:

Se llama ***disco de convergencia*** de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ al disco $B_R(z_0)$, donde R es el radio de convergencia de la serie.

El radio de convergencia de una serie permite pues dividir al plano complejo en dos regiones: el disco de convergencia de la serie, en cuyos puntos la serie converge, y el exterior del disco, es decir, los puntos z del plano tales que $|z - z_0| > R$, donde la serie diverge. En los puntos de la frontera entre las dos regiones el comportamiento de la serie frente a la convergencia puede dar lugar a situaciones diferentes, como se puede apreciar en los ejemplos que se acaban de estudiar:

Las series $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ tienen el mismo radio de convergencia, $R = 1$. Sin embargo, su comportamiento frente a la convergencia en los puntos z de la frontera, $|z| = 1$, es diferente en los tres casos, como se verá a continuación.

La serie geométrica $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ no converge en ningún punto de la circunferencia de centro 0 y radio 1, ya que para cada z_0, $|z_0| = 1$, z_0^n no tiende a 0 al tender n a infinito. Lo que sucede es que para cada z_0, $|z_0| = 1$, con $arg(z_0) = k\cdot\pi$, si k es un número racional, los valores de z_0^n se repiten a partir de un n suficientemente grande, con lo que la serie tiende a infinito. Y si k es un número irracional, los valores de z_0^n no se repiten y van recorriendo puntos diferentes del círculo unidad sin aproximarse a ninguno.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ se comporta de manera diferente en los puntos de la frontera. Si $z = 1$ la serie diverge, pues es la serie armónica. En cambio, la serie converge si $z = -1$ pues coincide con la serie armónica alternada. De hecho, se puede demostrar que converge en todos los puntos de la circunferencia unidad salvo en $z = 1$.

Por último, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ converge absolutamente en todos los puntos de la circunferencia unidad, puesto que si $|z| = 1$ se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, que es convergente.

Los ejemplos anteriores demuestran que la convergencia de una serie en los puntos de la frontera de su disco de convergencia es una cuestión delicada, que aquí sólo se va a tratar en casos puntuales en los que el estudio de la convergencia sea fácil de abordar.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 3.3.1. Calcular el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} nz^n$.

Aplicando el criterio del cociente: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)z^{n+1}}{nz^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)z}{n}\right| = |z|$.

Por tanto, la serie converge si $|z| < 1$ y diverge si $|z| > 1$, con lo cual su radio de convergencia es 1.

Ejemplo 3.3.2. Calcular el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

El criterio del cociente en este caso $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{n!\, z^{n+1}}{(n+1)!\, z^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{z}{n+1} \right| = 0$ para todo *z*. Esto quiere decir que la serie converge en todo el plano complejo y por tanto su radio de convergencia es infinito.

Ejemplo 3.3.3. Calcular el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (1+(-1)^n)^n z^n$.

El radio de convergencia de la serie es:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(1+(-1)^n)^n|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} (1+(-1)^n)} = \frac{1}{2}.$$

El estudio de la convergencia de esta serie también se puede hacer teniendo en cuenta que $\sum_{n=0}^{+\infty} (1+(-1)^n)^n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{2n} z^{2n}$; aplicando el criterio del cociente: $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^{2(n+1)} z^{2(n+1)}}{2^{2n} z^{2n}} \right| = 4\,|z|^2 < 1$ si $|z| < \frac{1}{2}$.

Ejemplo 3.3.4. Calcular el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} n!\, z^n$.

El criterio del cociente de nuevo asegura que:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!\, z^{n+1}}{n!\, z^n} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1)\cdot z = \infty$$

sea cual sea el valor de *z*. Esto quiere decir que la serie diverge en todo el plano complejo salvo $z = 0$, y por tanto su radio de convergencia es 0.

3.3.2. Funciones definidas por series de potencias

Toda serie de potencias define en su disco de convergencia una función compleja.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = f(z).$$

Este es el caso de la serie geométrica $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, que define la función $f(z) = \frac{1}{1-z}$ para todo *z* tal que $|z| < 1$.

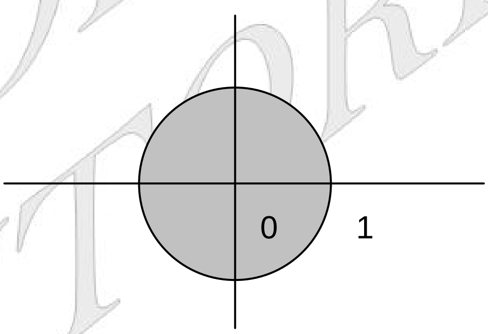

Figura 3.1: Disco de centro el origen y radio 1.

Las funciones definidas como series de potencias se pueden sumar y multiplicar dentro de su radio de convergencia.

Proposición 3.3.3:

Dadas dos funciones *f(z)* y *g*(*z*), definidas como series de potencias tales que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, con un radio de convergencia R_1, y $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - z_0)^n$, con un radio de convergencia R_2, $0 \le R_1 \le R_2$, se tiene que:

$$(f + g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n + d_n)(z - z_0)^n$$

$$(f \cdot g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (z - z_0)^n \text{, con } p_n = \sum_{j=0}^{n} c_j d_{n-j},$$

y ambas series tienen un radio de convergencia mayor o igual que R_1.

Las funciones definidas como series de potencias tienen muy buenas propiedades dentro del disco de convergencia. Ello es debido a que una serie de potencias converge absoluta y uniformemente en cualquier disco cerrado contenido en su disco de convergencia. Esto hace que la función *f(z)* herede las buenas propiedades de las sumas parciales S_n de la serie, que son en realidad polinomios complejos, con lo cual S_n son funciones continuas y derivables cuantas veces se quiera. De esta forma se deduce de manera inmediata la continuidad de *f(z)* en su disco de convergencia. Para estudiar su derivabilidad se define en primer lugar la serie derivada.

Definición 3.3.4:

Dada la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ definida en $B_R(z_0)$, con radio de convergencia R, se llama ***serie derivada*** a la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1}$.

La relación entre estas dos series se determina en las proposiciones que se presentan a continuación.

Proposición 3.3.4:

Las series $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} nc_n (z - z_0)^{n-1}$ tienen el mismo radio de convergencia.

Demostración:

Sea R el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$. Para obtener el radio de convergencia de la serie derivada se calcula:

$$\lim_{n\to\infty}\sup \sqrt[n-1]{|nc_n|} = \lim_{n\to\infty}\sup \left(\sqrt[n]{|nc_n|}\right)^{\frac{n}{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\sup \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}.$$

Por tanto, el radio de convergencia de la serie derivada es también R. □

Proposición 3.3.5:

Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ converge en $B_R(z_0)$, $f(z)$ es derivable en $B_R(z_0)$ y $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nc_n (z - z_0)^{n-1}$ para todo z de $B_R(z_0)$.

Demostración:

Es consecuencia inmediata de las *proposiciones 3.2.3 y 3.3.4*.

Proposición 3.3.6:

Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ converge en $B_R(z_0)$, $f(z)$ es infinitamente derivable en $B_R(z_0)$.

Demostración:

Basta aplicar la *proposición 3.3.5* a las sucesivas derivadas.

Proposición 3.3.7:

Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ converge en $B_R(z_0)$, se tiene que $c_n = \frac{f^{(n}(z_0)}{n!}$, y la serie de potencias coincide con la serie de Taylor en el punto z_0 de la función que define la serie:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n .$$

Demostración:

En virtud de la *proposición 3.3.5.* se tiene que $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nc_n (z - z_0)^{n-1}$ con lo que $f'(z_0) = c_1$.

Aplicando de nuevo la proposición a la serie derivada:

$$f''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n (z - z_0)^{n-2}$$

con lo que $f''(z_0) = 2c_2$ y $c_2 = f''(z_0)/2$.

Repitiendo el proceso k veces se tiene:

$$f^{k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)c_n (z - z_0)^{n-k}$$

por lo que $f^{k)}(z_0) = k!\cdot c_k$ y $c_k = f^{k)}(z_0)/k!$, con lo cual la serie de potencias que define la función coincide necesariamente con la serie de Taylor de la función.

□

Proposición 3.3.8:

Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ es igual a cero en un entorno del punto z_0, debe ser idénticamente nula en todo su dominio de convergencia.

Demostración:

Si $f(z) = 0$ en un entorno de z_0 todas las derivadas de f en z_0 deben valer cero, y por tanto los coeficientes de la serie deben ser 0. Se tiene así que, aplicando la *proposición 3.3.7*, la serie es idénticamente nula en todo su dominio de convergencia. □

Es interesante observar que las condiciones de la *proposición 3.3.8.* se pueden debilitar de manera que basta que $f(z)$ se anule en una sucesión de puntos $z_n \to z_0$ para asegurar que la función tiene que ser idénticamente nula en todo su dominio de convergencia.

La proposición anterior permite demostrar de manera inmediata el principio de unicidad para las series de potencias.

Proposición 3.3.9:

Si las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ tienen el mismo radio de convergencia R y coinciden en un conjunto de puntos $\{z_n, z_0\}$, con $z_n \to z_0$, entonces necesariamente $a_n = b_n$ para todo n, y las dos series coinciden en todo su disco de convergencia.

Las proposiciones anteriores confirman las buenas propiedades de las funciones que se pueden expresar como series de potencias, así como la estrecha relación que existe entre una serie y su serie derivada. Esta relación permite utilizar de manera alternativa una serie o su serie derivada para estudiar la convergencia de la otra, o incluso para obtener su suma.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 3.3.5. Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n(z-i)^{n-1}}{5^n}$ y calcular su suma.

La serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n(z-i)^{n-1}}{5^n}$ es la serie derivada de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-i)^{n}}{5^n}$, que es una serie geométrica de razón $\frac{z-i}{5}$ y, por tanto, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-i)^{n}}{5^n}$ converge si $|z - i| < 5$. Se puede entonces asegurar lo mismo para la serie derivada, con lo que el disco de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n(z-i)^{n-1}}{5^n}$ es $B_5(i)$.

Para obtener su suma se puede utilizar de nuevo la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-i)^{n}}{5^n}$, ya que al ser una serie geométrica se puede sumar fácilmente y coincide en $B_5(i)$ con la función $f(z) = \frac{1}{1-\frac{z-i}{5}} = \frac{5}{5+i-z}$, por lo que obteniendo su derivada:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(z-i)^{n-1}}{5^n} = f'(z) = \frac{5}{(5+i-z)^2}.$$

Ejemplo 3.3.6. Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} nz^n$ utilizando su serie derivada y calcular su suma.

Otra forma de resolver el problema es la siguiente. La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} nz^n = z \sum_{n=0}^{+\infty} nz^{n-1}$. Como la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} nz^{n-1}$ es la serie derivada de $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, se tiene que el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{+\infty} nz^n$ es el mismo que el de $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, y por tanto vale 1.

La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} nz^n$ se puede expresar como $z\sum_{n=0}^{+\infty} nz^{n-1}$ y como la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} nz^{n-1}$ es la serie derivada de $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ en el disco $B_1(0)$, se tiene que $\sum_{n=0}^{+\infty} nz^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}$. Por tanto $\sum_{n=0}^{+\infty} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}$, $z \in B_1(0)$.

Ejemplo 3.3.7. Obtener una serie de potencias en el punto $z = 0$ que coincide con la función $f(z) = \frac{3}{1-2z}$ en algún disco del plano complejo y estudiar su dominio de convergencia.

La función $f(z)$ se puede considerar como tres veces la suma de los términos de una progresión geométrica de razón $2z$, y por tanto:

$f(z) = 3\sum_{n=0}^{\infty}(2z)^n = 3\sum_{n=0}^{\infty}2^n z^n$, que converge si $|2z| < 1$, es decir si $|z| < \frac{1}{2}$.

Su dominio de convergencia es el disco $B_{\frac{1}{2}}(0)$.

Ejemplo 3.3.8. Obtener una representación de la función $f(z) = \frac{2z+1}{1-z}$ en serie de potencias alrededor del punto $z = 0$ y estudiar su dominio de convergencia.

La función $f(z)$ se puede expresar de la forma:

$f(z) = -2 + \frac{3}{1-z} = -2 + 3\sum_{n=0}^{\infty}z^n = 1 + 3\sum_{n=1}^{\infty}z^n$, que tiene como dominio de convergencia el disco $B_1(0)$.

Ejercicios

3.8. Calcular el radio de convergencia de las series de potencias

a) $\sum_{n=0}^{+\infty}2^{-n}(2z-i)^{n^2}$

b) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n}{2^n+n}(z+i)^n$

c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{4^{n-2}}$

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!\, z^{n-1}}{n^n\, 2^n}$

e) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2+i)^n} (z+2-i)^n$.

3.9. Desarrollar en serie de potencias las siguientes funciones, calculando el radio de convergencia de la serie obtenida.

a) $\frac{3}{(1-z)^2}$

b) $\frac{2z+1}{(1-z)^2}$.

3.10. Calcular, para los valores de *z* que sea posible, la suma de las series:

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$

b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$.

3.4. FUNCIONES ANALÍTICAS

El hecho de que las funciones definidas como series de potencias tengan tan buenas propiedades motiva el que se las considere como un grupo especial de funciones, las funciones analíticas, que se estudian a continuación.

3.4.1. Definición y propiedades

Definición 3.4.1:

La función $f(z)$ es ***analítica en un punto*** z_0 si $f(z)$ se puede expresar de la forma:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \text{ en } B_R(z_0), \text{ con } R > 0.$$

Se dice también que $f(z)$ es analítica en z_0 si $f(z)$ es desarrollable en serie de potencias en un entorno de z_0.

Se tiene entonces que $f(z)$ es analítica en el punto z_0 si la serie de Taylor de la función en z_0, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$, tiene radio de convergencia R estrictamente mayor que cero.

Así, la función $f(z) = \frac{1}{1-z}$ es analítica en el punto 0 porque $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ en el disco $|z| < 1$.

Definición 3.4.2:

La función $f(z)$ es ***analítica en un conjunto*** G si $f(z)$ es analítica en cada uno de los puntos de G.

Si una función es analítica se tiene el siguiente resultado que se enuncia sin demostración.

Proposición 3.4.1:

Si $f(z)$ es analítica en un punto z_0 es también analítica en todo el disco de convergencia de la serie. Es decir, si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ en $B_R(z_0)$, con $R > 0$, $f(z)$ es también analítica en todo el disco $B_R(z_0)$.

La *proposición 3.4.1* permite asegurar que la función $f(z) = \frac{1}{1-z}$ no sólo es analítica en el punto 0, sino que también es analítica en todo el disco $|z| < 1$.

Se puede comprobar fácilmente que las funciones analíticas tienen las siguiente propiedades:

1- La suma, el producto y la composición de funciones analíticas es una función analítica.

2- Si $f(z)$ es analítica en un conjunto G, $f(z)$ es holomorfa en G.

3- Si $f(z)$ es analítica en todo el plano complejo $f(z)$ es una función entera.

3.4.2. Desarrollos en serie de funciones

Se presentan a continuación a modo de ejemplo los desarrollos de Taylor en $z = 0$ de algunas de las funciones mas usuales, que coinciden con los correspondientes desarrollos en $\mathfrak{R}$.

La **función exponencial** $f(z) = e^z$ es una función analítica en todo el plano complejo, puesto que $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, que tiene radio de convergencia infinito y por tanto converge en todo ***C***.

Las **funciones trigonométricas** *sen z* y *cos z* son también funciones analíticas en ***C***, pues se pueden desarrollar en serie potencias positivas alrededor de $z = 0$ de la forma:

$$sen\ z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!},\ cos\ z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

Ambos desarrollos tienen radio de convergencia infinito y por tanto convergen en todo ***C***.

Las **funciones hiperbólicas** *senh z* y *cosh z* tienen desarrollos en serie de potencias positivas alrededor de $z = 0$ de la forma:

$$senh\ z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\ cosh\ z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

que tienen también radio de convergencia infinito y por tanto convergen en todo ***C***.

La función exponencial, el seno, el coseno, el seno hiperbólico y el coseno hiperbólico son funciones analíticas en todo el plano complejo ***C***, es decir, son funciones enteras.

Por último, la función **logaritmo** se puede también expresar de la forma:

$$Log\ (1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1},$$

que tiene radio de convergencia 1.

La función *Log* (1 + *z*), *Arg z* $\in (-\pi, \pi]$, no puede ser analítica en todo el plano complejo ***C*** porque no es continua en el semieje $\{z: z \in \mathfrak{R}, z \leq -1\}$. Sin embargo, los resultados de la siguiente sección permiten demostrar que es analítica en los restantes puntos del plano complejo, es decir, en todo el plano salvo los puntos $z = a$, siendo a un número real tal que $a \in (-\infty, -1]$.

3.4.3. Prolongación analítica

La *proposición 3.4.1.* asegura que una función $f(z)$ definida como una serie de potencias, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, es analítica en todo el disco $B_R(z_0)$, y permite asegurar que la función $f(z) = \frac{1}{1-z}$ es analítica en todo el disco $|z| < 1$. Pero la función $f(z) = \frac{1}{1-z}$ es un cociente de polinomios, y por tanto es indefinidamente derivable en todos los puntos del plano complejo salvo en $z = 1$, y por tanto es razonable pensar que se pueda extender el dominio del plano en el que se pueda asegurar que $f(z)$ es analítica. Este proceso se conoce como ***prolongación analítica***.

La cuestión que se plantea es la siguiente:

Dada la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ convergente en $B_R(z_0)$ y dado $z_1 \in B_R(z_0)$, ¿existe una serie $\sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - z_1)^n$, con radio de convergencia R_1 tal que si $z \in B_R(z_0) \cap B_{R_1}(z_1)$ las series coinciden?

La respuesta la da la siguiente proposición que se enuncia sin demostración.

Proposición 3.4.2:

Dada $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ con radio de convergencia $R > 0$, y dado un punto $z_1 \in B_R(z_0)$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n}(z_1)}{n!}(z - z_1)^n$ tiene radio de convergencia $R_1 \geq R - |z_1 - z_0| > 0$, y define una función $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n}(z_1)}{n!}(z - z_1)^n$ tal que $g(z) = f(z)$ si $z \in B_R(z_0) \cap B_{R_1}(z_1)$.

A continuación se propone un ejemplo que ilustra la proposición anterior: La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$ tiene radio de convergencia $R = 2$ y define en el disco $B_2(0)$ la función $f(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{1}{2-z}$.

Las derivadas sucesivas de $f(z)$ son: $f'(z) = \frac{1}{(2-z)^2}$, $f''(z) = \frac{2}{(2-z)^3}$, ..., $f^{n)}(z) = \frac{n!}{(2-z)^{n+1}}$.

Sea ahora $z_1 = -1 \in B_2(0)$. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n}(-1)}{n!}(z+1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{3^{n+1}}$ tiene radio de convergencia $R_1 = 3$ y define entonces en $B_3(-1)$ la función $g(z)$, que coincide con $f(z)$ en $B_2(0) \cap B_3(-1)$ puesto que $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z+1}{3}} = \frac{1}{2-z} = f(z)$. La función $g(z)$ se denomina prolongación analítica de

$f(z)$ en $B_3(-1) \setminus B_2(0)$.

Si se repite el proceso en otro punto diferente que pertenezca al disco $B_2(0)$, por ejemplo, en z_2 = i, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n}(i)}{n!}(z-i)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$ tiene radio de convergencia $R_2 = \sqrt{5}$ y define en el disco $B_{\sqrt{5}}(i)$ una función $h(z)$ que también coincide con $f(z)$ en $B_2(0) \cap B_{\sqrt{5}}(i)$.

Las funciones $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{3^{n+1}}$ y $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$ son prolongaciones analíticas de $f(z)$ en sus respectivos dominios.

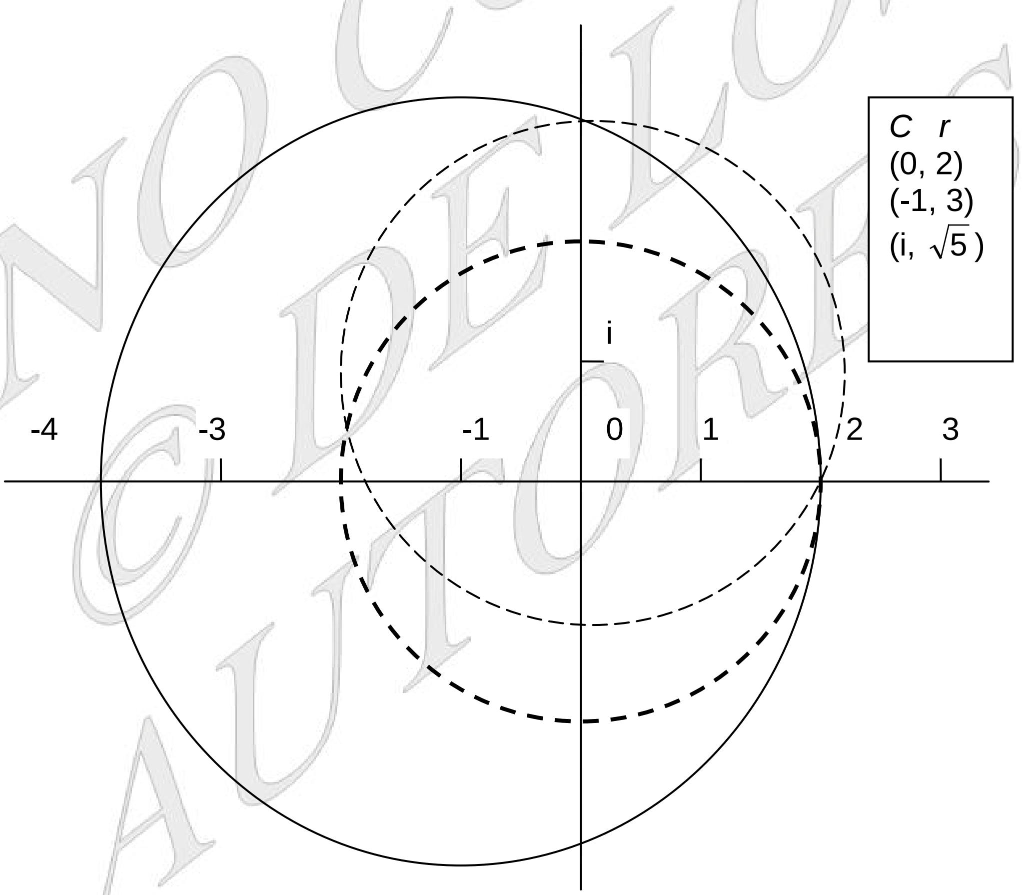

Figura 3.2: Prolongación analítica

A través del ejemplo que se acaba de presentar se puede observar que en general se puede prolongar analíticamente una función desde un punto z^*

en un disco de radio igual a la distancia de z^* al punto más próximo a z^* en el que la función tenga una singularidad, es decir, un punto donde la función no es derivable (el concepto de singularidad se estudia con más detenimiento en el *capítulo 5*). En el ejemplo anterior, la función $f(z) = \frac{1}{2-z}$ tiene una singularidad en el punto $z = 2$, por lo que al hacer un desarrollo de Taylor de la función en el punto $z_1 = -1$ se ha obtenido un radio de convergencia $R_1 = 3$, que es precisamente la distancia entre los puntos -1 y 2, y en el caso de $z_2 = \mathrm{i}$ el radio de convergencia es $R_2 = \sqrt{5}$, que coincide con la distancia entre los puntos i y 2.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 3.4.1. Estudiar si la función $f(z) = \frac{2z+3}{z-1}$ es analítica en el punto $z = -1$.

La función $f(z) = \frac{2z+3}{z-1} = 2 + \frac{5}{z-1} = 2 - \frac{5}{2-(z+1)} = 2 - \frac{\frac{5}{2}}{1-\frac{z+1}{2}} =$

$= 2 - \frac{5}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{2}\right)^n$, es, por tanto, desarrollable en serie de potencias alrededor de $z = -1$ con un radio de convergencia $R = 2 > 0$, ya que el desarrollo es válido en el disco $|z + 1| < 2$.

Ejemplo 3.4.2. Obtener una prolongación analítica del disco $|z + 1| < 2$ para la función $f(z) = \frac{2z+3}{z-1}$, de manera que en la nueva región esté contenido el punto $z = 1 + \mathrm{i}$.

Para prolongar analíticamente la función de manera que el punto z = 1 + i esté contenido en la nueva región, basta tomar un punto adecuado del disco $|z + 1| < 2$, tal que su distancia al punto 1 + i sea menor que su distancia al punto donde está la singularidad mas próxima de la función. Así, por ejemplo, el punto z = i está a distancia 1 de z = 1 + i, y a distancia $\sqrt{2}$ de la singularidad mas próxima de la función, que está en el punto z = 1. Se tiene entonces:

$$f(z) = \frac{2z+3}{z-1} = 2 + \frac{5}{z-1} = 2 - \frac{5}{1-i-(z-i)} = 2 - \frac{\frac{5}{1-i}}{1-\frac{z-i}{1-i}} =$$

$$= 2 - \frac{5}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n \text{, que converge si } |z - i| < |1 - i| = \sqrt{2}.$$

Ejercicios

3.11. Obtener los desarrollos en serie de potencias alrededor de z = 0 de las funciones

a) $f(z) = sen(2z)$

b) $f(z) = cos(z^2)$

c) $f(z) = z^3 \cdot sen(z^2) + 1$

d) $f(z) = \dfrac{z^2}{2z-3}$

e) $f(z) = \dfrac{z^3 - z}{2z+2}$.

3.12. Obtener los desarrollos en serie de potencias alrededor de z = 1 de las funciones:

a) $f(z) = \dfrac{z^2}{2z-3}$

b) $f(z) = \dfrac{z^2+z}{2z+2}$.

c) $f(z) = \dfrac{z}{z-3}$

d) $f(z) = \dfrac{z^2+z}{z+2}$.

3.13. Estudiar si la función $f(z) = \dfrac{senz}{z}$ si $z \neq 0$, $f(0) = 0$, es analítica en ***C***.

3.14. Estudiar si la función $f(z) = \dfrac{\cos z - 1}{z^2}$ si $z \neq 0$, $f(0) = -\dfrac{1}{2}$, es analítica en ***C***.

3.15. Estudiar si la función $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z}$ si $z \neq 0$, $f(0) = 1$, es analítica en ***C***.

3.5. SERIES DE LAURENT

Cabe plantearse ahora la posibilidad de desarrollar una función en serie de potencias en un entorno de una singularidad. Naturalmente el problema no puede resolverse sin introducir algunos conceptos, puesto que las series del tipo *Taylor* dan lugar a funciones holomorfas. El problema se soluciona utilizando las series de potencias inversas.

3.5.1. Series de Laurent. Definición y convergencia

Muchas de las funciones que se utilizan habitualmente no se pueden expresar como series de potencias en las proximidades de determinados puntos, debido a que en esos puntos presentan singularidades, pero si se pueden, en cambio, expresar como sumas de potencias positivas y negativas. Las siguientes funciones son ejemplo de ello:

1. $f(z) = \frac{(z+1)^2}{z} = z + 2 + \frac{1}{z}$.

2. $g(z) = \frac{1}{z^2(1-z)} = \frac{1}{z^2}\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z^2}(1 + z + z^2 + ...) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + ...$

3. $h(z) = exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + ... + \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} + ...$

Las funciones anteriores son ejemplos de funciones que se pueden expresar como sumas, finitas o infinitas, de potencias positivas y negativas de z. Pero es fundamental saber para qué valores de z las sumas anteriores representan a las correspondientes funciones, o, lo que es igual, obtener el dominio de convergencia de las series que las definen. Las series de potencias positivas y negativas se denominan series de Laurent o series dobles.

Definición 3.5.1:

Se llama ***serie de Laurent***, o ***serie doble***, a una serie definida de la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n} .$$

Una serie de Laurent se puede expresar entonces como la suma de dos series. La primera de ellas es una serie de potencias positivas y se llama **parte analítica** de la serie. La segunda está formada por los sumandos con potencias negativas y se conoce como la **parte principal** de la serie.

Un ejemplo es la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{2^{|n|}}$, que representa a la suma de las series

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{2^{|n|}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n z^n}.$$

Definición 3.5.2:

La serie de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ ***converge*** si convergen la parte analítica y la parte principal de la serie. Si éstas convergen, el valor de la serie de Laurent es la suma de los valores de las dos series.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-z_0)^{-n}.$$

Para investigar la convergencia de la serie de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ se estudia por separado la convergencia de la parte analítica y la parte principal de la serie; el dominio de convergencia de la serie es entonces la intersección de las dos regiones de convergencia.

La parte analítica $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ es una serie de potencias y por tanto converge en el disco $B_R(z_0)$, siendo R el radio de convergencia de la serie de potencias.

La parte principal es una serie de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \frac{1}{(z-z_0)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-z_0)^{-n} .$$

Si se aplica el criterio del cociente para estudiar su convergencia,

$$\left| \frac{c_{-(n+1)}(z-z_0)^{-(n+1)}}{c_{-n}(z-z_0)^{-n}} \right| = \left| \frac{c_{-(n+1)}}{c_{-n}} \right| \left| \frac{1}{(z-z_0)} \right| < 1 \text{ si } |z - z_0| > \left| \frac{c_{-(n+1)}}{c_{-n}} \right| =$$

R_1, es decir, la parte principal de la serie de Laurent converge si $|z - z_0| > R_1$.

Se puede decir entonces que la serie doble converge si $R_1 < |z - z_0| < R$, siempre que $R_1 < R$.

El dominio de convergencia de una serie doble es, por tanto, una corona circular con centro el punto z_0 y radios R_1 y R.

Se demostrará más adelante, en el *capítulo 5,* que el comportamiento de una serie de Laurent en su dominio de convergencia es muy bueno, pues se puede asegurar la convergencia uniforme de la serie sobre conjuntos compactos contenidos en la corona circular que define su dominio de convergencia.

Si R es infinito, el dominio de convergencia de la serie doble es el exterior del círculo de centro z_0 y radio R_1.

Si $R_1 = 0$, el dominio de convergencia de la serie es lo que se denomina un **disco pinchado**: el interior del círculo de centro z_0 y radio R salvo el punto z_0, $B'_R(z_0)$.

Si R es infinito y además $R_1 = 0$, el dominio de convergencia de la serie se extiende a todo el plano complejo excepto el punto z_0, $\boldsymbol{C} \setminus \{z_0\}$.

Así, por ejemplo, la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{2^{|n|}}$ converge en la corona circular $\frac{1}{2}$ < $|z|$ < 2, pues la parte analítica $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$ tiene radio de convergencia $R = 2$, y la parte principal $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n z^n}$ es una serie geométrica de razón $|2z|^{-1}$ y por tanto converge si $|2z|^{-1} > 1$, es decir, si $|z| > \frac{1}{2}$.

Para obtener la función que define la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{2^{|n|}}$ se estudian su parte analítica y su parte principal.

La parte analítica representa a la función $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \frac{2}{2-z}$ si $|z| < 2$. La parte principal representa a la función $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n 2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2z}} = \frac{2z}{2z-1}$ si $|z| > \frac{1}{2}$. Por tanto, si $\frac{1}{2} < |z| < 2$, la serie de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{2^{|n|}}$ define la función:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{2^{|n|}} = \frac{2}{2-z} + \frac{2z}{2z-1} = \frac{-2z^2+8z-2}{(2-z)(2z-1)}.$$

3.5.2. Representación de funciones en serie de Laurent

En esta sección se aborda el problema inverso: dada una función previamente fijada, obtener una representación de la función en serie de

Laurent alrededor de un punto.

Para una mayor facilidad de comprensión se toma una función concreta y se estudian para dicha función distintas posibilidades.

Sea $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$. Esta función es indefinidamente derivable en todo el plano complejo salvo los puntos $z = 2$ y $z = 3$. Se presentan a continuación desarrollos en serie de Laurent de $f(z)$ en los puntos $z = 0$, $z = 2$ y $z = 3$.

1.- *Desarrollo en serie de Laurent de* $f(z)$ *en* $z = 0$.

Si se quiere obtener en primer lugar un desarrollo en serie doble alrededor de $z = 0$, se puede dividir el plano complejo en tres regiones distintas, delimitadas por circunferencias con centro *en* $z = 0$, de manera que en el interior de cada una de ellas la función no tenga singularidades:

$A = \{z;\ |z| < 2\}$, $B = \{z;\ 2 < |z| < 3\}$ y $C = \{z;\ |z| > 3\}$.

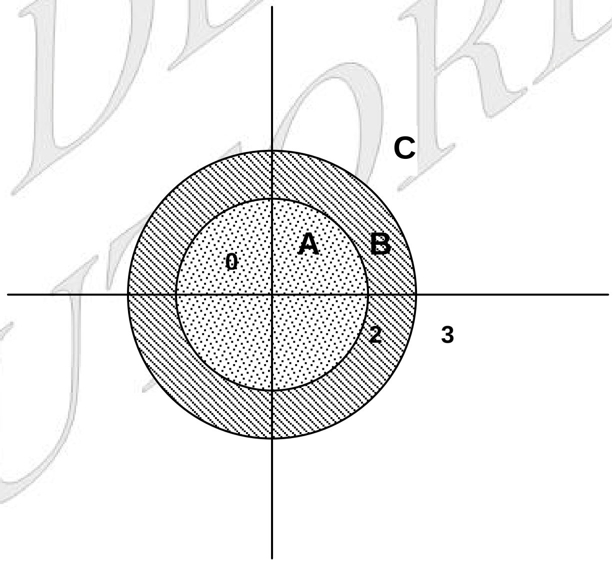

Figura 3.3: Regiones *A*, *B* y *C* del desarrollo en serie de Laurent en $z = 0$.

Si z está en el conjunto A,

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2} = -\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{z}{3}} + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} + ...\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \dots\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right)z^n .$$

Se tiene entonces que es una serie de potencias positivas de z que coincide con la función $f(z)$ siempre que z pertenezca al conjunto A, y f es por tanto una función analítica en A

Si z está en el conjunto B, se tiene que $2 < |z| < 3$, y

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2} = -\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{z}{3}} - \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{2}{z}} =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} + \dots\right) - \frac{1}{z}\left(1 + \frac{2}{z} + \frac{2^2}{z^2} + \dots\right) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n} .$$

La función $f(z)$ se puede representar como una serie doble alrededor de $z = 0$, y la representación es válida en el conjunto B.

Finalmente, si z está en el conjunto C, es decir, $|z| > 3$,

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2} = \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{3}{z}} - \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{2}{z}} =$$

$$= \frac{1}{z}\left(1 + \frac{3}{z} + \frac{3^2}{z^2} + \dots\right) - \frac{1}{z}\left(1 + \frac{2}{z} + \frac{2^2}{z^2} + \dots\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n - 2^n}{z^{n+1}} .$$

La función $f(z)$ se puede representar como una serie de Laurent alrededor de $z = 0$ cuya parte analítica es cero, es decir, sólo tiene parte principal, y la representación es válida en el conjunto ***C***.

2.- *Desarrollo en serie de Laurent de* f(z) *en* z = 2.

Para obtener un desarrollo en serie doble *de f(z) en z* = 2, se divide el plano complejo en dos regiones distintas, delimitadas por circunferencias con centro *en z* = 2, de manera que en el interior de cada una de ellas la función no tenga singularidades:

$$A^* = \{z;\ 0 < |z - 2| < 1\} \text{ y } B^* = \{z;\ |z - 2| > 1\}.$$

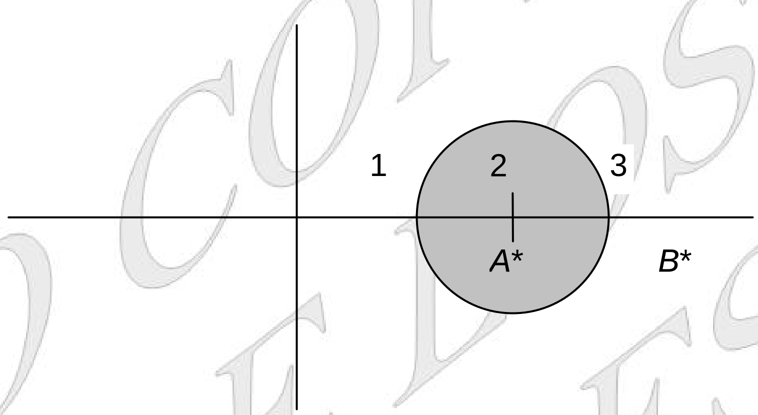

Figura 3.4: Regiones A^* y B^* del desarrollo en serie de Laurent en z = 2.

Si z está en el conjunto A^*, entonces $0 < |z - 2| < 1$, y

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{1}{z-2}\,\frac{1}{z-2-1} = \frac{1}{z-2}\,\frac{-1}{1-(z-2)} =$$

$$= -\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^n = -\frac{1}{z-2} - \sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^n .$$

La representación en serie de Laurent de $f(z)$ está formada por una serie de potencias positivas como parte analítica y un único término como parte principal, y coincide con la función siempre que z pertenezca al conjunto A^*.

Si z está en el conjunto B^*, entonces $|z - 2| > 1$, y

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{1}{z-2}\,\frac{\frac{1}{z-2}}{1-\frac{1}{z-2}} =$$

$$\frac{1}{(z-2)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-2)^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-2)^{n+2}}.$$

La función $f(z)$ se puede representar como una serie doble alrededor de $z = 2$, cuya parte analítica es cero, y la representación es válida en el conjunto B^*.

3.- *Desarrollo en serie de Laurent de f(z) en z* = 3.

Para obtener un desarrollo en serie doble *de f(z) en z* = 3, se divide también el plano complejo en dos regiones, delimitadas por circunferencias con centro *en* $z = 3$, de manera que en el interior de cada una de ellas la función no tenga singularidades:

$$A^{**} = \{z;\ 0 < |z-3| < 1\} \text{ y } B^{**} = \{z;\ |z-3| > 1\}.$$

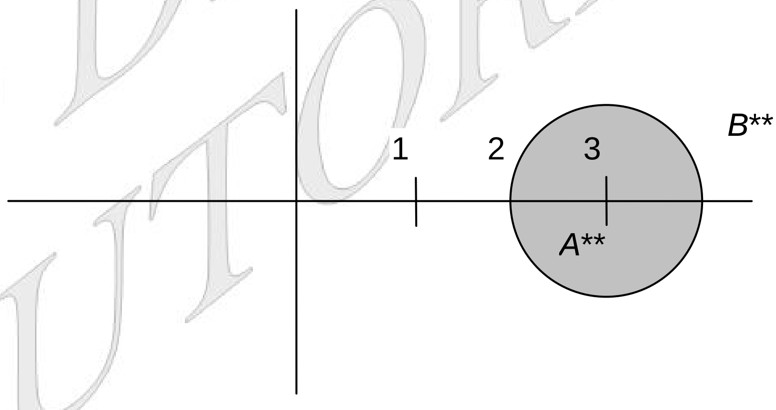

Figura 3.5: Regiones A^{**} y B^{**} del desarrollo en serie de Laurent en $z = 3$

Si z está en el conjunto A^{**}, entonces $0 < |z-3| < 1$, y

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{1}{z-3}\,\frac{1}{1+(z-3)} = \frac{1}{z-3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-3)^n =$$

$$= \frac{1}{z-3} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-3)^n .$$

Entonces *f(z)* tiene una representación en serie de Laurent formada por una serie de potencias positivas como parte analítica y un único término como parte principal, y coincide con la función siempre que *z* pertenezca al conjunto *A***.

Si *z* está en el conjunto *B***, entonces $|z - 3| > 1$, y

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{1}{z-3}\,\frac{\frac{1}{z-3}}{1+\frac{1}{z-3}} = \frac{1}{(z-3)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-3)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-3)^{n+2}} .$$

La función *f(z)* se puede representar como una serie doble alrededor de *z* = 3, cuya parte analítica es cero, y la representación es válida en el conjunto *B***.

Ejercicios

3.16. Representar en serie de Laurent alrededor de *z* = 0 la función *f*(*z*) $= \frac{5}{z(z-1)}$ de manera que la representación sea válida en los siguientes dominios:

a) $0 < |z| < 1$,

b) $|z| > 1$.

3.17. Representar la función $f(z) = \frac{5z-1}{(z-1)(z+4)}$ en suma de potencias positivas y negativas de *z* + 4, calculando la corona circular de convergencia de la serie.

3.18. Representar la función $f(z) = \dfrac{5z-1}{(z-1)(z+4)}$ en suma de potencias positivas y/o negativas de z, en todas las regiones posibles, determinando en cada caso el dominio de convergencia.

3.6. EJERCICIOS

3.19. Demostrar la *proposición 3.1.1*.

3.20. Demostrar que la sucesión $c_n = 2 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1-n^2}{3n^3}$i converge a 2.

3.21. Demostrar que la sucesión $c_n = \dfrac{1+2^n i}{2^n + i}$ converge a i.

3.22. Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(1+i)^n}{(\sqrt{2})^n n^2}$.

3.23. Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(iz-1)^n}{2^{n+1}}$ cuando z toma los valores a) $z = 1$, b) $z = $ i, c) $z = -1$ y d) $z = 1 + $ i.

3.24. Estudiar los dominios de convergencia de las series siguientes y si es posible calcular su suma.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(iz-1)^n}{2^{n+1}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{z}{z+1}\right)^n$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+z^2)^n}$

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (z^{n-1} - z^{n+1})$

3.25. Demostrar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, e^{in^2 z}$ converge en la región {z; $Im\ z > 0$}.

3.26. Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(1-z^{2n})(1-z^{2n+2})}$ converge absolutamente en el disco abierto de centro 0 y radio 1, y calcular su suma.

3.27. Calcular el radio de convergencia de las series de potencias:

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} z^{n^2}$

b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+3}{2^n} (z+i)^n$

c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{4^n}$

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!\, z^n}{n^n}$.

3.28. Calcular el radio de convergencia de las series de potencias:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n!\, z^{n^2}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{2^n n^2}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n z^{n!}$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n}(z+2-i)^n$.

3.29. Calcular el radio de convergencia de la serie que resulta de sumar las series:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2z-1)^{n+1}4^{-n+1} \text{ y } \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{2+z}\right)^n .$$

3.30. Desarrollar en serie de potencias las siguientes funciones, calculando el radio de convergencia de la serie obtenida.

a) $\dfrac{z}{1-z^2}$

b) $\dfrac{z}{z^2-5z+6}$.

3.31. Calcular, para los valores de z que sea posible, la suma de las series:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n}$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} 2n(n-1)z^n$.

3.32. Sabiendo que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n$ tiene radio de convergencia R, calcular el radio de convergencia de las series:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n n^p z^n$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n| z^n$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} {c_n}^2 z^n$.

3.33. Obtener los desarrollos en serie de potencias alrededor de $z = 0$ de las funciones:

a) $f(z) = cos\frac{z}{2}$

b) $f(z) = sen(z^2)$

c) $f(z)= z^2 \cdot cos(z^3) - 2z$.

3.34. Obtener los desarrollos en serie de potencias alrededor de $z = 0$ de las funciones:

a) $f(z) = \frac{z^2}{1-z^2}$

b) $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2}$

c) $f(z) = Log\,(z+2)$.

3.35. Estudiar si la función $f(z) = \dfrac{senz}{z}$ si $z \neq 0$, $f(0) = 1$, es analítica en ***C***.

3.36. Estudiar si la función $f(z) = \dfrac{senz - z}{z^3}$ si $z \neq 0$, $f(0) = 1/6$, es analítica en ***C***.

3.37. Estudiar si la función $f(z) = \dfrac{cos^2 z - 1}{z^2}$ si $z \neq 0$, $f(0) = -1$, es analítica en ***C***.

3.38. Estudiar si la función $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z}$ si $z \neq 0$, $f(0) = 5$, es analítica en ***C***.

3.39. Estudiar si la función $f(z) = \dfrac{e^{z^2} - 1}{z^2}$ si $z \neq 0$, $f(0) = 1$, es analítica en ***C***.

3.40. Obtener la serie de Laurent de la función $f(z) = \dfrac{e^z}{(z-2)^3}$ en potencias de $z - 2$.

3.41. Obtener una representación en potencias negativas de z de la función $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ y calcular el dominio de convergencia de la serie.

3.42. Representar en serie de Laurent alrededor de $z = 0$ la función $f(z) = \dfrac{2}{(z+1)(z-3)}$ de manera que la representación sea válida en los siguientes dominios:

a) $|z| < 1$, b) $1 < |z| < 3$, c) $|z| > 3$.

3.43. Representar la función $f(z) = \dfrac{2z+3}{(z+1)(z-3)}$ en suma de potencias positivas y negativas de $z - 3$, calculando la corona circular de convergencia de la serie.