

Los siete Grupos de Frisos en el mobiliario urbano de Alcorcón.

Hernando Pérez, Jesús (jhernando@educa.madrid.org)

Departamento de Matemáticas

IES Los Castillos

RESUMEN

La búsqueda de herramientas didácticas en el campo de la enseñanza de las matemáticas y de la geometría en particular, nos ha llevado a la investigación de elementos del mobiliario urbano habituales en el entorno de nuestros barrios, próximos a ese reducido espacio muy familiar a los estudiantes desde que eran unos niños, justamente donde el aprendizaje alcanza su mayor significación. Allí hemos encontrado los siete grupos de simetría de los frisos. De paso usaremos tecnologías digitales, una poderosa herramienta en la enseñanza actual.

Palabras claves:

Friso; movimiento; grupo de simetría; mobiliario urbano.

ABSTRACT

Didactics tools research in the fields of mathematics and geometry learning have lead us to an investigation of a set of very common street furniture objects that are just to be found in the surroundings and the neighbourhood, very close to that familiar petty space, where students have been growing up from day to day, since they where little children, just there where the learning might be more significant. There we have found the seven symmetry frieze groups. By the

way we will use digital technologies, another important and powerful tool in modern teaching.

Keywords:

Frieze; movement; symmetry group; street furniture.

1. INTRODUCCIÓN

La investigación sobre la presencia de los grupos de simetría en frisos de todo tipo ha sido prolija y abundante y, dada su mayor simplicidad respecto de los grupos cristalográficos planos, fuente de numerosos recursos didácticos para la enseñanza de geometría. Ya, según Coxeter (1987), M.C. Escher manifestó, en sus estudios sobre la partición regular del plano, un gran interés por los patrones repetitivos observando que según el tipo de repetición y forma en que encajan estos patrones estamos ante frisos, si la repetición es en una sola dirección (una especie de tiras donde se repiten los mismos motivos) o mosaicos si la repetición es en dos direcciones (por ejemplo las baldosas del suelo). Hace tiempo que se sabe de la presencia de los siete grupos de frisos en la bellas cenefas que decoran los palacios de La Alhambra. Más recientemente, una exhaustiva investigación de Knight (1984) describe la presencia de los siete grupos de frisos en la decoración de las rafters maories. El estudio de frisos en contextos no puramente artísticos, no es tampoco novedoso. Hargittal (1984) analiza los siete grupos de simetría en bordados populares húngaros y Rull (1986) hace lo propio con los encajes castellano-leoneses respecto del porcentaje de aparición de cada uno de los grupos en ciento treinta muestras. Groemer (1994) realiza un estudio a fondo sobre la presencia de los grupos de simetría en la arquitectura maya y, ocasionalmente, también en la cerámica. Balbuena (2000) analiza los estupendos calados canarios en un trabajo presentado posteriormente en las XI JAEM celebradas en Tenerife (2003). Recientemente Liarte (2004), con la colaboración de dos alumnas de 2º Bachillerato que presentaron su trabajo en el Congreso de Jóvenes Investigadores organizado por ICIJA en Zaragoza (2004), ha realizado un interesante estudio de los diferentes grupos de frisos que se pueden observar en los enrejados de ventanas y balcones de Monreal del Campo (Teruel), habiendo encontrado en ellos abundantes ejemplares de los siete grupos de simetría. En este trabajo, del que también los alumnos forman parte, presentamos una investigación con fines didácticos sobre la presencia de los grupos de frisos en el entorno y mobiliario urbano de Alcorcón.

2. OBJETIVOS.

El objetivo principal de este trabajo es investigar la presencia de los siete grupos de Frisos entre los distintos elementos del mobiliario urbano de Alcorcón, encontrar matemáticas es un espacio tan próximo y vital como lo es el propio barrio o ciudad donde vivimos. Otros objetivos a tener en cuenta tienen que ver con el entendimiento de la Geometría que subyace en estas estructuras y la apreciación de las Matemáticas en contextos externos, en este caso la ciudad y su mobiliario urbano.

3. METODOLOGÍA.

Tanto si realiza la investigación de forma personal como si se va a introducir a los alumnos en la misma conviene observar, junto con un breve adiestramiento en el software necesario, los siguientes procedimientos:

1. Exploración de objetos sujetos a algún tipo de patrón constructivo en su entorno urbano. Identificación de friso, su patrón y el motivo mínimo.
2. Toma de fotografías artísticas de media y alta calidad con cámaras digitales.
3. Simulación geométrica de los movimientos en el tratamiento digital de las imágenes. Para ello se ha usado dos tipos de software: PhotoShop para el tratamiento de la imagen y Geogebra¹ para la reconstrucción de los elementos geométricos y la simulación de los movimientos que originan el friso sobre las propias imágenes.

4. LOS MOVIMIENTOS EN EL PLANO.

Definición 1: Decimos *transformación* en un plano E (afín euclídeo) a una aplicación biyectiva $f: E \rightarrow E$ de dicho plano en sí mismo.

Es fácil demostrar que el conjunto de todas las transformaciones en el plano E forman un grupo abeliano.

Definición 2: Decimos *isometría* en el plano E a una transformación que conserva las distancias.

Es decir, dados dos puntos cualquiera $P, Q \in E$, se tiene que $d(P, Q) = d(f(P), f(Q))$.

De esta forma también es sencillo probar que translaciones, giros, simetrías centrales y simetrías axiales son isometrías en el plano.

Definición 3. Decimos *movimiento* en el plano E a una isometría que se puede obtener como producto (o composición) de un número finito de simetrías axiales.

Por el Teorema de Cartan-Dieudonné sabemos que un movimiento en el plano ha de ser de uno de los tipos siguientes:

1. La identidad es claramente un movimiento, que denotaremos Id .
2. Traslación de vector \vec{u} , que denotamos $t_{\vec{u}}$.
3. Simetría respecto de una recta r , que denotamos S_r .
4. Giro de centro un punto P y cierto ángulo α (siempre en el sentido antihorario), que denotamos $g_{P,\alpha}$.
5. Simetría con deslizamiento, la composición de una simetría S_r y una translación $t_{\vec{u}}$, de tal manera que el vector \vec{u} tenga la dirección de la recta r .

Cualquiera de los cinco tipos puede conseguirse haciendo una, dos o tres simetrías axiales seguidas. Es decir, cualquier movimiento que nos planteemos en el plano se reduce a uno de estos cinco, y además podemos hacerlo componiendo simetrías axiales. Es más, por muchas simetrías axiales que compongamos no vamos a obtener un movimiento que no sea uno de esos cinco. De esta forma los movimientos del plano se pueden clasificar completamente

5. LOS GRUPOS DE SIMETRÍA DE LOS FRISOS Y SU CLASIFICACIÓN.

En una primera aproximación, podemos definir un *friso* o *cenefa* como un conjunto decorativo obtenido mediante la repetición por translación sobre una recta en una única dirección de una figura o patrón denominado *motivo*. Si miras a tu alrededor con atención encontrarás frisos por todas partes, desde una tira de sellos hasta en los balcones de nuestras calles y, por supuesto, también en el mobiliario urbano, como en este trabajo vamos a mostrar. También en una primera aproximación podemos concebir un *Grupo de Simetría* como un conjunto de operaciones o transformaciones geométricas que deja invariante cierta entidad geométrica o física. Así por ejemplo, el grupo de transformaciones que dejan invariante una figura plana sería el conjunto de todos los movimientos que dejarían invariante a dicha figura y que contiene, al menos, el movimiento identidad. En este caso entendemos que un conjunto de puntos de un plano se dice que es *invariante* por un movimiento cuando mediante dicho movimiento de transformación se obtiene el mismo conjunto.

Si llamamos *figura* a un conjunto de puntos del plano $F \subset E$, entonces podemos enunciar la siguiente definición:

Definición 4: Llamaremos *Grupo de Simetría* de la figura plana F al conjunto de movimientos del plano que dejan invariante la figura F .

Si \vec{u} es un vector del plano R^2 , el grupo $\langle t_{\vec{u}} \rangle$, generado por la translación de vector \vec{u} , está formado por todos los múltiplos enteros de dicha translación:

$$\langle t_{\vec{u}} \rangle = \{t_{n\vec{u}} / n \in Z\}$$

Este grupo se denomina *grupo cíclico infinito* y se suele denotar por C_{∞} .

Definición 5: Denotemos por T el grupo formado por todas las traslaciones del plano. Un grupo de simetría G de una figura plana, se dice que es

el Grupo de un Friso si las traslaciones que contiene G son un grupo cíclico infinito, es decir, están generadas por una traslación

$$G \cap T = \langle t_{\vec{u}} \rangle$$

Donde \vec{u} es un vector fijo. Además G ha de dejar invariante una recta, que se denomina *recta centro del friso*. De esta forma los únicos movimientos que puede contener son de los tipos siguientes:

1. La identidad (este movimiento siempre está en un grupo de simetría).
2. Traslaciones en la dirección de la recta centro.
3. Giros con centro un punto de la recta centro y ángulo π (180°).
4. La simetría respecto de la recta centro del friso.
5. Simetrías respecto de rectas perpendiculares a la recta centro del friso.
6. Simetría con deslizamiento con eje la recta centro del friso y deslizamiento en la dirección de dicha recta.

De hecho estos movimientos forman el grupo de simetría de una recta del plano.

Definición 6: Dada una figura cuyo grupo de simetría es un friso, llamamos *vector fundamental* \vec{u} al vector no nulo y de norma mínima tal que la traslación $t_{\vec{u}}$ pertenece al grupo de simetría. Llamamos *rectángulo fundamental* a cualquier rectángulo que contenga al motivo del friso y uno de cuyos lados coincide con el vector fundamental.

Para clasificar los frisos hacemos uso de las definiciones siguientes:

Definición 7: Un grupo de simetría G se dice que *conserva la orientación* si no contiene simetrías ni simetrías con deslizamiento. Es decir, sólo puede contener traslaciones o giros.

Definición 8: Decimos que un giro g tiene *orden* n si el ángulo del giro es $2\pi/n$. En otras palabras, el orden de un giro es el número mínimo de veces que debemos componer el giro consigo mismo para obtener la identidad.

Un resultado notable, que no vamos a probar, concluye que sólo hay siete grupos de frisos esencialmente distintos (por serlo los movimientos que dejan invariante la recta del grupo del friso), que denotamos por la letra F seguida de un subíndice, que denota el orden de los giros (1 si no hay giro y 2 si el giro es de 180°) que aparecen, y añadimos un superíndice si el grupo no conserva la orientación (contiene simetrías).

Giro de 180°	Conservan la orientación (sin simetrías)	No conservan la orientación (simetrías S_r , S_p o ambas)
No	F_1	F_1^1, F_1^2, F_1^3
Sí	F_2	F_2^1, F_2^2

Tabla 1. Clasificación de los grupos de frisos.

En primer lugar, vamos a describir cada uno de ellos mediante un ejemplo generado con el software de geometría dinámica Geogebra.

Friso	Generación del grupo
F_1	
F_2	
F_1^1	
F_1^2	
F_1^3	
F_2^1	
F_2^2	

Tabla 2. Descripción de los siete grupos de simetría

6. LOS SIETE GRUPOS DE FRISOS EN EL MOBILIARIO URBANO DE ALCORCÓN.

A continuación mostramos imágenes, tratadas con Geogebra, de un representante de cada uno de los Grupos de Frisos encontrados con indicación del lugar donde se encuentran.

Grupo primero (F_1).

Es el grupo de friso más sencillo y no es otro que el grupo cíclico infinito. El grupo de simetría de este friso sólo contiene las traslaciones múltiplo de la traslación $t_{\vec{u}}$, donde \vec{u} , marcado en rojo (Figura 2), es el vector fundamental que corresponde al lado horizontal del rectángulo fundamental. El grupo está generado por tanto por dicha traslación.

$$F_1 = \langle t_{\vec{u}} \rangle = \{t_{n\vec{u}} / n \in \mathbb{Z}\}$$

Lo hemos encontrado en tapas de registros de cables de comunicaciones de la empresa ONO, abundantes en toda la población.



Figura 1. Tapa de registro situada en la entrada del IES Los Castillos.



Figura 2. Detalle del grupo de friso F_1

Grupo segundo (F_2).

Los elementos son las traslaciones múltiplos de $t_{\vec{u}}$ y los giros con ángulo π . Observemos que los centros de los giros están en la recta centro del friso.

El grupo F_2 , por tanto, está generado por la traslación $t_{\vec{u}}$ y uno de los giros $g_{P,\pi}$ con centro en un punto P (marcado con un punto oscuro grueso en la figura 4) de la recta centro del friso.

$$F_2 = \langle t_{\vec{u}}, g_{P,\pi} \rangle = \{t_{n\vec{u}} / n \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ g_{P_i} / P_i = P + \frac{i}{2}\vec{u}, i \in \mathbb{Z} \right\}$$

Lo hemos encontrado en tapas de registros en la Avenida de las Retamas.



Figura 3. Tapa de registro UFINET



Figura 4. Detalle del grupo de friso F_2

Grupo tercero (F_1^1)

Está generado por la traslación $t_{\vec{u}}$ y la simetría S_r respecto de la recta centro del friso.

$$F_1^1 = \langle t_{\vec{u}}, S_r \rangle$$

Es un friso más escaso del que hemos hallado algún ejemplar en registros de conducciones subterráneas en la calle Los Pinos junto al parque de La Ribota.



Figura 5. Tapa de registro en el parque La Rivota

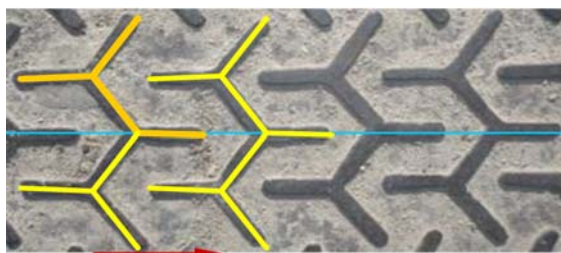


Figura 6. Detalle del grupo de friso F_1^1

Grupo cuarto (F_1^2)

El grupo de simetría está generado por la traslación $t_{\vec{u}}$ y una simetría vertical S_p

$$F_1^2 = \langle t_{\vec{u}}, S_p \rangle$$

Un ejemplar perteneciente a este grupo lo encontramos en las abundantes vallas de los jardines públicos de toda la localidad, como se observa en esta imagen tomada en la calle Ribadeo.



Figura 7. Vallado de jardines en la C/ Ribadeo. Al fondo el IES Los Castillos.



Figura 8. Detalle del grupo de friso F_1^2

Grupo quinto (F_1^3)

El grupo está generado por la traslación $t_{\vec{u}}$ y la simetría con deslizamiento S_d de vector $n\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{u}$, donde n es un número entero.

$$F_1^3 = \langle t_{\vec{u}}, S_d \rangle$$

Este grupo de simetría lo hemos encontrado en la fachada principal del Hipercor de San José de Valderas.



Figura 9. Entrada principal del Hipercor de San José de Valderas

El friso se sitúa en posición vertical y en este caso $n = 0$

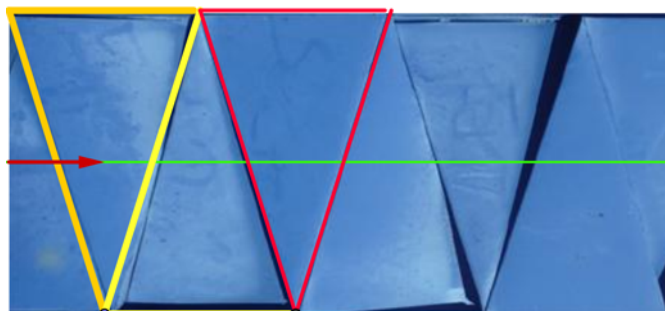


Figura 10. Detalle del grupo de friso F_1^3

Grupo sexto (F_2^1)

Este grupo de simetría está generado por la traslación $t_{\bar{u}}$, un giro $g_{P,\pi}$ de centro en la recta centro del friso, y la simetría S_r respecto de la recta centro. También puede ser generado por la traslación $t_{\bar{u}}$, el giro $g_{P,\pi}$ y una simetría S_p respecto de un eje vertical ya que $g_{P,\pi} = S_r \circ S_p$. Además el centro del giro se halla en la intersección de los dos ejes de simetría mencionados.

$$F_2^1 = \langle t_{\bar{u}}, g_{P,\pi}, S_r \rangle = \langle t_{\bar{u}}, g_{P,\pi}, S_p \rangle = \langle t_{\bar{u}}, S_r, S_p \rangle$$

Lo encontramos en una valla presente en muchas de las avenidas de la población. Este ejemplar pertenece a la Avda. de Lisboa.



Figura 11. Valla en la Avenida de Lisboa

Lo encontramos en una valla presente en casi todas las avenidas de la población. Este ejemplar pertenece a la Avda. de Lisboa.

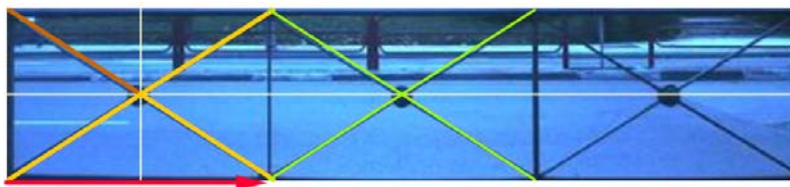


Figura 12. Detalle del grupo de friso F_2^1

Grupo séptimo (F_2^2)

Grupo de simetría está generado por la traslación $t_{\vec{u}}$, un giro $g_{P,\pi}$ de ángulo 180° con centro en un punto P de la recta centro y una simetría S_p respecto de un eje perpendicular a la recta centro.

$$F_2^2 = \langle t_{\vec{u}}, g_{P,\pi}, S_p \rangle$$

Lo hemos encontrado en muchas de las aceras de la localidad, como por ejemplo en la Avda de los Castillos.



Figura 13. Acera en la Avda. Los Castillos.

El friso fotografiado desde arriba y, convenientemente retocado para evitar el efecto distorsionador de la perspectiva, ofrece el siguiente aspecto:



Figura 14. Detalle del grupo de friso F_2^2

7. CONCLUSIONES

1. Hemos investigado y hallado la presencia de los siete grupos de frisos en el sobrio y funcional mobiliario urbano de una ciudad moderna y dinámica como Alorcón. Encontramos matemáticas en el entorno habitual más familiar para los estudiantes. La investigación didáctica en el campo de las matemáticas y, particularmente, en el de la Geometría, encuentra un fructífero campo en los entornos urbanos modernos y funcionales de las ciudades actuales.

2. El uso de contextos de aprendizaje próximos a la experiencia vital de los alumnos favorece la motivación para el aprendizaje al suscitar curiosidad por lo cotidiano.

3. Software de Geometría Dinámica (DGS) como Geogebra, en un entorno Windows, sencillo e intuitivo, constituye una herramienta de gran valor para la investigación en matemáticas gracias a la potencialidad que esconde como herramienta de visualización y simulación.

4.

8. BIBLIOGRAFÍA

[1] ALONSO, R., LORENTE, M.P y PLUMED, P. (2005). *Matemáticas en las rejillas de Monreal: un estudio de los 7 tipos de frisos*. XILOCA 33, 121- 138.

[2] ALSINA, C., PÉREZ, R. y RUIZ, C. (1989). *Simetría Dinámica*. Madrid, España: Síntesis.

- [3] ALSINA, C., BURGUÉS, C. y FORTUNY, J. (1991). *Materiales para construir la geometría*. Madrid, España: Ed. Síntesis.
- [4] BALBUENA, L., DE LA COBA, D., y GARCÍA, E. (2000). *Calados canarios y matemáticas*. SUMA, 35, 5-14.
- [5] BLANCO, M.F. (1994). *Movimientos y Simetrías*. Valladolid, España: Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Valladolid.
- [6] BROSSARD, Y. (1979). *Rosaces, frises et pavages* . París, Francia: CEDIC.
- [7] COXETER, H.S.M.; EMMER, M., PENROSE, R. Y TEUBER, M.L. (1987). *M.C. Escher: Art and Science*. Londres: Reino Unido: North-Holland.
- [8] GONZÁLEZ, L. (1982). *El bordado Popular serrano*. Salamanca, España: Centro de Estudios Salmantinos.
- [9] GROEMER, H. (1995). *The symmetries of frieze ornaments in Maya architecture*. Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. II 203, 101-116.
- [10] GRÜNBAUM, B. y SHEPHARD, G.C. (1984). *Tilings and patterns*. San Francisco, USA: Freeman.
- [11] HARGITTAL, I. Y LENGYEL G. (1986). *The seven one-dimensional space-group symmetries illustrated by Hungarian folk needlework*. Journal of Chemical Education, 61, 1033-1047.
- [12] JAIME, A. Y GUTIÉRREZ, A. (1996). *El grupo de las isometrías del plano*. Madrid, España: Síntesis.
- [13] KNIGHT, G. (1984). *The geometry of Maori art-Rafter Patterns*. New Zealand Math. Mag., 21(2), 36-40.

[14] RULL, F. (1986). *Estudio de las propiedades de simetría de figuras repetitivas unidimensionales en bordados y encajes de Castilla y León*. Revista de Folklore 63, 163-166.

[15] WEYL, H. (1990). *Simetría*. McGraw-Hill.

¹ GeoGebra es un excelente freeware de matemáticas desarrollado por Markus Hohenwarter en la Universidad de Salzburgo para la enseñanza de matemática escolar. El programa puede descargarse en la página <http://www.geogebra.org/cms/> y es conveniente hacerlo en su forma Geogebra WebStart que permitirá actualizaciones on line.