VARIABLE COMPLEJA

La teoría de las funciones de variable compleja se puede considerar, como se observa al analizar su azarosa historia, uno de los milagros de la Matemática. La derivabilidad de una función real en un abierto sólo implica, en general, que ésta tenga derivada en los puntos del abierto. Sin embargo en el campo complejo basta que una función sea derivable en un conjunto abierto para que sea infinitamente derivable en dicho conjunto. La condición de derivabilidad es más fuerte en el campo complejo puesto que deben cumplirse las condiciones de Cauchy-Riemann, pero entonces se verifican otras muchas relaciones: las funciones como transformaciones son conformes, sus funciones componentes son armónicas ya que verifican la relación de Laplace, son desarrollables en serie de potencias, tienen función primitiva, la integral a lo largo de un camino cerrado es nula, etc.

Comienza el apartado de “Variable Compleja” con una introducción histórica que permite comprender las dificultades que los matemáticos han ido encontrando y resolviendo hasta que la variable compleja se ha convertido en lo que hoy es. Esta introducción requiere distintas lecturas, quizás, una al principio, pero al ir avanzando en el estudio de la variable compleja se aconseja volver de nuevo a leerlo, pues entonces se estará en condiciones de comprender el interés y la importancia de algunos resultados.

HISTORIA DE LA VARIABLE COMPLEJA

El desarrollo de las Matemáticas está íntimamente relacionado con la historia del número. Como el producto de un número real por sí mismo es siempre positivo es claro que se necesita ampliar el campo numérico para dar solución a determinadas ecuaciones. Stillwell[1] dice que los números complejos son uno de los milagros de la Matemática: *"La resolución de la paradoja de* $\sqrt{-1}$ *fue muy poderosa, inesperada y bella por lo que únicamente la palabra "milagro" parece adecuada para describirla"*. Al principio de su historia los números complejos fueron considerados como *"números imposibles"* tolerados únicamente en un limitado dominio algebraico porque parecían útiles para resolver ecuaciones cúbicas. Cobraron significado cuando se interpretaron geométricamente y no obstante la variable compleja ha servido para la unificación de las funciones algebraicas con las transformaciones conformes, teoría del potencial y otros *"imposibles"* campos como las geometrías no euclídeas.

Los números complejos

Los números complejos se empiezan a utilizar para obtener soluciones de ecuaciones algebraicas y culminan, en este sentido, cuando se demuestra el teorema fundamental del álgebra.

B. Riemann dijo, en su *Discurso inaugural* de 1 851 que *"la introducción de magnitudes complejas en las Matemáticas tiene su origen y finalidad*

[1] Stillwell, J.: *Mathematics and its history*. Springer. 1989. Página 188.

inmediata en la teoría de leyes de dependencia simple de magnitudes variables, leyes expresadas por operaciones entre las magnitudes. En efecto si se les aplican estas leyes de dependencia en un campo más extenso, atribuyendo valores complejos a las magnitudes variables a las que se refieren estas leyes, se presenta entonces una armonía y una regularidad que sin esto quedan escondidas".

Usualmente se dice que los números complejos nacen de la necesidad de resolver la ecuación cuadrática $x^2 + 1 = 0$, con la dificultad de que carece de sentido geométrico el que un cuadrado tenga un área negativa. Sin embargo esto no es enteramente cierto. Muchas ecuaciones cuadráticas, como círculos o parábolas, están ya implícitas en la geometría de los griegos y entonces se analizó si tenían o no solución real, por ejemplo, la intersección de una recta con dichas figuras. Los babilonios, alrededor del año 2000 antes de Cristo, conocían esencialmente el método para resolver ecuaciones cuadráticas, y Herón de Alejandría (100 a. C.) utilizó $\sqrt{-63}$, aunque algebraicamente, sin preguntarse por su significado, pues por aquellos tiempos no se especulaba acerca de la naturaleza de las raíces imaginarias.

Sin embargo cuando en 1 545 Girolamo Cardano escribió[2]

$$40 = \left(5 + \sqrt{-15}\right) \cdot \left(5 - \sqrt{-15}\right)$$

estos números fueron considerados sin sentido y se les aplicó el término de *"imaginarios"*.

Incluso cuando aparecen las ecuaciones cuadráticas, con Diofanto o los árabes, no hay razón para admitir que no tengan solución. Se comienza a

[2] Bell, E. T. (1985): *Historia de las Matemáticas*. (2ª ed.). Edic. Fondo de Cultura Económica.

necesitar cuando Ferro, Tartaglia y Cardano intentan resolver la ecuación cúbica $x^3 = p\cdot x + q$ en cuya fórmula de solución aparecen números complejos (cuando $(q/2)^2 - (p/3)^2 < 0$) y sin embargo tiene siempre una solución real. Bombelli en 1 572 trabajó formalmente con el álgebra de los números complejos e implícitamente introdujo las funciones complejas, aunque a pesar de ello los números complejos todavía eran considerados como imposibles. A. Girard enunció en *“L’invention nouvelle en algèbre”* en 1 629 el **principio de permanencia** según el cual se puede aplicar a los números complejos todas las identidades obtenidas en el campo real, y a lo largo del siglo XVIII se sigue utilizando frecuentemente dicho principio usando la frase: *“recurso de las razones extraídas de la generalidad del álgebra”*. Estos argumentos son criticados por Cauchy en su *“Cours d’Analyse”* (1 821) donde dice: *“las razones de este tipo ... no pueden ser consideradas, a mi parecer, más que como inducciones propias para presentir alguna vez la verdad, pero están poco de acuerdo con la exactitud tan alabada de las ciencias matemáticas”*.

Al final del siglo XVIII ya se tenía una gran maestría en la manipulación de los números complejos y sin embargo no se tenía la noción de un número complejo como un par de números reales formado por su parte real y su parte imaginaria. C. Wessel, en 1 799, en el artículo *“Sur la représentation analytique d’une direction”* asoció todo número complejo con un vector del plano con origen en *O*, y reinterpretó con estos vectores las operaciones elementales de los números complejos. R. Argand en 1 806 en *“Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires”* interpretó geométricamente los números complejos. El número i, por ejemplo, lo representó como una rotación de un ángulo recto alrededor del origen. A partir de dicha interpretación ya empezaron a usarse sin dificultades dichos números.

Funciones de variable compleja

La teoría moderna de las funciones de variable compleja ha tenido cuatro fundadores: Carl Friedrich Gauss (1 777 – 1 855), Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1 857), Bernhard Riemann (1 826 – 1 866) y Karl Weierstrass (1 815 – 1 897).

Figura 1: Carl Friedrich Gauss (1 777 – 1 855)

El primero no ejerció influencia en su tiempo por no haber publicado nada, y haberse encontrado sus manuscritos mucho tiempo después de su muerte. Cada uno de los otros tres matemáticos siguió un camino diferente. Cauchy impuso algunas condiciones restrictivas para que dichas funciones tengan derivadas continuas. Su teoría reposa sobre un teorema muy importante relativo a las integrales complejas y sobre la noción de residuo. Esta teoría contiene en germen los planteamientos geométricos de Riemann y los aritméticos de Weierstrass. La imagen geométrica jugó un papel predominante en Riemann. Una función compleja era para Riemann una ley por medio de la cual las superficies se pueden transformar y su objetivo fue el de representar estas transformaciones y analizarlas. Weierstrass se preocupó por el desarrollo en series de potencias de la función dentro de su círculo de convergencia, que se puede prolongar mediante la prolongación analítica. Todo resultaba para él como una consecuencia de la teoría de series y esta teoría estaba establecida sobre bases sólidas.

Los primeros desarrollos en serie de las funciones elementales aparecieron en el siglo XVII. Taylor utilizó las fórmulas de interpolación de Gregory-Newton para tener en 1 712 la fórmula que lleva su nombre y obtener el desarrollo en serie de potencias de una función, cuyas propiedades se probaron por procedimientos algebraicos; se pueden utilizar las técnicas de derivación e integración de manera formal en el anillo de las series consideradas, todavía, sin preocupaciones de convergencia. Los analistas se habituaron así, a lo largo del siglo XVIII a manipular indiferentemente argumentos reales y complejos no sólo en expresiones racionales sino incluso en la función exponencial o en las funciones trigonométricas. De Moivre, a principios del siglo, gracias a una utilización sistemática de las fórmulas de la trigonometría, resaltó la relación entre las raíces de un número complejo y la división de la circunferencia en partes iguales. En la primera mitad del siglo se utilizaron fórmulas notables entre las funciones elementales.

La función logaritmo

La extensión del campo complejo a la función logaritmo hace aparecer un problema que no tenía lugar con las funciones reales: las funciones multiformes. En virtud del principio de permanencia no existió duda, a principios del siglo XVIII, sobre la existencia de una función, y por tanto unívoca, *log z*, definida por: $e^{\log z} = z$, y que verifica la ecuación diferencial: $d(\log z) = \frac{dz}{z}$. En este contexto la determinación de los logaritmos de –1 y de i condujo a contradicciones indisolubles dando lugar a la célebre controversia entre Gottfried Wilhelm Leibniz (1 646 – 1 716) y Jean Bernoulli de 1 700 a 1 716.

Bernoulli en 1 702 observó la descomposición de la integral de $\frac{dz}{1+z^2}$ en dos fracciones y llegó a la conclusión de que los logaritmos imaginarios expresan sectores circulares reales, lo que dicho en lenguaje actual equivale a decir que $\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{i-z}{i+z}\right)$. Sin embargo persistentemente sostenía que $\log(-x) = \log(x)$, y en particular que $\log(-1) = 0$, pues $d(\log(-x)) = 1/x = d(\log x)$.

Leibniz en cambio afirmaba que los logaritmos de los números negativos, y *“por una razón más fuerte los de los números imaginarios”*, eran imaginarios. Utilizaba en su razonamiento el principio de permanencia, y por él, la inyectividad del logaritmo complejo. Este desacuerdo entre dos grandes de las Matemáticas hizo que existiera una fuerte controversia y produjo en aquella época un profundo malestar.

Leonhard Euler[3] (1 707 – 1 783) expresó con claridad la necesidad de abandonar el principio de permanencia, rompiendo con los principios de Leibniz, y con una claridad genial afirmó que se debía abandonar la unicidad de la función logaritmo afirmando que todo número real positivo tiene una infinidad

[3] Euler, L: *Letter to John Bernoulli.* 10-XII-1728. Bibli. Math. ser. 3, **4**, 352-354.

de logaritmos complejos de los cuales sólo uno es real. Los logaritmos complejos son funciones infinitamente valoradas.

La memoria de Euler no convenció a sus contemporáneos, en especial a D'Alembert (1 717 – 1 783) quien volvió a utilizar las ideas de Bernoulli, apoyadas con las suyas propias, para mostrar que los logaritmos de las cantidades negativas se podían suponer indiferentemente reales o imaginarios dependiendo del sistema de logaritmos que se eligiese.

Diversas fórmulas obtenidas por Leonhard Euler mostraron que a menudo es posible reunir dos igualdades reales en una sola igualdad compleja, efectuar en ella los cálculos y separando parte real e imaginaria obtener nuevas expresiones de interés, que son difíciles de conseguir directamente. Al mismo tiempo Côtes (1 714) descubrió la relación entre los logaritmos complejos y las funciones circulares: $\log(\cos x + i\cdot \operatorname{sen} x) = i\cdot x$, reconociendo la importancia de este resultado en el trabajo titulado *"Harmonia Mensurarum"*. Se usaron "medidas" de las funciones logaritmo y arco tangente, relacionadas con las integrales $\int \frac{dx}{1+x}$ y $\int \frac{dx}{1+x^2}$, aunque no se comprendió porqué eran necesarias esas extrañas "medidas". Después de Bernoulli ésta fue la primera vez en que se empezó a sospechar que el problema de determinar el dominio de la función logaritmo compleja y de las inversas de las funciones circulares era esencialmente el mismo.

Integración

En una serie de memorias de publicación póstuma, escritas a partir de 1776, Euler utilizó los números complejos para obtener, a partir de integrales reales ya conocidas, otras integrales. Y en su obra *"De integrationibus maxima memorabilis ex calculo imaginariorum oriundis"* llegó a escribir las ecuaciones que tradicionalmente se conocen con el nombre de Cauchy-Riemann. D'Alembert en su ensayo *"Essai sur une nouvelle théorie de la résistence des fluides"* hizo la primera descripción sobre las funciones armónicas conjugadas que Riemann tomará como punto de partida de su teoría sobre las funciones de variable compleja en su discurso inaugural de 1 851. Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1 813) lo utilizará en la mecánica de fluidos.

Euler y Laplace, hacia la misma época, pero de forma independiente, utilizaron fórmulas de cálculo bastante parecidas para el tratamiento de integrales definidas, aunque ninguno de ellos las consideraba suficientemente rigurosas. En *"Memoire sur les intégrales définies"* Poisson señaló que la integral $\int_a^b f(x)\cdot dx$ puede no ser la misma según que la variable pase de *a* a *b* por una sucesión de valores reales o por valores imaginarios, llegando a expresar que la integral depende del camino recorrido, base del concepto de integral curvilínea.

La idea de Gauss sobre la futura teoría de variable compleja era ya notablemente clara en 1 811. Por entonces Gauss ya tenía la representación geométrica de los números complejos y la noción de integral curvilínea, el teorema integral de Cauchy e incluso las primeras nociones sobre los periodos de las integrales. Pero no expuso sus ideas públicamente hasta 1 831.

Cauchy y la variable compleja

Cauchy no utilizó la representación geométrica hasta 1 825 y en su

“Cours d’Analyse” continuó representando a los números complejos como “expresiones simbólicas” que pueden ser sometidas a las diversas operaciones del álgebra.

Figura 2: Augustin-Louis Cauchy (1 789 - 1 857).

Cauchy está muy relacionado con los más importantes resultados de la época. Estudió con precisión la convergencia de una serie de potencias resaltando la existencia del radio de convergencia, y también el problema recíproco, la posibilidad de desarrollar localmente en serie de potencias una función holomorfa, siendo el radio de convergencia la distancia del centro a la singularidad más próxima. Escribió *“Mémorie sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires”*, auténtico punto de partida de las integrales curvilíneas, donde aparece el concepto de variación continua de las curvas que hoy se conoce por homotopía y el caso en el que la función se “vuelve infinita” en puntos de un rectángulo de lados paralelos a los ejes. Hasta 1 850 Cauchy no consideró otras singularidades que los polos. Introdujo la noción de residuo en *“Sur un nouveau genre de calcul analogue au calcul infinitésimal”* dando en una nota posterior la fórmula de los residuos para un rectángulo.

En Turín en 1 831 publicó una memoria sobre la mecánica celeste donde desarrolló un método para el estudio de la convergencia de series y acotación de errores al sustituir la serie por la suma de un número finito de términos. Estableció la fórmula integral que lleva el nombre de "teorema integral de Cauchy" y las desigualdades de Cauchy de las que se sigue de forma inmediata el teorema de Liouville, esencial en el estudio de las funciones enteras.

Una extensión importante de estos resultados se debe a P. M. H. Laurent (1 813 – 1 854) quien consideró funciones holomorfas definidas sobre coronas circulares y llegó al desarrollo conocido con su nombre, que es el punto de partida del estudio de las singularidades esenciales.

Como ya se ha indicado, Cauchy no presentó jamás una visión general de su teoría, que fue elaborada en distintas memorias e innumerables notas publicadas en *Comtes Rendues*. Hacia 1 844 J. Liouville (1 809 – 1 882) en sus clases impartidas en el *Collège de France* dedicadas a funciones periódicas intentó establecer una exposición sistemática de las funciones de variable compleja, pero dichas lecciones no fueron publicadas, aunque dieron lugar a una querella entre Cauchy y Liouville sobre la prioridad del teorema que hoy se conoce como de Liouville. Las lecciones de Cauchy son el origen de la primera presentación de la teoría de funciones realizada por Briot y Bouquet en *"Recherches sur la théorie des fonctions"* (Journal de l'Ecole Polytechnique, 1856). Las demostraciones están incompletas en muchas ocasiones y se utilizaron nociones intuitivas de topología por lo que es necesario esperar a Weierstrass para una construcción precisa.

Riemann y la variable compleja

Figura 3: Bernhard Riemann (1 826 – 1 866)

La primera publicación de Riemann fue su discurso inaugural "Principios fundamentales para una teoría general de las funciones de una variable compleja" (Göttingen, 1 851). Él mismo indicó que sus demostraciones eran a menudo incompletas, y únicamente con la construcción de nuevas teorías y entes matemáticos podrían ser posteriormente rellenadas las lagunas. La primera presentación completa de estos trabajos de Riemann se debe a H. Weyl que utilizó nociones como variedad analítica, homología y formas armónicas. Riemann descubrió nuevas geometrías que con una axiomatización conveniente han llegado a ser el cuadro geométrico de la Física y la Matemática contemporánea.

Riemann se situó en un marco geométrico y representó los números complejos como puntos de un plano. Escribió por ejemplo: *"Cuando a todo valor de z le corresponde un valor determinado w, variando de forma continua* *con z, ..., entonces a todo punto del plano A corresponde un punto del plano B, a toda línea, de forma general, una línea, a toda porción conexa de superficie, una porción de superficie igualmente conexa. En consecuencia se puede considerar esta dependencia de la magnitud w de z como una representación del plano A sobre el plano B"*. Así nos mostraba Riemann que *w* es una función de *z*, derivable en sentido complejo si *"entre dos triángulos infinitesimales que se corresponden hay similitud"*.

La idea fundamental de Riemann para estudiar una función multiforme fue recuperar la uniformidad de la función desdoblando, tantas veces como fuera necesario, los valores de la variable. Dijo entonces: *"la función multiforme admite en cada punto de una superficie que representa así el modo de ramificación, un único valor determinado, y puede ser vista como una función perfectamente determinada sobre esa superficie"*. Explicó cómo las familias de funciones algebraicas y los períodos de sus integrales están caracterizados por un único invariante topológico de sus superficies de Riemann, el orden de conexión, definido a partir de sistemas de curvas. Riemann obtuvo, en su memoria, teoremas de prolongación para funciones armónicas, el principio del módulo máximo y el principio de prolongación analítica. Terminó con una magistral aplicación del principio de Dirichlet, que dice que: *"Dos superficies de Riemann simplemente conexas pueden siempre ser representadas conformemente una sobre la otra"*.

Weierstrass y la variable compleja

La motivación principal de Weierstrass fue el estudio de las funciones elípticas y abelianas, y desde este punto de vista profundizó en la teoría de las funciones de variable compleja.

Hizo una presentación rigurosa de la teoría, independiente de toda referencia a la intuición geométrica. Sus primeros trabajos, que datan de 1 840 a 1 842, se publicaron por primera vez en 1 894, por lo que fueron ignorados por sus contemporáneos.

Figura 4: Karl Weierstrass (1 815 – 1 897)

Conoció el desarrollo en serie de Laurent; introdujo la noción de convergencia uniforme y demostró, utilizando el método de los mayorantes, el teorema sobre las soluciones analíticas de un sistema de ecuaciones diferenciales mediante el desarrollo en serie; esbozó la teoría de la prolongación analítica y el estudio de los puntos singulares. Weierstrass se hizo célebre cuando en 1 854 publica su memoria *“Sobre la teoría de funciones abelianas”*. Entre 1 857 y 1 887 elaboró cuidadosamente su edificio matemático, donde partiendo de una construcción correcta de los números reales desembocó en una teoría general de las funciones analíticas, y en la teoría de las funciones elípticas y abelianas.

El punto de partida de Weierstrass fue el concepto de función analítica. La representación local de una función analítica como serie de potencias hizo ver que una función de este tipo posee numerosas propiedades análogas a las de un polinomio. Esto permitió hablar del orden de un cero, y partiendo del hecho de que los ceros son aislados se llegó al principio de prolongación analítica.

En su memoria *"Teoría de las funciones analíticas"* Weierstrass demostró que si una función tiene una singularidad esencial en un punto, z_0, el conjunto de imágenes de los puntos de un disco cualquiera centrado en dicho punto y sin su centro (disco pinchado) es denso en el plano complejo. Este resultado fue completado por E. Picard (1 856 – 1 941), en 1 879, demostrando que este conjunto de valores omite, a lo sumo, un punto del plano complejo.