CAPÍTULO 1

Los números complejos

La variable compleja permite resolver problemas muy diferentes dentro de áreas tan variadas como pueden ser hidráulica, aerodinámica, electricidad, electromagnetismo... Algunos de ellos sólo requieren el conocimiento de los números complejos, como sucede en el caso del cálculo de los autovalores asociados a sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. Otros en cambio requieren la utilización de la teoría de funciones analíticas complejas, como los problemas de contorno que aparecen, por ejemplo, en el estudio del flujo de fluidos,[1] la conducción del calor, la elasticidad o el potencial electrostático. Muchos problemas geométricos pueden resolverse utilizando las transformaciones complejas. Mientras que para los primeros bastaría con los contenidos que se revisan en este capítulo, sobre los números complejos y las propiedades de sus operaciones que quizá ya conozca el alumnado de secundaria, sin embargo para resolver los problemas de los siguientes tipos se requiere un conocimiento profundo sobre las funciones complejas que se estudiarán en los siguientes capítulos.

Dentro de las Matemáticas propiamente dichas, es interesante estudiar la variable compleja por estar estrechamente relacionada con distintas áreas, de manera que su estudio pueda hacer accesible parte del álgebra, de la

[1] Ver en Lamb, H.: *Hydrodynamics*, aplicaciones de la teoría de funciones analíticas a la hidrodinámica.

trigonometría, o proporcione herramientas para el cálculo integral y la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales.

Comienza este capítulo con una revisión del conjunto de los números complejos, su estructura algebraica de cuerpo conmutativo, la conjugación, los conceptos de módulo y argumento, su interpretación geométrica en el plano y las operaciones elementales en forma binómica y en forma polar, pues para poder entender adecuadamente las funciones de variable compleja es necesario comprender el conjunto sobre el que están definidas: los números complejos. Se suponen conocidas las propiedades de los números reales.

Al dotar el campo de los complejos de una distancia se tiene un espacio métrico. La estructura de orden de los números reales se pierde con los números complejos, por lo que el concepto de infinito es ahora distinto. Es preciso ampliar el conjunto de los complejos añadiendo un nuevo ente, el infinito, y explicar su significado.

1.1. EL CUERPO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Los antiguos algebristas operaron con expresiones en las que aparecía $\sqrt{-1}$. Leibniz, en el siglo XVII, todavía decía que $\sqrt{-1}$ era "*una especie de anfibio entre el ser y la nada*". En 1 777 Euler le dio al "*monstruo*" $\sqrt{-1}$ el nombre de i (por *imaginario*). En la actualidad esta notación se usa casi universalmente, excepto en ingeniería eléctrica, donde se utiliza *j* en lugar de i, ya que esta letra se usa para indicar la intensidad de la corriente.

Cuando se desarrolló la teoría de los números complejos, la electricidad era una materia de interés sólo de laboratorio. Pero antes del final del siglo XIX los descubrimientos sobre electricidad y electromagnetismo transformaron el mundo, y en este proceso los números complejos fueron una herramienta que simplificó el cálculo con las corrientes alternas. Esto prueba que conocimientos que son matemática pura para una generación se convierten en aplicados para la siguiente.

1.1.1. Números complejos en forma binómica

Definición 1.1.1:

Un ***número complejo*** se define como una expresión de la forma

$$z = x + \mathrm{i} \cdot y$$

donde x e y son números reales.

Este tipo de expresión, $z = x + \mathrm{i} \cdot y$, se denomina ***forma binómica***.

Se llama ***parte real*** de $z = x + \mathrm{i} \cdot y$ al número real x, que se denota ***Re*(*z*)**, y ***parte imaginaria*** de $z = x + \mathrm{i} \cdot y$, al número real y, que se denota ***Im*(*z*)**, por lo que se tiene entonces que: $z = Re(z) + \mathrm{i} \cdot Im(z)$.

El ***conjunto de los números complejos*** es, por tanto,

$$\mathbf{C} = \{z = x + \mathrm{i} \cdot y;\ x, y \in \mathfrak{R}\}.$$

Esta construcción permite considerar a los números reales como un subconjunto de los números complejos, siendo ***real*** aquel número complejo de parte imaginaria nula. Así, los números complejos de la forma $z = x + \mathrm{i} \cdot 0$ son números reales y se denominan números ***imaginarios*** a los de la forma $z = 0 +$

i·y, es decir, con su parte real nula.

Dos números complejos $z_1 = x + \text{i}\cdot y$ y $z_2 = u + \text{i}\cdot v$ son ***iguales*** si y sólo si tienen iguales sus partes reales y sus partes imaginarias: $x = u$, $y = v$.

1.1.2. Operaciones en forma binómica

Las operaciones de suma y producto definidas en los números reales se pueden extender a los números complejos. Para la suma y el producto de dos números complejos escritos en la forma binómica: $x + \text{i}\cdot y$, $u + \text{i}\cdot v$ se tienen en cuenta las propiedades usuales del Álgebra con lo que se definen:

Definición 1.1.2:

Suma: $(x + \text{i}\cdot y) + (u + \text{i}\cdot v) = (x + u) + \text{i}\cdot(y + v)$

Definición 1.1.3:

Producto: $(x + \text{i}\cdot y) \cdot (u + \text{i}\cdot v) = (x\cdot u - y\cdot v) + \text{i}\cdot(x\cdot v + y\cdot u)$

Se comprueba que el cuadrado del número complejo i es un número real negativo, –1, pues: $(0 + \text{i}) \cdot (0 + \text{i}) = -1 + \text{i}\cdot(0) = -1$.

Si los números complejos son reales, con su parte imaginaria nula, estas operaciones se reducen a las usuales entre los números reales ya que:

$(x + \text{i}\cdot 0) + (u + \text{i}\cdot 0) = (x + u) + \text{i}\cdot(0)$

$(x + \text{i}\cdot 0) \cdot (u + \text{i}\cdot 0) = (x\cdot u) + \text{i}\cdot(0)$

Esto permite considerar al cuerpo de los números reales $\Re$ como un subconjunto de los números complejos, ***C***.

Definición 1.1.4:

El ***conjugado*** del número complejo $z = x + y \cdot \mathrm{i}$, se define como: $\bar{z} = x - y \cdot \mathrm{i}$

1.1.3. Propiedades algebraicas

El conjunto de los números complejos con las operaciones de suma y producto tiene estructura de ***cuerpo conmutativo***. Esto es, verifica las siguientes propiedades:

1. Propiedad asociativa de la suma: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ para todo $z_1, z_2, z_3 \in \boldsymbol{C}$.
2. Propiedad conmutativa de la suma: $z_1 + z_2 = z_1 + z_2$ para todo z_1, $z_2 \in \boldsymbol{C}$.
3. Existencia de elemento cero: Existe un elemento, $0 = 0 + 0 \cdot \mathrm{i}$, tal que para todo $z \in \boldsymbol{C}$, verifica: $z + (0 + 0 \cdot \mathrm{i}) = (0 + 0 \cdot \mathrm{i}) + z = z$.
4. Existencia de elemento opuesto: Para todo $z \in \boldsymbol{C}$, existe $-z \in \boldsymbol{C}$, definido como $-z = -x + (-y) \cdot \mathrm{i}$, tal que $z + (-z) = 0$.
5. Propiedad asociativa del producto: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ para todo $z_1, z_2, z_3 \in \boldsymbol{C}$.
6. Propiedad conmutativa del producto: $z_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot z_2$ para todo z_1, $z_2 \in \boldsymbol{C}$.
7. Existencia de elemento unidad: Existe un elemento, $1 = 1 + 0 \cdot \mathrm{i}$, tal que para todo $z \in \boldsymbol{C}$, verifica: $z \cdot (1 + 0 \cdot \mathrm{i}) = (1 + 0 \cdot \mathrm{i}) \cdot z = z$.
8. Existencia de elemento inverso: Para todo número complejo no nulo, $z \in \boldsymbol{C}/\{0\}$, existe $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$, tal que $z \cdot z^{-1} = 1$.

9. Propiedad distributiva: $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ para todo z_1, z_2, $z_3 \in \mathbf{C}$.

Todas estas propiedades son sencillas de verificar, lo que se deja como ejercicio. (*Ejercicio 1.1*).

Se observa que, en efecto, el inverso de z no está definido para el elemento nulo, pues entonces se estaría dividiendo por cero, ya que entonces $x^2 + y^2 = 0$.

El cuerpo de los complejos es algebraicamente cerrado. Esto significa que cualquier polinomio de grado *n*, mayor o igual a uno, con coeficientes reales o complejos tiene al menos una raíz compleja. Este resultado, (que se demostrará en el *capítulo 4*) se conoce como *Teorema Fundamental del Álgebra* y fue probado por Gauss (1 799). Como consecuencia se tiene que cada polinomio de grado *n* tiene exactamente *n* raíces en el campo complejo, no necesariamente distintas.

Se recuerda que los números reales tienen estructura de cuerpo conmutativo y ordenado. Al ser un subconjunto de los números complejos, son un subcuerpo de ellos. Pero como contrapartida se pierde una importante propiedad, el orden. El cuerpo de los números complejos no es un cuerpo ordenado.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 1.1.1: Calcular $(2 – i)\cdot(1 + 2i)$

Para calcular $(2 – i)\cdot(1 + 2i)$ se procede con las reglas usuales del Álgebra teniendo en cuenta que $i^2 = -1$:

$(2 - i)\cdot(1 + 2i) = 2 + 4i - i - 2i^2 = 2 + 4i - i + 2 = 4 + 3i.$

Ejemplo 1.1.2: El conjugado del número complejo $z = 3 + 5i$, es $\bar{z} = 3 - 5i$

Ejemplo 1.1.3: Para dividir números complejos se multiplica, numerador y denominador por el conjugado del denominador, y así se consigue que el denominador sea un número real:

$$\frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)} = \frac{2-2i}{1+1} = 1-i.$$

Ejemplo 1.1.4: Para elevar a potencias la unidad imaginaria, se tiene en cuenta que $i^2 = -1$, y por tanto, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$:

$i^6 = -1$,

$$i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{-i} = \frac{i}{-(-1)} = i.$$

Ejemplo 1.1.5: Calcular $(1 + i)^4$.

Utilizando el binomio de Newton se obtiene:

$$(1+i)^4 = \binom{4}{0}1^4 + \binom{4}{1} i + \binom{4}{2} i^2 + \binom{4}{3} i^3 + \binom{4}{4} i^4 = 1 + 4i - 6 - 4i + 1 = -4.$$

Ejercicios

1.1. Demostrar que las operaciones de suma y producto de números complejos dotan a ***C*** de una estructura de cuerpo conmutativo.

1.2. Comprobar que:

a) $(1 - i)^4 = -4$.

b) $\frac{5+10i}{3-4i}+\frac{2-i}{i}=-2$

c) $(1 + i)^5 = -4 - 4i$

1.3. Realizar las siguientes operaciones con números complejos:

a) $\frac{68}{(1-i)\cdot(2-i)\cdot(3-i)}$

b) $(2 + i) - i\,(1 - 2i)$.

c) $\frac{2+i}{4-3i}+\frac{3+i}{5i}$

d) $(3 - 2i)\cdot(3 + 2i)$

1.4. Comprobar si:

a) $Im(iz) = Re(z)$.

b) $Re(iz) = -Im(z)$.

c) $Im(|iz|) = 0$.

d) $Re((3 - i)\cdot(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}i)\cdot(3 + i)) = 2$.

1.5. Comprobar si:

a) $Im\, z^3 = 3x^2\cdot y - y^3$

b) $(Im\, z)^3 = y^3$.

c) $Im\, \frac{z}{\bar{z}}=\frac{2xy}{x^2+y^2}$

1.6. Calcular:

a) $Im\, \frac{\bar{z}}{z}$

b) $Re(z^4)$

c) $(Re(z))^4$

1.2. REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA. DIAGRAMA DE *ARGAND*

El desarrollo moderno de los números complejos empezó con el descubrimiento de su interpretación geométrica que fue indistintamente expuesta por John Wallis (1 685) y ya de forma completamente satisfactoria por Caspar Wessel (1 799). El trabajo de Wessel no recibió ninguna atención, y la interpretación geométrica de los números complejos fue redescubierta por Jean Robert Argand (1 806) y de nuevo por Carl Friedrich Gauss (1 831).

El conjunto de los números complejos con las operaciones de suma y el producto por un número real tiene estructura de espacio vectorial de dimensión dos, y es, por tanto, isomorfo a $\Re^2$. Una base de este espacio está formada por el conjunto {1, i}. (*Ejercicio 1.7*).

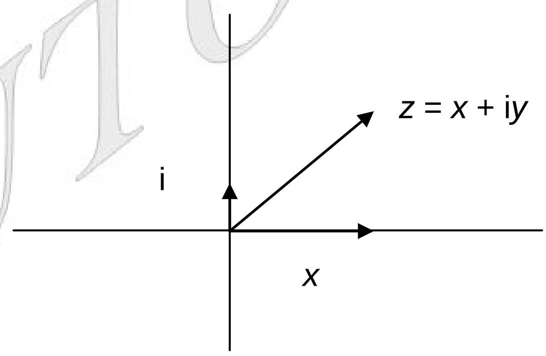


Figura 1.1: Representación de los números complejos

Al igual que los números reales representan los puntos de una recta, los números complejos pueden ser puestos en correspondencia biunívoca con los puntos de un plano. Los números reales se representan en el eje de abscisas o eje real, y a los múltiplos de i = $\sqrt{-1}$ se les representa como puntos del eje imaginario, perpendicular al eje real en el origen. A esta representación geométrica se la conoce como el ***Diagrama de Argand***. El eje $y = 0$ se denomina eje real y el $x = 0$, eje imaginario.

Como la condición necesaria y suficiente para que $x + iy$ coincida con $u + iv$ es que $x = u$, $y = v$, el conjunto de los números complejos se identifica con $\mathfrak{R}^2$, y los números complejos se pueden representar como puntos del "plano complejo". El número complejo $z = x + iy$ se corresponde con la abscisa y la ordenada del punto del plano asociado al par (x, y). En unas ocasiones se refiere el número complejo z como el punto z y en otras como el vector $\boldsymbol{z}$.

La suma de números complejos corresponde gráficamente con la suma de vectores. Sin embargo, el producto de números complejos no es ni el producto escalar de vectores ni el producto vectorial.

El conjugado de z, $\bar{z}$, es simétrico a z respecto del eje de abscisas.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 1.2.1: Representar en el plano de Argand los números complejos: $a = 2 + i$, $b = 2i$ y $c = -2 - 2i$.

Los números complejos $a = 2 + i$, $b = 2i$ y $c = -2 - 2i$ se representan:

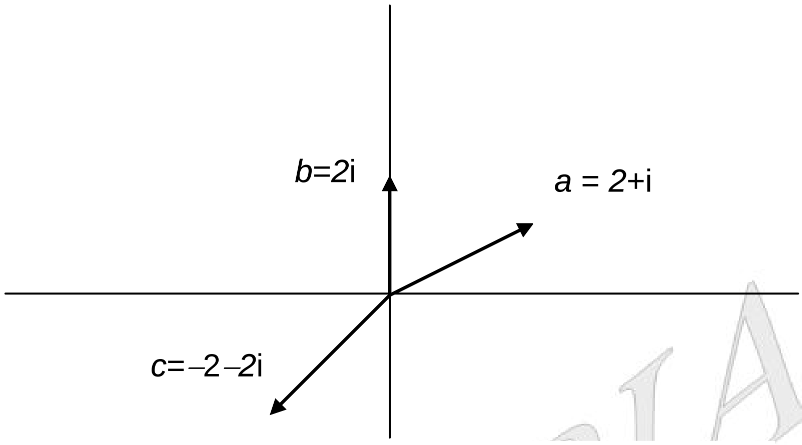


Figura 1.2: Ejemplo 1.2.1 - Representación de *a*, *b* y *c*.

Ejemplo 1.2.2: Representar en el plano de Argand los números complejos: 2 + 3i, –1 + 2i, –3 –2i, 5 + i y 4 – 3i.

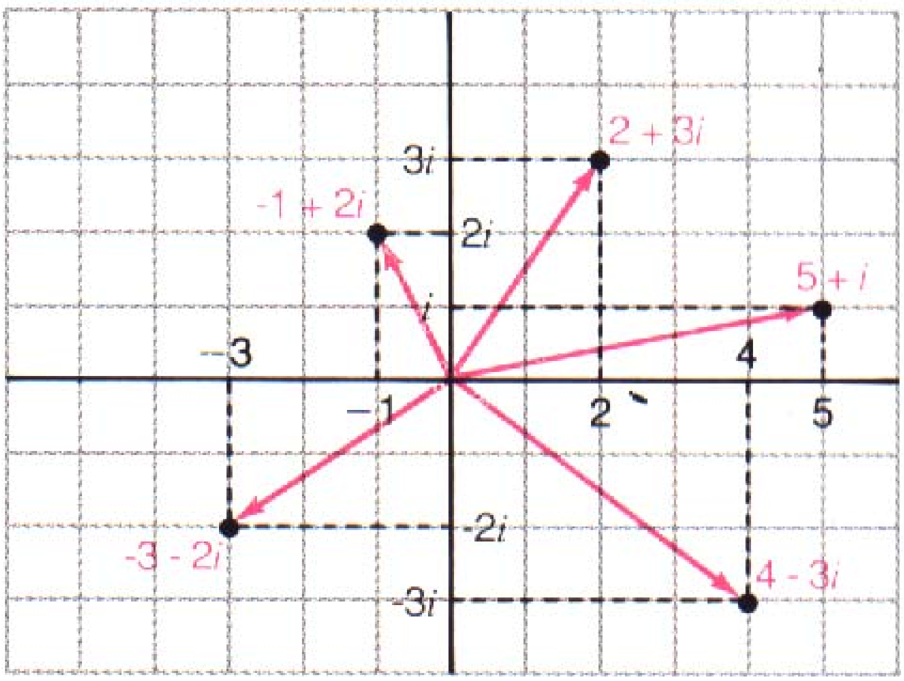


Figura 1.3: Ejemplo 1.2.2 - Representación de números complejos

Ejemplo 1.2.3: Representar el número complejo conjugado de a = 2 + i.

El conjugado de *a* = 2 + i, 2 – i, se representa:

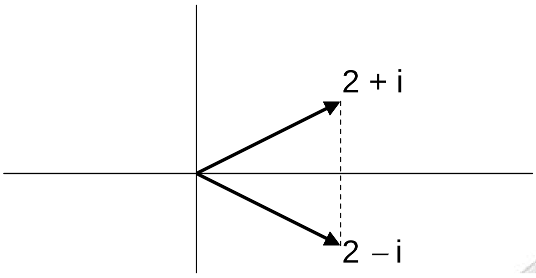


Figura 1.4: Ejemplo 1.2.3 - Representación del conjugado.

y se observa que es el simétrico respecto del eje de abscisas. La conjugación es un automorfismo del campo complejo relacionado con la simetría.

Ejemplo 1.2.4: Representar la suma de dos números complejos.

La suma se representa igual que la suma vectorial:

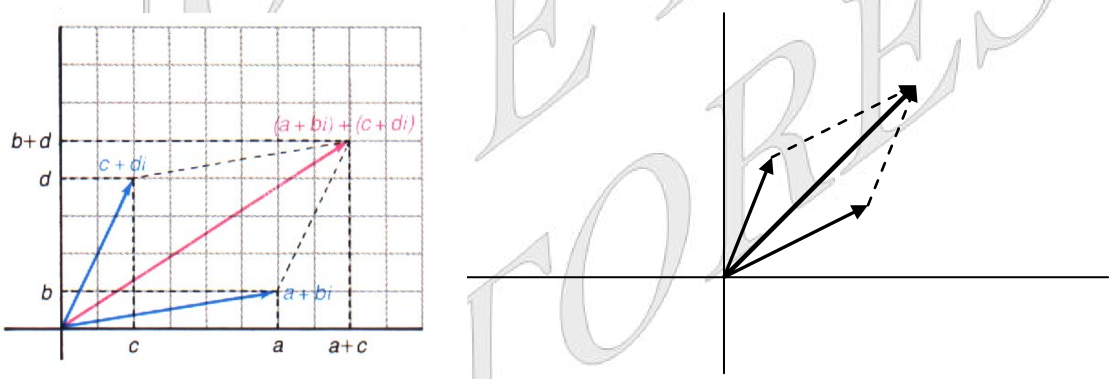


Figura 1.5: Representación de la suma de números complejos.

Ejemplo 1.2.5: Representar el producto del número complejo 2 + i por la unidad imaginaria: i.

El producto de 2 + i por i es igual a –1 + 2i, y al representarlo se observa que multiplicar por la unidad imaginaria es girar 90º.

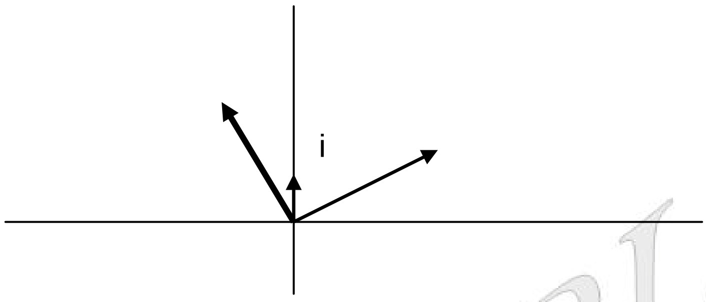


Figura 1.6: Representación del producto de un número complejo por la unidad imaginaria

Ejercicios

1.7. Demostrar que ***C***, con las operaciones de suma y el producto de un número real, tiene estructura de espacio vectorial bidimensional.

1.8. Representar gráficamente los siguientes números complejos:

a) $a = 3i$

b) $b = -2i$

c) $c = 5$

d) $d = 1 + i$

e) $e = -1 - i$

1.9. Representar gráficamente el conjugado de los números complejos:

a) $a = 3i$

b) $b = -2i$

c) $c = 5$

d) $d = 1 + i$

e) $e = -1 - i$

1.10. Representar gráficamente la suma de los siguientes números complejos:

a) $a + b$

b) $a + c$

c) $b + d$

d) $d + e$

1.11. Representar gráficamente el producto de los siguientes números complejos:

a) $a \cdot i$

b) $b \cdot i$

c) $c \cdot i$

d) $d \cdot i$

e) $e \cdot i$.

1.3. FORMA POLAR

1.3.1. Módulo

Definición 1.3.1:

El ***módulo*** de un número complejo se define como $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, y representa la distancia de *z* al origen, es decir, la longitud del vector libre (*x*, *y*) de $\mathfrak{R}^2$.

Por tanto el módulo nunca puede ser un número real negativo. El módulo de un número real coincide con su valor absoluto.

Aunque no tiene sentido decir si $z_1 < z_2$, salvo que sean números reales, sí tiene sentido la desigualdad $|z_1| < |z_2|$ y significa que z_1 está más próximo al origen que z_2.

Otra forma de expresar el módulo de un número complejo es mediante la expresión $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ donde $\bar{z}$ es el conjugado de *z*, siendo el producto de un número complejo por su conjugado igual a $(x + i \cdot y) \cdot (x - i \cdot y) = x^2 + y^2$ un número real y positivo.

1.3.2. Argumento

El ***argumento*** de un número complejo *z*, si $z \neq 0$, representa el ángulo, en radianes, que forma el vector de posición con el semieje de abscisas positivas. Es por tanto cualquier número real θ tal que $\cos \theta = \frac{x}{|z|}$, $\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{|z|}$. Se tiene entonces que cada número complejo no nulo tiene infinidad de argumentos, positivos y negativos, que se diferencian entre sí en múltiplos enteros de 2π.

Si *z* es igual a cero, su módulo es cero, pero su argumento no está definido.

Si se quiere evitar la multiplicidad de los argumentos se puede seleccionar para θ un intervalo semiabierto de longitud 2π, lo que se llama elegir una rama del argumento; por ejemplo, si se exige que $\theta \in (-\pi, \pi]$, (o para otros autores a $[0, 2\pi)$), se obtiene el ***argumento principal*** de *z*, que se denota por *Arg*(*z*). Si *z* es un número real negativo su argumento principal vale π. En ocasiones es preferible utilizar argumentos multivaluados:

$$\boldsymbol{arg(z) = \{Arg(z) + 2k\pi;\ k \in Z\}}$$

donde **Z** representa el conjunto de los números enteros.

Si se define *Arg*(*z*) como *arctg*(*y*/*x*) se tiene una nueva ambigüedad, ya que existen dos ángulos en cada intervalo de longitud 2π de los cuales sólo uno es válido. Por todo ello, las afirmaciones con argumentos deben ser hechas con una cierta precaución, pues por ejemplo la expresión:

$$arg(z \cdot w) = arg(z) + arg(w)$$

es cierta si se interpretan los argumentos como multivaluados.

Si *z* es distinto de cero, $\bar{z}$ verifica que $|\bar{z}| = |z|$, y $Arg(\bar{z}) = -Arg(z)$.

1.3.3. Propiedades del módulo, del conjugado y del argumento de un número complejo

Algunas propiedades del conjugado y del módulo de un número complejo son:

1. $\forall\, z, w \in \boldsymbol{C}$, $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$, $\overline{z-w} = \bar{z} - \bar{w}$.
2. $\forall\, z \in \boldsymbol{C}$, $\bar{\bar{z}} = z$, $Arg(\bar{z}) = -Arg(z)$, $arg(\bar{z}) = -arg(z)$.
3. $z \in \Re \Leftrightarrow z = \bar{z}$.

4. $\forall z, w \in \boldsymbol{C}$, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, $|\bar{z}| = |z|$, $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$, $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$.

5. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

6. $\forall z \in \boldsymbol{C}$, $Re(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $Im\,(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}$.

7. $\forall z \in \boldsymbol{C}$, $|Re(z)| \leq |z|$, $|Im(z)| \leq |z|$, $|z| \leq |Re(z)| + |Im(z)|$

8. $\forall z, w \in \boldsymbol{C}$, $||z| - |w|| \leq |z + w| \leq |z| + |w|$

Las propiedades de la conjugación prueban que ésta es un automorfismo idempotente en ***C***. Se observa que las desigualdades 7 y 8 son siempre entre números reales, no entre complejos, por lo que sí tiene sentido escribir una desigualdad. La segunda parte de la propiedad 8 se conoce con el nombre de desigualdad triangular. Las propiedades del módulo prueban que éste es una norma en el espacio vectorial ***C***.

La comprobación de estas propiedades se deja como ejercicio. (*Ejercicio 1.12*).

1.3.4. Forma polar

Definición 1.3.2:

Si ρ es igual al módulo del número complejo no nulo z y θ es un argumento de z, entonces (ρ, θ) son las ***coordenadas polares*** del punto z.

La conversión de coordenadas polares en cartesianas y viceversa se hace mediante las expresiones:

$x = \rho \cdot cos\ \theta$, $y = \rho \cdot sen\ \theta$, por lo que $z = x + \mathrm{i} \cdot y = \rho \cdot (cos\ \theta + \mathrm{i} \cdot sen\ \theta)$.

Esta última expresión es válida incluso si $z = 0$, pues entonces $\rho = 0$, por lo que se verifica para todo θ.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 1.3.1: Calcular el módulo de los siguientes números complejos: –2 + 3i y 4 + i.

Al calcular $|-2+3i| = \sqrt{13}$ y $|4+i| = \sqrt{17}$ se sabe que el primero dista menos del origen que el segundo.

Ejemplo 1.3.2: Calcular el argumento de los siguientes números complejos: 5i, –7i, 3 y–3.

El argumento principal de 5i es igual a $\frac{\pi}{2}$, el de –7i es $\frac{3\pi}{2}$, el de 3 vale 0 y el –3 es π.

Ejemplo 1.3.3: Escribir en forma binómica el número complejo de módulo 2 y argumento $\frac{\pi}{3}$.

El número complejo de módulo 2 y argumento principal $\frac{\pi}{3}$ es $1+\sqrt{3}\,i$, ya que: $x = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$ e $y = 2\,sen\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

Ejemplo 1.3.4: Calcular el módulo y el argumento de: –1 – i.

El número complejo –1 – i tiene de módulo $\rho = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

Uno de sus argumentos es $\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$, y su argumento principal es $\frac{-3\pi}{4}$, por tanto $arg(-1 - i) = \frac{-3\pi}{4} + 2k\pi$.

Ejemplo 1.3.5: Comprobar si se verifica que $Arg(z \cdot w) = Arg(z) + Arg(w)$.

Se verifica que $arg(z \cdot w) = arg(z) + arg(w)$ considerando estos argumentos como conjuntos, y en general no se verifica que $Arg(z \cdot w) = Arg(z) + Arg(w)$, pues por ejemplo $Arg((-i)^2) = Arg(-1) = \pi$, mientras $Arg(-i) + Arg(-i) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi$.

Ejercicios

1.12. Demostrar las propiedades del *apartado 1.3.3*.

1.13. Discutir el significado de las siguientes expresiones, poniendo distintos ejemplos:

a) $arg(z \cdot w) = arg(z) + arg(w)$,

b) $arg(\bar{z}) = arg(z^{-1}) = -arg(z)$,

c) $arg(z/w) = arg(z) - arg(w)$.

1.14. Calcular el modulo y el argumento principal de los siguientes números complejos:

a) $\sqrt{3} - i$

b) $-2 - 2i$

c) $1 - \sqrt{3}\, i$

d) $-4i$

1.15. Expresar en forma polar los siguientes números complejos:

a) i

b) –i

c) 4 + 4i

d) –4

1.4. FORMA EXPONENCIAL DE UN NÚMERO COMPLEJO

Definición 1.4.1.:

Se denomina ***Fórmula de Euler*** a la expresión:

$$e^{i\theta} = exp(i\cdot\theta) = cos\ \theta + i\cdot sen\ \theta,$$

donde θ se mide en radianes.

Definición 1.4.2:

La fórmula de Euler permite expresar un número complejo no nulo en lo que se conoce como la ***forma exponencial***:

$$z = |z|\cdot e^{i\theta} = \rho\cdot e^{i\theta}.$$

Al estudiar la función exponencial se justificará esta expresión.

Para cada valor previamente fijado de ρ los puntos de la ecuación $z = \rho\cdot e^{i\theta}$ están sobre la circunferencia de radio ρ y centro el origen.

Dos números complejos, $z_1 = \rho\cdot e^{i\theta}$ y $z_2 = r\cdot e^{i\alpha}$, no nulos, son iguales si, y sólo si, $\rho = r$ y $\theta = \alpha + 2k\pi$, donde k es cualquier número entero.

1.4.1. Operaciones entre números complejos en forma exponencial

Para ***multiplicar*** números complejos expresados en una de estas formas, basta multiplicar sus módulos y sumar sus argumentos:

$$(\rho\cdot e^{i\theta}) \cdot (r\cdot e^{i\alpha}) = (\rho\cdot r)\cdot e^{i(\theta+\alpha)}.$$

La relación entre números complejos y transformaciones geométricas, donde multiplicar por i corresponde a girar 90º, y multiplicar por $a + b\cdot$i es girar el argumento de dicho número y aplicar una homotecia de razón su módulo, es muy útil en la Mecánica y en otras partes de la Física.

Para ***dividir*** números complejos, basta dividir sus módulos y restar sus argumentos:

$$\frac{\rho\, e^{i\theta}}{r\, e^{i\alpha}} = \frac{\rho}{r} e^{i(\theta-\alpha)}$$

El ***inverso*** de un número complejo distinto de cero, $z = \rho\cdot e^{i\theta}$, tiene como módulo, el inverso del módulo, y como argumento, el opuesto del argumento:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta}$$

Para elevar un número complejo a una ***potencia***, se eleva el módulo a dicha potencia, y se multiplica el argumento por el exponente. Así:

$$(r\cdot e^{i\theta})^n = (r^n)\cdot e^{ni\theta},$$

cualquiera que sea el número entero n, lo que permite calcular raíces n-ésimas.

Para calcular la ***raíz n-ésima*** de un número complejo, $w = \sqrt[n]{z}$, se tiene en cuenta que si $w = r\,e^{i\alpha} = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho\,e^{i\theta}}$ el módulo *r* debe ser igual a $r = \sqrt[n]{\rho}$, pero al tener un número complejo muchos argumentos, ahora el argumento no es único, sino que se tienen *n* argumentos distintos, e iguales a $\alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$, donde *k* toma los valores desde 0 hasta *n* – 1 antes de que dichos valores comiencen a repetirse.

Por tanto la función raíz *n*-ésima es una función multivalorada, con *n* valores que se pueden representar gráficamente en los vértices de un *n*-ágono regular de centro el origen y radio, el módulo $r = \sqrt[n]{\rho}$, pues todas las raíces están situadas en la circunferencia de radio $r = \sqrt[n]{\rho}$ uniformemente espaciadas cada $\frac{2\pi}{n}$ radianes.

Todas estas expresiones pueden deducirse teniendo en cuenta que en la fórmula de Euler, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\cdot \operatorname{sen}\theta$, se encierra toda la trigonometría elemental.

A modo de ejemplo se demuestra la fórmula del producto de números complejos en forma exponencial:

$$z_1 \cdot z_2 = (\rho\cdot e^{i\theta}) \cdot (r\cdot e^{i\alpha}) = (\rho\cdot r)\cdot e^{i\cdot(\theta+\alpha)}.$$

Demostración:

$z_1 \cdot z_2 = (\rho\cdot e^{i\theta}) \cdot (r\cdot e^{i\alpha}) = \rho\cdot(\cos\theta + i\cdot \operatorname{sen}\theta) \cdot r\cdot(\cos\alpha + i\cdot \operatorname{sen}\alpha) =$

$= (\rho\cdot r) \cdot [\cos\theta \cdot \cos\alpha - \operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{sen}\alpha] + i\cdot[\cos\theta \cdot \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\alpha] =$

$= (\rho\cdot r)\cdot(\cos(\theta+\alpha) + i\cdot \operatorname{sen}(\theta+\alpha)) = (\rho\cdot r)\cdot e^{i\cdot(\theta+\alpha)}$. □

De igual modo se obtiene la fórmula del seno de una suma o del coseno de una suma considerando en la demostración anterior números complejos de módulo uno.

Se comprueba que el conjugado de un número complejo tiene el mismo módulo y el argumento opuesto: $\overline{\rho e^{i\theta}} = \rho e^{-i\theta}$.

1.4.2. Fórmula de *Moivre*

Al aplicar la fórmula obtenida de una potencia al número complejo de módulo uno, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$, se obtiene que

$(\cos\theta + i\cdot \operatorname{sen}\theta)^n = \cos(n\theta) + i\cdot \operatorname{sen}(n\theta)$,

cualquiera que sea el número entero *n*.

Esta expresión, que permite conocer *sen*(*nx*) o *cos*(*nx*) en función de *cosx* y *sen x* desarrollando la potencia mediante el binomio de Newton y separando partes real e imaginaria, se conoce como fórmula de Moivre.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 1.4.1: Representar gráficamente el producto de los números complejos: $2e^{\frac{\pi}{6}i}$, $3e^{\frac{\pi}{4}i}$.

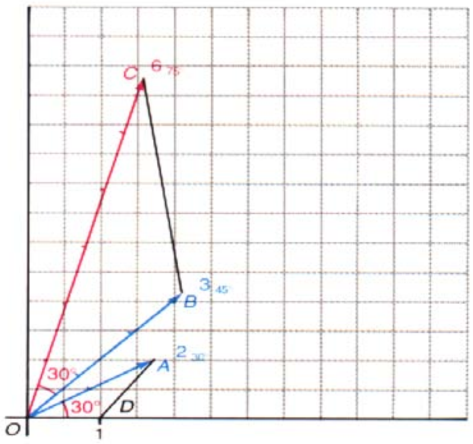


Figura 1.7: Representación del producto de números complejos

Ejemplo 1.4.2: Calcular: $\dfrac{-2}{1+\sqrt{3}i}$.

Para dividir $\dfrac{-2}{1+\sqrt{3}i}$ se pueden escribir los números complejos en forma exponencial y dividir los módulos y restar los argumentos:

$$\frac{-2}{1+\sqrt{3}i}=\frac{2e^{\pi i}}{2e^{\frac{\pi}{3}i}}=\left(\frac{2}{2}\right)e^{(\pi-\frac{\pi}{3})i}=1e^{\frac{2\pi}{3}i}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Por tanto $\dfrac{-2}{1+\sqrt{3}i}$ escrito en forma exponencial es $e^{\frac{2\pi}{3}i}$, de módulo 1, y argumento principal $\dfrac{2\pi}{3}$. Decir que su módulo es 1 es decir que está sobre la circunferencia de centro el origen y radio 1.

Ejemplo 1.4.3: Calcular $\left(\dfrac{-2}{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}\right)^{60}$.

Para calcular una potencia, en general es mucho más sencillo utilizar la forma exponencial en vez de aplicar la fórmula del binomio de Newton. Por ejemplo, si se quiere calcular $\left(\frac{-2}{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}\right)^{60}$, es mucho más práctico calcular

$$\left(e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)^{60} = e^{i\frac{2\pi 60}{3}} = e^{i40\pi} = 1.$$

Ejemplo 1.4.4: Calcular la raíz cúbica de –1.

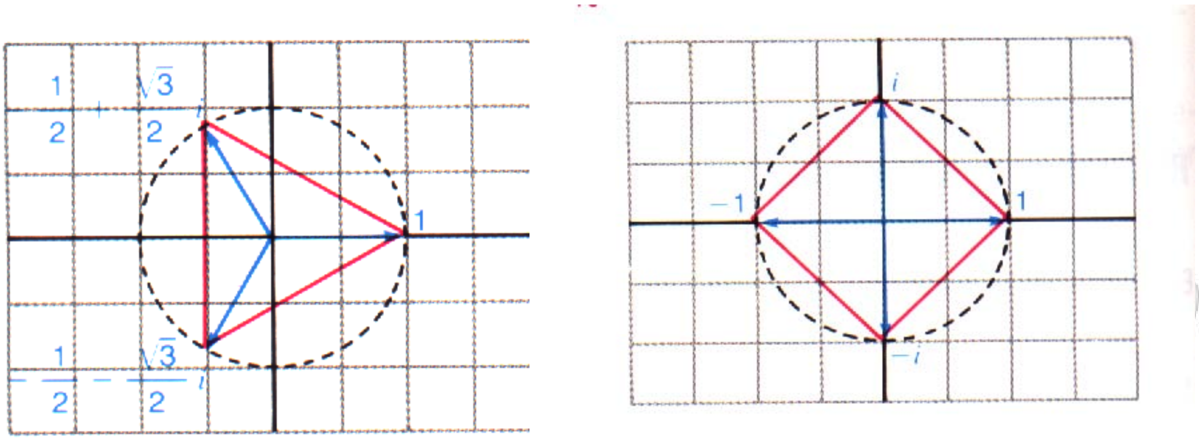
Para calcular una raíz *n*-ésima se debe recordar que se tienen *n* raíces distintas:

$$\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1e^{\pi i}} = \begin{cases} 1e^{\frac{\pi}{3}i} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ 1e^{(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3})i} = e^{\pi i} = -1 \\ 1e^{(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi 2}{3})i} = e^{\frac{5\pi}{3}i} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

Ejemplo 1.4.5: Resolver $z^3 = -1$.

Esto permite resolver ecuaciones. Así, las soluciones de la ecuación cúbica $z^3 = -1$ son tres, la raíz real –1, y las raíces complejas conjugadas: $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

Ejemplo 1.4.6: Representar gráficamente las raíces cúbicas y cuartas de la unidad.



1.8: Raíces de la unidad

Ejercicios

1.16. Comprobar los resultados siguientes:

a) $(1 + i)^{16} = 2^8 = 256$.

b) $$\sqrt[3]{27i} = \begin{cases} 3e^{i\frac{\pi}{6}} \\ 3e^{i\frac{5\pi}{6}} \\ 3e^{i\frac{9\pi}{6}} \end{cases}$$

1.17. Realizar las siguientes operaciones con números complejos, expresándolos previamente en forma exponencial:

a) $$\frac{\sqrt{2}i}{-2-2i}$$

b) $$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^{30}$$

1.18. Resolver las ecuaciones, obteniendo las raíces reales y complejas:

a) $x^2 = -1$

b) $x^3 = -8$

c) $x^4 + 16 = 0$

1.19. Calcular las raíces n-ésimas de la unidad, para $n = 2$, 3 y 4. Representarlas gráficamente, y comprobar que están sobre la circunferencia de radio 1, y en los vértices de un polígono regular.

1.5. TOPOLOGÍA DEL PLANO COMPLEJO

Al identificar ***C*** con el plano real $\mathfrak{R}^2$ mediante la biyección que asocia el par (x, y) con el número complejo $x + y \cdot \mathrm{i}$ tiene sentido hablar del plano complejo, y se puede dotar a ***C*** de una estructura de espacio métrico definiendo una distancia $d(z, w) = |z - w|$, que es la *distancia euclídea*, con lo que (***C***, d) es un *espacio métrico*. Cómo el módulo es una norma, ***C*** tiene estructura de *espacio vectorial normado*.

Se deja como ejercicio comprobar que con esta definición d es una distancia.

Tener una métrica permite utilizar el concepto de entorno. Para ello se introducen los siguientes conceptos:

Disco abierto o ***bola abierta*** de centro z_0 y radio r es el conjunto de puntos z interiores a la circunferencia de centro z_0 y radio r:

$$B_r(z_0) = \{z \in \boldsymbol{C};\ |z - z_0| < r\}.$$

Disco cerrado o ***bola cerrada*** de centro z_0 y radio r es igual al círculo de centro z_0 y radio r:

$$\overline{B}_r(z_0) = \{z \in \mathbf{C};\ |z - z_0| \leq r\}.$$

La ***frontera*** del disco es igual a la circunferencia de centro z_0 y radio r:

$$Fr(B_r(z_0)) = \{z \in \mathbf{C};\ |z - z_0| = r\}.$$

Entorno del punto z_0 y radio ε es igual a la bola abierta de centro z_0 y radio ε:

$$Ent_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbf{C};\ |z - z_0| < \varepsilon\} = B_\varepsilon(z_0).$$

Entorno punteado, o ***disco pinchado***, de centro z_0 y radio r es el conjunto de puntos z interiores a la circunferencia de centro z_0 y radio r salvo el propio punto z_0:

$$B_r'(z_0) = \{z \in \mathbf{C};\ 0 < |z - z_0| < r\}.$$

Se puede definir ahora una topología en $\mathbf{C}$ y hablar de proximidad. Los conceptos topológicos que se necesitarán son análogos a los ya estudiados en funciones de varias variables, de los que se utilizarán de manera especial los conceptos de abierto, cerrado, conexo y dominio.

Se dice que z es un ***punto interior*** de un conjunto $A \subseteq \mathbf{C}$, si existe algún entorno de z contenido en A. Se dice que z es un ***punto exterior*** de $A \subseteq \mathbf{C}$, si existe algún entorno de z que no contiene puntos de A. Si un punto z no es ni interior ni exterior de A se dice que es un ***punto frontera*** de A; por lo tanto en todo entorno de un punto frontera existen puntos de A y puntos que no pertenecen a A.

Un conjunto es ***abierto*** si todos sus puntos son interiores. Luego:

X es un conjunto abierto $\Leftrightarrow \forall z \in X, \exists r > 0, B_r(z) \subset X$.

Un conjunto X es ***cerrado*** si su complementario (conjunto de puntos de ***C*** que no pertenecen a X) es un conjunto abierto. Un conjunto cerrado contiene a sus puntos frontera. Existen conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados.

El ***segmento*** de extremos ***a*** y ***b***, se puede representar como:

$[a, b] = \{z \in \mathbf{C};\ z = t \cdot a + (1 - t) \cdot b,\ 0 \le t \le 1\}$.

Un conjunto X es ***conexo*** cuando no existen dos abiertos A y B contenidos en X, disjuntos ($A \cap B = \emptyset$) y distintos del vacío tales que $X = A \cup B$.

Un conjunto X es ***conexo por caminos*** si todo par de puntos de X se pueden unir por un camino contenido en X.

X es un ***dominio*** si es un conjunto abierto y conexo.

Una bola abierta, $B_r(z)$, es un ejemplo de conjunto abierto y conexo, y por lo tanto es un dominio. También es un dominio la corona circular definida por: $\{z \in \mathbf{C};\ r < |z - z_0| < R\}$ ya que es un conjunto abierto y conexo. Una bola cerrada, $\overline{B}_r(z_0)$, es un ejemplo de conjunto cerrado. El disco pinchado, $B_r'(z_0)$, definido como $\{z \in \mathbf{C};\ 0 < |z - z_0| \le r\}$, formado por los puntos de la bola cerrada excepto el centro, no es ni abierto ni cerrado.

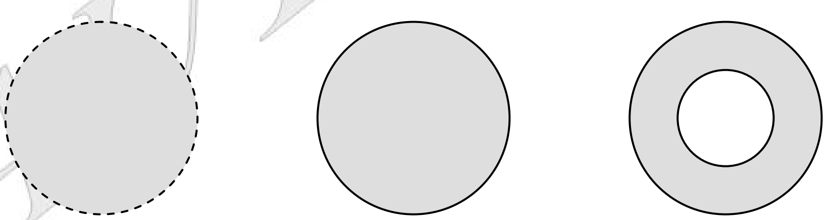


Figura 1.9: Bola abierta. Bola cerrada. Corona circular.

Un conjunto X está ***acotado*** si está contenido en alguna bola de radio R:

$$X \subset \{z \in \mathbf{C};\ |z - z_0| < R\}.$$

En caso contrario se dice que A es ***no acotado***.

Así, por ejemplo, la corona circular es un conjunto acotado mientras que el semiplano $Im(z) > 0$ es un conjunto no acotado.

Toda sucesión de números complejos, (z_n), se puede considerar formada por dos sucesiones de números reales, $(Re(z_n))$ y $(Im(z_n))$, y se verifica que: $(z_n) \to z$ si y sólo si $(Re(z_n)) \to Re(z)$ y $(Im(z_n)) \to Im(z)$. Como consecuencia se obtiene que el espacio $(\mathbf{C}, d)$ es un *espacio métrico completo*, es decir, toda sucesión de Cauchy es convergente.

Ejemplos resueltos

Ejemplo 1.5.1: Escribir en forma conjuntista el círculo cerrado de centro 1 y radio 2.

El círculo cerrado de centro 1 y radio 2 se puede representar como $\{z \in \mathbf{C};\ |z - 1| \le 2\}$, está formado por el conjunto de puntos $z = x + yi$ tales que $(x - 1)^2 + y^2 \le 4$, y es un conjunto conexo, cerrado y acotado.

Ejemplo 1.5.2: Escribir en forma conjuntista el círculo cerrado de centro 2 – 3i y radio 2, y el círculo cerrado de centro $\frac{i}{2}$ y radio 4.

El círculo cerrado de centro 2 – 3i y radio 2 se puede representar como $\{z \in \mathbf{C};\ |z - 2 + 3i| \le 2\}$. Y el círculo cerrado de centro $\frac{i}{2}$ y radio 4 se puede representar como $\{z \in \mathbf{C};\ |2z - i| \le 8\}$.

Ejercicios

1.20. Probar que la distancia euclídea $d(z, w) = |z - w|$ verifica las propiedades de distancia.

1.21. Indicar qué región del plano complejo representan los siguientes conjuntos de puntos:

a) $\{z \in \boldsymbol{C};\ |z + 3 - 4i| \leq 5\}$

b) $\{z \in \boldsymbol{C};\ |z - 1 - i| < 2\}$

c) $Re(z) \leq 3$

d) $Im(z) < 2$

e) $\{z \in \boldsymbol{C};\ 1 < |z + 1 - i| < 2\}$

f) $\{z \in \boldsymbol{C};\ \frac{\pi}{4} < arg(z) < \frac{3\pi}{4}\}$

g) $Re(z) = 2$

h) $Im(z + 3) > 1$

i) $\{z \in \boldsymbol{C};\ |z - i| < 2 \text{ y } |z - 3| = |z + 3|\}$

1.22. En los conjuntos del ejercicio anterior, indicar cuáles son abiertos, cerrados, conexos, acotados y cuáles son dominios.

1.6. LA ESFERA DE *RIEMANN*. PROYECCIÓN ESTEREOGRÁFICA

Resulta necesario ampliar el plano complejo añadiendo el punto del infinito, ∞. En la recta real, que estaba ordenada, se añadían dos puntos del infinito, $-\infty$, menor que cualquier número real, y $+\infty$, mayor que cualquiera de ellos. Esto ahora no va a ser posible al perderse el orden. Si se piensa en el plano complejo como un espacio vectorial podría pensarse que se puede acercar al infinito por cualquier dirección, pero esta no va a ser la solución adoptada. Riemann, en el siglo XIX, tuvo la genial idea de pensar en el plano como la proyección estereográfica de una esfera. Consideró una esfera de centro el origen y radio uno cortada diametralmente por el plano complejo, y mediante la proyección estereográfica obtuvo una correspondencia biunívoca entre los puntos de la esfera, menos el polo norte, y los puntos del plano.

Definición 1.6.1:

Se denomina ***esfera de Riemann*** a una esfera S, contenida en $\mathfrak{R}^3$, de centro el origen y radio uno.

Entonces la esfera de Riemann, S, es igual a $\{(x_1, x_2, x_3): x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$.

Se llama *polo norte*, *N*, al punto (0, 0, 1) de la esfera.

Se puede suponer que el subespacio de $\mathfrak{R}^3$ formado por los puntos cuya tercera coordenada es nula es isomorfo al plano complejo ***C***:

$$\{(x, y, 0); x, y \in \mathfrak{R}\} \sim \boldsymbol{C}$$

Se considera entonces en el espacio $\mathfrak{R}^3$ al plano complejo como el plano coordenado $x_3 = 0$, que corta diametralmente a la esfera S. De este modo el número complejo $x + iy$ se identifica con el punto $(x, y, 0)$. El ecuador de la esfera coincide con la circunferencia unidad del plano complejo ***C***.

Definición 1.6.2:

Se llama ***proyección estereográfica*** a una transformación biunívoca del plano complejo, ***C***, en la esfera de Riemann, S, sin el polo norte: S \{*P*} definida haciendo corresponder a cada punto del plano $z \in$ ***C***, el punto de la esfera $w \in$S en el que corta a S la recta que pasa por *z* y por el polo norte N = (0, 0, 1). Se dice que $w \in$ S es la proyección estereográfica de $z \in$ ***C***, o también a la inversa, que $z \in$ ***C*** es la proyección estereográfica de $w \in$ S.

La proyección estereográfica establece la correspondencia entre los puntos de ***C*** y los de S en que a cada punto del plano $z \in$ ***C*** le corresponde el punto de la esfera $w \in$ S en el que corta a S la recta que pasa por *z* y por el polo norte *N* = (0, 0, 1). Por tanto las ecuaciones de la proyección estereográfica se calculan fácilmente. La relación explícita entre $z = x + iy$ y su proyección (x_1, x_2, x_3) sobre la esfera es $(x, y, 0) \to (x_1, x_2, x_3)$, siendo $x + yi = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$, y siendo:

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{2x}{1 + x^2 + y^2} , \frac{2y}{1 + x^2 + y^2} , \frac{x^2 + y^2 - 1}{1 + x^2 + y^2} \right)$$

Si el punto de la esfera está en el hemisferio norte, $x_3 > 0$, entonces su correspondiente del plano tiene su módulo mayor que uno, mientras que si el punto de la esfera pertenece al hemisferio sur, $x_3 < 0$, el correspondiente del plano tiene su módulo menor que uno. Si el punto está en el ecuador, se transforma en él mismo y su módulo es igual a uno.

Tomando como métrica la distancia euclídea usual se comprueba que la esfera de Riemann es un espacio métrico compacto y completo.

A medida que los puntos en el plano complejo van estando más lejos del origen, sus imágenes en la esfera de Riemann van aproximándose al polo norte, *P*, lo que permite interpretar el transformado del polo *P* como el punto del infinito, ∞. Se añade un único punto del infinito, haciendo corresponder al polo norte de la esfera el punto del infinito. De esta forma se obtiene el plano complejo ampliado que es topológicamente equivalente a la esfera de Riemann.

Definición 1.6.3:

El ***plano complejo ampliado*** es el plano complejo al que se le ha añadido un punto del infinito: $\overline{C} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$.

Esto permite decir que el plano complejo ampliado $\overline{C} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ se identifica con la esfera de Riemann S.

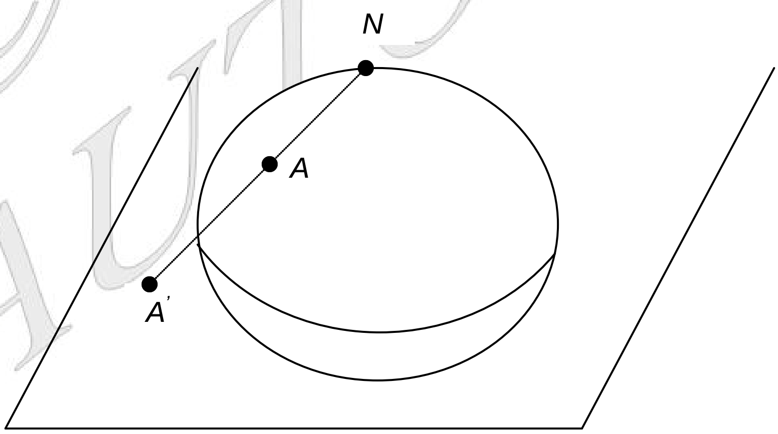


Figura 1.10: Esfera de Riemann

Definición 1.6.4:

Un ***entorno del infinito*** de radio *M* es el conjunto de todos los números complejos cuyo módulo es mayor que *M*:

$$Ent_M(\infty) = \{z \in \mathbf{C};\ |z| > M\}.$$

La proyección estereográfica de una recta del plano complejo ***C*** es una circunferencia de la esfera de Riemann S que pasa por el polo norte. Es posible interpretar las rectas del plano como circunferencias que pasan por el punto del infinito. También puede comprobarse que la proyección estereográfica conserva los ángulos, lo que posteriormente se denominará una transformación conforme.

Ejercicios

1.23. Escribir las ecuaciones de la proyección estereográfica que al punto de la esfera de Riemann (x, y, z) le hace corresponder el punto $z^* = x^* + iy^*$ del plano complejo.

1.7. EJERCICIOS

1.24. Comprobar si:

a) $Im(\bar{z}^2) = -2xy$.

b) $(Im\,\bar{z})^2 = y^2$.

c) $\left|\dfrac{\bar{z}}{z}\right| = 1$.

d) $|cos\,\alpha + isen\,\alpha| = \left|e^{i\theta}\right| = 1$.

1.25. Calcular:

a) $(2 + i)^5$

b) $\dfrac{13}{|2-3i|}$

c) $\dfrac{(3+2i)^2}{(2+3i)^3}$

d) $i(\sqrt{3} - i)(1 + \sqrt{3}\, i)$

e) $(1 + i)^8$

f) $(1 + i)^{-1}$

g) $(\sqrt{3} + i)^{-9}$.

1.26. Probar que *z* es real si y sólo si $z = \bar{z}$.

1.27. Verificar que el inverso de *z*, z^{-1}, es igual a $\dfrac{x-iy}{x^2+y^2} = \dfrac{\bar{z}}{z\cdot\bar{z}}$.

Calcular el inverso de 2 + 3i.

1.28. Calcular el módulo y el argumento principal de los siguientes números complejos:

a) –3 + 3i

b) –3

c) –3i

d) 3 – 3i.

1.29. Expresar en forma polar y exponencial los siguientes números complejos:

a) 5i

b) –7i

c) 5 – 5i

d) $\sqrt{3}$ + i.

1.30. Expresar en forma binómica los siguientes números complejos en forma exponencial:

a) $2e^{\frac{\pi}{3}}$

b) $3e^{\frac{-\pi}{4}}$

c) $e^{\frac{\pi}{2}}$

d) $5e^{\frac{2\pi}{3}}$.

1.31. Realizar las siguientes operaciones con números complejos, expresándolos previamente en forma exponencial:

a) $(\sqrt{3} + i)^{60}$

b) $(4 - 4i)^{-11}$

c) $\dfrac{(1-\sqrt{3}i)^{12}}{(-2-2i)^{8}}$.

1.32. Utilizar la fórmula de Moivre para expresar en función de *sen* θ y *cos* θ:

a) *cos* 2θ

b) *sen* 2θ

c) *cos* 3θ

d) *sen* 3θ.

1.33. Calcular el argumento principal de los siguientes números complejos:

a) $\dfrac{-3}{\sqrt{3}+i}$

b) $\dfrac{-i}{1-i}$

c) $(1 - i\sqrt{3})^7$.

1.34. Calcular, representar en el plano complejo y escribir en forma binómica:

a) $\sqrt{-3i}$

b) $\sqrt{1+\sqrt{3}i}$

c) $\sqrt[3]{-27}$

d) $\sqrt[3]{1-i}$

e) $\sqrt[4]{-81}$.

1.35. Resolver las ecuaciones:

a) $x^3 = -27$.

b) $x^4 = -81$.

c) $x^5 - 32 = 0$.

d) $x^3 - 8 = 0$.

1.36. Calcular todos los valores de z para los que:

a) $z^6 + 64 = 0$.

b) $(z^2 + 3z - 2)^2 - (2z^2 - z + 1)^2 = 0$.

c) $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

1.37. Calcular las raíces quintas de la unidad y representarlas en el plano de Argand. Calcular también las raíces quintas de –1, representarlas también. Generalizar este resultado.

1.38. Calcular las cuatro raíces de $z^4 + 9 = 0$ y utilizarlas para factorizar $z^4 + 9$ en dos polinomios cuadráticos con coeficientes reales.

1.39. Resolver la ecuación: $z^2 + 3z - 1 = 0$.

1.40. Calcular a para que el número complejo $\frac{a+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}$ tenga su parte real igual a su parte imaginaria.

1.41. Indicar qué región del plano complejo que representan los siguientes conjuntos de puntos:

a) $\{z \in \boldsymbol{C};\ |z - 5 + 2\mathrm{i}| \leq 1\}$.

b) $\{z \in \boldsymbol{C};\ |z + 3 - \mathrm{i}| < 3\}$.

c) $Re(z) < 2$.

d) $Im(z) \leq 0$.

1.42. Indicar la región del plano complejo que representa el conjuntos de puntos siguiente: $\{z = x + y\mathrm{i} \in \boldsymbol{C};\ |Arg\,(z)| \leq \frac{\pi}{3},\ y > 0\}$.