Fractales

Spinadel, Vera Martha Winitzky de
E-mail: vspinade@fibertel.com.ar
Laboratorio de Matemática y Diseño
Universidad de Buenos Aires

RESUMEN

Los fractales aparecen en la investigación de numerosas ramas de la ciencia. Desde un punto de vista general, si uno se pregunta la razón de ello, la respuesta es su propiedad caracterizante de auto-semejanza, esto es, la cantidad de estructuras invariantes ante cambios de escala, que aparecen tanto en la Naturaleza como en el análisis de sistemas dinámicos que varían con el tiempo. Es por esto que hemos considerado imprescindible formular un enfoque general e histórico de introducción al tema, a fin de abrir puertas al estudio de la estabilidad de sistemas micro- y macro-físicos, que pueden variar desde la estructura interna del DNA hasta las galaxias astronómicas.

***Palabras claves*:**

Dimensión fractal; auto-semejanza; números irracionales; descomposición en fracciones continuas; Número de Oro.

1. INTRODUCCIÓN

Comencemos haciendo un poco de historia. La palabra *"fractal"* fue introducida por el matemático polaco Benoit B. Mandelbrot, que nació en 1924 en Varsovia, Polonia, en el seno de una familia lituana judía. La palabra Fractal proviene del adjetivo latín *"fractus"*, que significa interrumpido o irregular.

Sus padres previeron la tremenda realidad geopolítica que se avecinaba y en 1936 emigraron a París. ¿Por qué París? Porque su tío, Szolem Mandelbrot era miembro de un grupo élite de matemáticos franceses conocidos como *"Nicolás Bourbaki"* [1]. Este era un pseudónimo que un grupo de jóvenes adoptó tomando el nombre de un general francés de origen griego Charles-Denis Bourbaki (1816-1897), que comandó exitosamente el ejército a través del Rin en la guerra de 1870.

La familia de Mandelbrot pasó la Segunda Guerra Mundial en Tulle, una pequeña ciudad al Sur de París, donde Benoit no recibió una educación formal. Por ejemplo, nunca aprendió el alfabeto y aún hoy en día le cuesta consultar una guía de teléfonos! Lo conocí personalmente en Québec, Canadá en 1992, donde participamos ambos del ICME-7 (International Congress on Mathematical Education), que se realiza con una periodicidad de 4 años [2].

Sin embargo, Mandelbrot puso en evidencia una capacidad matemática extraordinaria, muy diferente de la de su famoso tío! Poseía una agudeza visual y geométrica que le permitió doctorarse en Matemática usando su formidable intuición y de ahí en más, comenzó su propia carrera, muy alejada de la bourbakiana de su tío.

Decidió irse a USA y en 1958 entró a trabajar en el excelentemente equipado laboratorio de Yorktown Heights de IBM, situado en las afueras de New York. Nunca le gustó manejar él mismo las computadoras: simplemente se sentaba al lado del operador y le decía qué hacer. Pero tuvo la enorme ventaja que en este lugar, dejaron que el joven genio francés siguiera sus investigaciones tal como él lo deseara! Sus resultados probaron ser más diversos, eclécticos y de avanzada que lo que cualquiera hubiera podido imaginar... Se convirtió en experto en ciertas áreas de lingüística, teoría de juegos, aeronáutica, ingeniería, economía, fisiología, geografía, astronomía y, por supuesto, física.

Este enfoque altamente multi-disciplinario constituyó una verdadera revolución en todo el campo científico tradicional, donde en aquella época, se tendía cada vez a una mayor especialización. Sin embargo, Mandelbrot era brillante y pudo, con el auxilio de la Informática, desalentar las críticas de algunos de sus detractores. Por ejemplo, descubrió que la variación de los precios en el mercado, que hasta entonces se consideraba como puramante al azar, seguía una simetría en las fluctuaciones de los precios a largo plazo, comparadas con las fluctuaciones a corto plazo. Y este asombroso resultado lo logró considerando las variaciones en el precio del algodón, para el cual se disponía de estadísticas que databan de varios cientos de años! Mandelbrot descubrió un esquema en las impredecibles fluctuaciones diarias de los precios del algodón, que se repetían en escalas de tiempo más y más largas. Sólo más tarde comprendió que había descubierto un *"fractal"* en los datos económicos, que ponía de manifiesto una auto-semejanza recursiva a través de diversas escalas.

2. CARACTERIZACION DE UNA ESTRUCTURA FRACTAL

Un fractal es un ente matemático que <u>no</u> se define de la manera habitual como se definen otros conceptos matemáticos. Se caracteriza por una propiedad de invariancia en presencia de *"cambios de escala"*. Esta propiedad se denomina *"auto-semejanza"* y puede presentarse de maneras y formas muy distintas: en algunos casos, la auto-semejanza es matemática exacta y hablamos de *"fractales deterministas"*, mientras que en otros casos, que se encuentran en el mundo real que nos rodea, la auto-semejanza es aproximada.

Los fractales deterministas constituyen un nuevo tipo de Geometría: la **Geometría Fractal** [3], que es, ante todo, un nuevo lenguaje. Mientras que los elementos de nuestra bien conocida Geometría Euclidiana son líneas, círculos, esferas, etc., los elementos de la Geometría Fractal escapan a la percepción directa. Ello se debe a que son algoritmos que solamente la computadora puede convertir en formas y estructuras. El principio de auto-semejanza se presenta aproximadamente en la naturaleza: en líneas costeras y en cuencas de ríos, en la formación de nubes y en el crecimiento de árboles, en el flujo turbulento de fluidos y en la organización jerárquica de sistemas vivos.

2.1. Geometría Euclidiana y Geometría Fractal

EUCLIDIANA	FRACTAL
Tradicional. Más de 2000 años.	Moderna. Fractales: 1980
	"Monstruos" a comienzos del siglo XX
Simetrías simples. Rotaciones.	Simetrías homeométricas
	Auto-semejanza (estadística)
Objetos con magnitudes características	Irregularidad en todas las magnitudes
Adecuada para describir objetos fabricados por el hombre	Adecuada para describir procesos no lineales en la Naturaleza
Descripta por fórmulas algebraicas	Descripta por algoritmos recursivos ideales para una computadora

3. DIMENSION FRACTAL

La auto-semejanza está fuertemente conectada con nuestro concepto intuitivo de "*dimensión*". Matemáticamente, un punto tiene dimensión topológica cero, una línea tiene dimensión 1, un cuadrado tiene dimensión 2 y un cubo tiene dimensión 3. A estas dimensiones espaciales, se le suma una cuarta dimensión: el tiempo. Estas cuatro dimensiones son números enteros. La genialidad de Mandelbrot consistió en intuir que podían existir configuraciones con dimensiones no enteras! Asi por ejemplo, un segmento puede dividirse en **N** partes idénticas, cada una de las cuales estará en la relación $\mathbf{r = 1/N}$ con el segmento total. Análogamente, un cuadrado en el plano puede dividirse en cuadrados más pequeños auto-semejantes que estarán en la relación $\mathbf{r = 1/N^{1/2}}$ con la figura completa. Lo mismo sucederá con un cubo dividido en cubos más pequeños. En ese caso, $\mathbf{r = 1/N^{1/3}}$. De esta manera un objeto auto-semejante D-dimensional puede dividirse en copias más pequeñas del mismo que estén en la relación $\mathbf{r = 1/N^{1/D}}$ con el todo. O bien

$$\mathbf{N = 1/r^{D}}$$

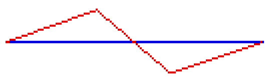
de donde despejamos la "*DIMENSION FRACTAL*" D:

$$\mathbf{D = \ \log N / \log (1 / r).}$$

Por supuesto, **D** no precisa ser un número entero y los logaritmos pueden tomarse en cualquier base. Pero su valor numérico para una curva plana auto-semejante representa cuantitativamente cuan irregular es la curva. Esto es, si la dimensión fractal de la misma está más cerca de 2 que de 1, la curva tenderá a llenar prácticamente todo el plano.

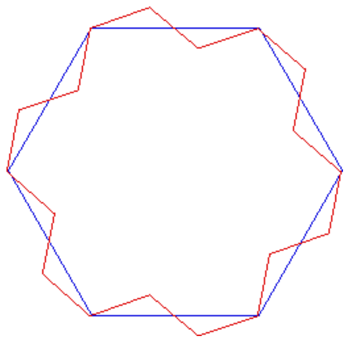
Incluso, una estructura puede llegar a tener una dimensión fractal entera, como lo muestra la curva llamada “copo de nieve” de William Gosper (un brillante computador que trabajaba en el Laboratorio de Los Altos, California, USA) cuya dimensión fractal es igual a 2 (Figura 1). Esta curva se construye partiendo de siete hexágonos regulares y uniendo ocho vértices, formando siete segmentos de igual longitud. La segunda iteración se obtiene reemplazando cada segmento por una línea quebrada de siete segmentos donde cada nuevo segmento es igual $1/\sqrt{7}$ del que le precede [4].

$$D = \frac{\log 7}{\log \sqrt{7}} = \frac{\log 7}{\frac{1}{2}\log 7} = 2 \ .$$

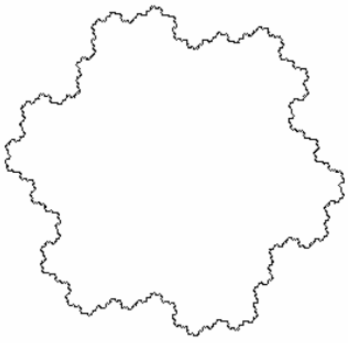


a

Fig. 1 – Motivo (a) y generación del fractal de Gosper, partiendo de un hexágono regular (b). En (c) se muestra la quinta iteración.



b



c

Cabe acotar que existen otros ejemplos previos de curvas que llenan el plano, como la curva ideada por el matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932), pero en ese caso se tienen puntos de auto-intersección.

Se han propuesto diversas definiciones de fractales pero no existe todavía una suficientemente general. En principio, se acuerda en no definir un fractal sino enumerar sus propiedades características, a saber:

- Un fractal tiene una estructura fina; esto es, mayor detalle en escalas arbitrariamente pequeñas;
- Un fractal es demasiado irregular para ser descripto con la Geometría Euclidiana tradicional, tanto local como globalmente;
- Con frecuencia, un fractal tiene una cierta forma de auto-semejanza, quizás aproximada o estadística;
- En general, la dimensión fractal es mayor que la dimensión topológica;
- En muchos casos interesantes, el fractal se define en forma muy simple, por lo general, con un método recursivo.

4. CONJUNTOS INFINITOS

Se llaman "conjuntos infinitos numerables" aquellos conjuntos que pueden ponerse en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números naturales. P. ej. el conjunto de los números pares, el conjunto de los impares, el conjunto de los cuadrados de los números naturales (cubos, etc.).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	...

Además de estos casos sencillos, existen otros conjuntos que también son infinitos numerables, pero no en forma evidente. P. ej., el conjunto de las fracciones racionales de la forma **p/q** , donde tanto **p** como **q** son números naturales y **q** es distinto de cero, que supondremos son irreducibles. El matemático alemán de ascendencia danesa Georg Cantor (1845-1918) probó que las fracciones racionales forman una sucesión infinita numerable. Para ello las ordenó en el llamado "*arreglo de Cantor*" [5]:

$$\begin{array}{cccccc} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\ \frac{2}{1} & \frac{2}{3} & \frac{2}{5} & \frac{2}{7} & \frac{2}{9} & \cdots \\ \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \frac{3}{7} & \cdots \\ \frac{4}{1} & \cdots\cdots & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \cdots \\ \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{3}{2} & \frac{2}{5} & \cdots \end{array}$$

5. CONJUNTOS NUMERICOS

Las fracciones que hemos visto hasta ahora se llaman "*números racionales*" o conmensurables, porque pueden medirse como el cociente de dos números naturales y el resultado es una expresión decimal finita o bien infinita periódica. Pero existen otros números que son irracionales o inconmensurables. Dichos "*números irracionales*" fueron descubiertos por Pitágoras de Samos al notar la inconmensurabilidad de la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Matemáticamente, el conjunto de los racionales junto con el de los irracionales forma el conjunto de los números reales, que posee la propiedad de ser denso, esto es, representados en la recta real, no presentan ningún agujero.

Los números irracionales, tales como $\pi, \sqrt{2}, \mathbf{e}$, admiten una expresión decimal con infinitos dígitos que no se repiten en forma periódica. Obviamente, dicha expresión no nos permite cuantificar el grado de irracionalidad, o sea el grado de aproximación de las aproximantes racionales al número irracional. Este grado de irracionalidad resulta sumamente importante en las experiencias que se diseñan buscando fronteras entre el sistema dinámico que se comporta periódicamente y su transición a un sistema caótico, donde es imposible predecir el comportamiento ya que condiciones iniciales muy semejantes originan resultados totalmente dispares. Este comportamiento indica la aparición del "*caos*". Para detectar este grado de irracionalidad, usaremos la llamada "descomposición en fracciones continuas".

6. DESCOMPOSICION EN FRACCIONES CONTINUAS

Todo número real puede ser desarrollado en fracciones continuas. Dicha descomposición se remonta al libro "Liber Abaci" publicado en 1202 por Leonardo de Pisa, cuyo seudónimo era Fibonacci. ¿Qué es una fracción continua? Es una expresión del tipo

$$\mathbf{x} = \mathbf{a}_0 + \cfrac{1}{\mathbf{a}_1 + \cfrac{1}{\mathbf{a}_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

que se escribe $\mathbf{x} = [\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots]$. El primer coeficiente puede ser nulo (caso en que el número real está comprendido entre 0 y 1) pero el resto de los coeficientes son enteros positivos. La sucesión de coeficientes es <u>finita</u> si y solo si $\mathbf{x}$ es un número racional. Por ejemplo, es fácil verificar la siguiente descomposición en fracciones continuas de un número racional

$$\frac{18}{7} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}} = [2,1,1,3].$$

Si, en cambio, $\mathbf{x}$ es un número irracional, el desarrollo es infinito y si tomamos un número finito de términos tales como

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{k}} = \mathbf{a}_0 + \cfrac{1}{\mathbf{a}_1 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{\mathbf{a}_{\mathbf{k}}}}}$$

obtenemos una sucesión de "aproximantes racionales" al número $\mathbf{x}$ que tienden a $\mathbf{x}$ cuando $\mathbf{k} \to \infty$.

Algunos números irracionales tales como $\boldsymbol{\pi}$ y $\mathbf{e}$ (la base de los logaritmos neperianos) tienen aproximantes que convergen muy rápidamente. En particular, el número $\boldsymbol{\pi}$ = [3,7, 15, 1, 292, ...] converge tan rápidamente que la tercer aproximación racional $\boldsymbol{\sigma}_3 = \frac{335}{113} = 3{,}1415929\ldots$ tiene seis cifras decimales exactas! Asombrosamente, este resultado ya era conocido por Tsu Chung Chi en la China del siglo V. En cambio,

$\mathbf{e}$ = 2,71828... = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 2, 2, 8, 1, ...] converge más lentamente al principio, debido a la existencia de muchos 'unos' en el desarrollo. Comparativamente, los irracionales cuadráticos son de convergencia más lenta.

Al igual que con las expresiones decimales periódicas, las fracciones continuas *"periódicas"* se denotan con una raya sobre el período y si la descomposición es de la forma $\mathbf{x} = \left[\overline{\mathbf{a_0}, \mathbf{a_1}, \cdots}\right]$, decimos que la fracción continua es *"periódica pura"*. Al respecto, el matemático francés Joseph Louis Lagrange (1736-1813) probó que un número es irracional cuadrático si y solo si su descomposición en fracciones continuas es periódica (no necesariamente periódica pura).

Ejemplo

Si tomamos la ecuación cuadrática

$$\mathbf{x^2 - x - 1 = 0}$$

y la resolvemos, comprobamos que su raíz positiva es el conocido Número de Oro $\boldsymbol{\phi} = \dfrac{\mathbf{1+\sqrt{5}}}{\mathbf{2}}$ ¿Cómo hallamos su descomposición en fracciones continuas? Simplemente, tomamos la ecuación cuadrática y la dividimos miembro a miembro por $\mathbf{x}$ (valor no nulo): $\mathbf{x = 1 + \dfrac{1}{x}}$. Luego reemplazamos la $\mathbf{x}$ del segundo miembro iterativamente por $\mathbf{1+1/x}$. Así obtenemos, después de **n** iteraciones:

$$\mathbf{x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}}}}}.$$

Si $\mathbf{n \to \infty}$ resulta

$$\boldsymbol{\phi} = \mathbf{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}} = [\overline{1}]}$$

que es una fracción continua periódica pura.

Este desarrollo, el más simple de los correspondientes a todos los números irracionales, es el más lentamente convergente pues sus denominadores son todos iguales a uno. Coloquialmente podríamos expresar este hecho afirmando:

EL NÚMERO DE ORO ϕ ES EL MÁS IRRACIONAL DE TODOS LOS NÚMEROS IRRACIONALES!!

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] N. BOURBAKI (1951). Théorie des Ensembles, Livre I, Hermann & Cie. Editeurs.

[2] Proceedings of the 7th International Congress on Mathematical Education ICME-7 (1994), Les Presses de L´Université Laval, Canadá, ISBN 2-7637-7362-1.

[3] JORGE G. PERERA, JORGE H. PERERA Y VERA W. DE SPINADEL, (2007), Geometría Fractal, 3ra. Edición, Editorial Nueva Librería, ISBN

[4] VERA W. DE SPINADEL (2004), From the Golden Mean to Chaos, 2da. Edición, Editorial Nobuko S.A., ISBN 987-1135-48-3.

[5] Briefwechsel Cantor-Dedekind (1937), editado por E. Noether y J. Cavailles, Hermann & Co., París, Francia.

[6] JOSEPH LOUIS LAGRANGE (1869, Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries, Oeuvres, Vol. 3, Gauthier-Villars, París, Francia.