El paso de estudiar matemáticas en Secundaria a la Universidad y los REI

Fonseca Bon, Cecilio (cfonseca@uvigo.es); Casas Mirás, José M. (jmcasas@uvigo.es)

Departamento Matemática Aplicada I

Universidad de Vigo

RESUMEN

Analizamos las dificultades que surgen en la enseñanza de las matemáticas en el paso de la Secundaria a la Universidad. Mostramos como las organizaciones matemáticas que se estudian en Secundaria son puntuales, rígidas y poco articuladas entre sí. Proponemos la construcción de un nuevo dispositivo didáctico denominado (REI).

***Palabras claves*:**

Organizaciones Matemáticas; Recorridos de Estudio e Investigación.

ABSTRACT

We analyze the difficulties which arise with the teaching of mathematics through Secondary School to the University. We show as the mathematical organizations studied at the Secondary School are particular, rigid and little articulated between them. We propose the construction of a new didactical device (TSR).

Key words

Mathematical Organization; Trajectory of Study and Research.

1. INTRODUCCIÓN

En muchas reuniones, así como en múltiples artículos que han ido apareciendo paralelamente en los medios de comunicación, los máximos responsables de la enseñanza universitaria de las matemáticas muestran una gran preocupación por el estado actual y, sobre todo, por las previsiones del futuro de dicha enseñanza:

Se precisa mejorar la formación de los profesores. Los métodos actuales no son los mejores. Ha habido una profunda brecha entre las universidades y la secundaria, brecha que las sociedades científicas intentamos cerrar. Se precisa una continua realimentación para que este profesorado esté al día.[1]

El mundo educativo permanece muchas veces al margen entre lo que se enseña y lo que se aprende. Se deben modificar los contenidos del Bachillerato, remitiendo parte de los mismos al nivel universitario (álgebra lineal; límites, derivación e integración; geometría analítica tridimensional; inferencia estadística); algo que, de todas formas, ya se está asumiendo en la Universidad de manera no reglada.[2]

2. METODOLOGÍA

2.1. Un problema docente como punto de partida

Las cuestiones que constituyen el punto de partida del problema docente que queremos abordar puede describirse como sigue:

¿Cómo suavizar o disminuir las enormes dificultades que encuentran los alumnos para pasar de estudiar matemáticas en Secundaria (S) a estudiar matemáticas en la Universidad (U)? Y, complementariamente, ¿cómo podrían

[1] Comparecencia del Vicepresidente de la Real Sociedad Matemática Española, D. Manuel de León Rodríguez, ante la Ponencia creada en el Senado Español sobre la situación de las enseñanzas científicas en la Educación Secundaria, constituida en el seno de la Comisión de Educación, Cultura y Deporte, para que informe en relación con la materia objeto de estudio de la Ponencia (10 de octubre de 2002).

[2] Comparecencia del Director del Departamento de Matemáticas Estadística y Computación de la Universidad de Cantabria, D. Tomás Recio Muñiz, ante la citada Ponencia (21 de febrero de 2002).

superarse las crecientes dificultades con las que tropiezan los profesores de matemáticas del primer ciclo universitario para llevar a cabo su trabajo?

Todo problema didáctico debe ser referido a un ámbito (matemático y didáctico) respecto al cual se hacen todas las interpretaciones. Nuestro modelo didáctico lo constituye la *Teoría Antropológica de lo Didáctico* (en adelante, TAD) [2], cuya mínima unidad de análisis paso a describir.

En la TAD se plantean las situaciones problemáticas (SP), como aquellas Tareas en las que no disponemos de ninguna técnica para realizarlas. La realización de cualquier tipo de tareas requiere poner en marcha una forma sistemática y compartida de ejecutarlas, es lo que nosotros llamamos una *técnica*. Aparece de esta forma el primer bloque de la Organización Matemática (OM), que es el bloque práctico-técnico. La existencia del bloque práctico-técnico requiere poner en marcha un discurso racional que justifique la pertinencia de la técnica para la tarea concreta, es lo que llamamos *tecnología*. Pero el discurso tecnológico contiene afirmaciones más o menos explícitas, que pueden requerir justificación. Se pasa así del nivel de justificación, explicación, producción de la técnica, que es el nivel de la tecnología, al nivel de justificación, explicación, producción de la tecnología, que es el nivel de la *teoría*. Aparece de esta forma el segundo bloque *tecnológico-teórico* (tecnología y teoría) de la OM. El sistema formado por esas cuatro componentes (tareas, técnicas, tecnología y teoría) es lo que llamamos Organización Matemática.

En todo el trabajo que presentamos juega un papel importante la noción de “contrato didáctico”. Describiremos brevemente el alcance de esta noción: el *contrato didáctico institucional* está formado por un conjunto de cláusulas que distribuyen las responsabilidades recíprocas en el juego que se establece en cada institución docente entre los estudiantes, el conocimiento matemático y el profesor, como director del proceso de estudio.

Utilizando esta noción formulamos a continuación una hipótesis del Programa Epistemológico:

H(PE): Muchos de los fenómenos didácticos – esto es, relativos al estudio de las matemáticas – que aparecen en el tránsito de Secundaria a la Universidad – incluyendo los más “visibles” asociados al “fracaso escolar”–, pueden ser explicados en términos de contradicciones y discontinuidades o cambios bruscos entre los contratos didácticos institucionales vigentes en ambas instituciones. Dichos contratos rigen las *organizaciones matemáticas y didácticas* respectivas, esto es, el tipo de prácticas matemáticas que pueden desarrollarse y la forma como dichas prácticas pueden llevarse a cabo en cada institución. Postulamos que el estudio comparado de las organizaciones[3] que están presentes en Secundaria y en la Universidad nos permitirá explicar mejor las discontinuidades entre ambas instituciones docentes y los obstáculos que dificultan el tránsito entre ellas.

2.2. Conjetura General

En lo que se refiere a la discontinuidad entre ambas o, en otros términos, a las contradicciones entre los correspondientes contratos didácticos institucionales, formularemos una *conjetura general provisional*, en forma de *hipótesis* con tres partes que se refieren, respectivamente, a la Enseñanza Secundaria (S), a la Enseñanza Universitaria (U) y al tránsito de Secundaria a la Universidad (S-U):

- H(S): En Secundaria la actividad matemática es puntual, rígida y aislada.
- H(S-U): En el tránsito de Secundaria a la Universidad no existe una actividad matemática que retome las organizaciones matemáticas que se estudian en Secundaria, las desarrolle adecuadamente, las articule entre sí y las integre en organizaciones más amplias y completas.
- H(U): En la Universidad predomina el modelo teoricista, se tiende a identificar "enseñar y aprender matemáticas" con "enseñar y aprender teorías".

Para contrastar ciertos aspectos de esta conjetura general formulamos 11 conjeturas específicas. Las cinco primeras pretenden poner de manifiesto que las OM en S son rígidas, aisladas y puntuales y las seis siguientes conjeturas se refieren a algunas de las contradicciones y cambios bruscos que se producen en el contrato didáctico institucional al pasar de la enseñanza Secundaria a la enseñanza Universitaria.

[3] En este trabajo nos restringiremos al estudio de las Organizaciones Matemáticas.

2.3. Aspectos de la rigidez de las matemáticas que se estudian en Secundaria

En forma muy esquemática (ver detalles en [4]) enunciaremos las conjeturas :

C1. *Dependencia de la nomenclatura asociada a una técnica.*

En U se considera que la “nomenclatura” es irrelevante y que un simple cambio de los símbolos que se utilizan para poner en marcha una técnica no puede representar una modificación importante de la actividad matemática.

C2. *La aplicación de una técnica en secundaria no incluye la interpretación del resultado.*

Debido a la escasa incidencia del bloque tecnológico-teórico en las organizaciones matemáticas que se estudian (reconstruyen), en S no se exige interpretar adecuadamente el resultado de aplicar una técnica para considerar que dicha técnica ha sido “correctamente” utilizada

C3. *Inexistencia de dos técnicas diferentes para realizar una misma tarea.*

En S se utilizan técnicas aisladas y muy rígidas hasta el punto de que, aunque “existan” – en la práctica docente del profesor y en los libros de texto – dos técnicas diferentes para un mismo tipo de tareas, no forma parte de la responsabilidad matemática del alumno – en el contrato didáctico – decidir para cada tarea concreta cuál de las dos técnicas es la más pertinente.

C4. *No reversión de las técnicas para realizar la tarea* “*inversa*” *de una tarea dada.*

Uno de los aspectos más importantes de la rigidez de la actividad matemática que se estudia en S se manifiesta en la no reversión de las técnicas matemáticas correspondientes. En términos del contrato didáctico podemos decir que, en S, no forma parte de la responsabilidad matemática del alumno invertir una técnica para llevar a cabo la tarea inversa.

C5. *Ausencia de situaciones abiertas que requieren un trabajo de modelización.*

Los *problemas escolares* se presentan, tanto en S como en U, con enunciados muy cerrados en los que figuran como "datos" todos los que se necesitan (exactamente) para resolver el problema sin que falte ni sobre ninguno. Raramente se presenta una situación abierta donde el estudiante deba decidir cuáles son los datos que se necesitan para formular correctamente un problema matemático.

2.4. Discontinuidades entre las matemáticas "mostrativas" de Secundaria y las matemáticas "demostrativas" de la Universidad

C6. Cambio en el papel de las definiciones: de "descriptivo" a "constructivo".

C7. *De la argumentación "ostensiva" a la demostración "deductiva".*

C8. *De los problemas "por resolver" a los problemas "por demostrar".*

C9. *La geometría escolar es "intrafigural" y trabaja con nociones "absolutas".*

C10. *La matemática escolar presenta un fuerte carácter prealgebraico en S y sufre una abrupta algebrización al inicio de la enseñanza universitaria.*

C11. *El cálculo en S no estudia familias de funciones ni integra las técnicas.*

Las últimas seis conjeturas que presentamos aquí hacen referencia a los cambios que sufren las matemáticas en la transición entre Secundaria y Universidad.

3. ESTUDIO EMPIRICO

Nuestro estudio exploratorio se centrará en empezar a contrastar experimentalmente los cinco aspectos de la rigidez de las OM que se estudian en secundaria y que hemos caracterizado mediante las conjeturas **C1-C5**. Hemos elegido para ello dos tipos de datos empíricos como indicadores de las características de las OM que se reconstruyen en la institución de la enseñanza secundaria española:

(a) Las respuestas de una amplia muestra de estudiantes a las tareas matemáticas propuestas en un cuestionario con 31 preguntas (ver ANEXO)

(b) Los datos obtenidos del análisis de una muestra de manuales (Santillana, Anaya, Mcgraw-Hill y SM) aprobados oficialmente por las autoridades educativas españolas para su uso en la Enseñanza Secundaria. Estos datos pueden considerarse, como ya hemos dicho, la "respuesta de los libros de texto" al citado cuestionario.

Para empezar a contrastar empíricamente cada una de las anteriores conjeturas elaboramos dos versiones sucesivas de un cuestionario (o "prueba inicial") que hemos pasado a estudiantes que comienzan sus estudios en las U (Autònoma de Barcelona y Vigo). De la primera elegimos la Diplomatura de Estadística (EST) y la Licenciatura de Matemáticas (MAT), y de la segunda, la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial (EUITI), la Escuela Técnica Superior de Ingeniería Industrial (ETSII) y la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Agroalimentaria (EUITA). Ambas fueron pasadas a finales de octubre – de los años 2000 y 2001, respectivamente – en un momento en que los estudiantes habían tenido unas pocas semanas de clase en la Universidad. En este trabajo sólo aportaremos los datos de la segunda versión de este cuestionario porque ésta constituye un refinamiento del primero. En el cursos 2003/2004 se pasó una versión revisada de este cuestionario a estudiantes de las Escuelas de Ingeniería de la U de Castellón y en el curso 2007/08 se pasó la misma prueba en la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Vigo. El análisis de las respuestas confirma plenamente las conclusiones que se desprenden de las dos primeras pruebas.

Nuestro objetivo principal consiste en utilizar las respuestas de los estudiantes como indicadores de algunas de las características de las OM que se estudian en S y poner de manifiesto la existencia y la naturaleza de determinados obstáculos epistemológicos y didácticos que dificultan el desarrollo del proceso de estudio de las matemáticas en el paso de Secundaria al primer ciclo de la Universidad

Nuestra prueba de referencia es la realizada en el curso 2000/01, porque la muestra nos permitía incluir en ese curso, alumnos de distinta procedencia de Secundaria. En ese curso en la U española figuraban alumnos que provenían del antiguo bachillerato (COU) con alumnos que provenían del nuevo bachillerato

(LOGSE). La distinción entre LOGSE y COU pretendía indagar si el nuevo bachillerato reflejaba cambios importantes en la actividad matemática de secundaria. También queríamos saber cual era el comportamiento en esa prueba de los alumnos que la institución escolar considera como “buenos estudiantes” (nota ≥ 7). En este trabajo por problemas de espacio, presentaremos un resumen del trabajo empírico realizada en [4], restringido al análisis del cuestionario de la población en general y de los libros de texto en particular.

Analizaremos a continuación los resultados obtenidos, interpretándolos en función de las conjeturas que pretendemos contrastar. Por esta razón agruparemos los ítems relativos a cada una de las conjeturas. Para evitar confusiones indicaremos, debajo de la etiqueta con la que describimos cada conjetura, las lista completa de los ítems asociados a dicha conjetura.

Conjetura 1; Dependencia de la nomenclatura asociada a una técnica

Ítems: 1, 6, 11a, 11b, 16a, 16b, 21, 24, 27a, 27b, 30a y 30b

Queremos investigar qué ocurre en S cuando trabajamos con variables designadas con símbolos no habituales para el alumno. Para contrastar esta conjetura debemos analizar cómo cambia la dificultad de los ítems cuando, para la misma tarea matemática, se cambian los símbolos habituales por otros símbolos.

Items		1	12a	21	11a	27a	11b
%		81,95	64,88	57,56	10,73	11,22	50,73
Items	27b	16a	30a	16b	30b	6	24
%	41,95	27,32	33,17	40,49	45,37	69,76	69,27

Tabla 1: Porcentaje de respuestas correctas

♦ Los datos reflejan claramente que el porcentaje de respuestas correctas en los ítems 1 (variable x), 12a (variable t) y 21 (variable a y x como ruido) baja de una forma muy importante al pasar de la variable x a la variable t y disminuye todavía más cuando aparece la x como “ruido” y la a como variable de integración. En el caso de la derivación de una función racional, se observa una diferencia significativa en el porcentaje de aciertos al pasar de la variable x (ítem 11b) a la variable s (ítem 27b).

♦ Sin embargo, las respuestas a los ítems 6 (variable *p*) y 24 (variable *x*) parecen sugerir que la dificultad para representar funciones cuadráticas es independiente de la variable. De todos modos, el análisis cualitativo de las respuestas muestra que la técnica utilizada por la inmensa mayoría de estudiantes es una tabla de valores. De esta forma, la dificultad de los ítems pasaba a ser independiente de las variables respectivas y sólo dependía de cálculos algorítmicos.

♦ Por último, hay que notar que la racionalización de los denominadores cuando éstos están expresados como potencias de exponente racional (ítems 16a y 16b) presenta una dificultad mayor que cuando los denominadores están expresados como radicales (30a y 30b). El análisis de las respuestas muestra, además, que casi todos alumnos que realizan la tarea empiezan transformando la expresión con exponentes racionales a la nomenclatura de radicales que les resulta más familiar. Este resultado es significativo, por lo menos, del poco uso escolar de los exponentes fraccionarios.

Los resultados que arroja el análisis de los libros de texto en relación este grupo de subconjeturas específicas son los siguientes:

		Número de ejercicios	
	Tipo de tareas	**Variable *x***	**Variable distinta de *x***
C1A	Cálculo de integrales Indefinidas	1217	2
C1A	Cálculo de integrales definidas	131	0
C1B	Cálculo de derivadas	952	5
C1C	Gráfica de funciones	492	2

C1D	Racionalización	**Radicales**	**Exponente fraccionario**
		57	0

Tabla 2: análisis libros de texto

Esta tabla se refiere al número total de las tareas de cada tipo que aparecen en el conjunto de los manuales analizados. Así, por ejemplo, en el conjunto de todos los libros de Bachillerato analizados aparecen 1217 tareas relativas al cálculo de integrales indefinidas con la variable x y únicamente 2 tareas de ese tipo utilizan una variable distinta de x. El resto de los datos presentan una contundencia similar.

El estudio estadístico de los dos tipos de datos empíricos manejados permite avanzar una de las primeras conclusiones:

SECUNDARIA: Los datos empíricos obtenidos en relación a la conjetura 1 muestran que las técnicas matemáticas se tienden a identificar en cierto grado con los objetos ostensivos que se utilizan para describirlas y para aplicarlas.

UNIVERSIDAD: En el caso en que, el desarrollo de la actividad matemática no supere esta restricción inicial, aparecerán conflictos en la enseñanza universitaria de las matemáticas debido al fuerte carácter algebraico, que comporta el uso constante y sistemático de técnicas matemáticas independientes de la nomenclatura.

Conjetura 2: Aplicar una técnica no incluye interpretar el resultado

Ítems: 2a y 2b, 7a y 7b, 12a y 12b, 15a y 15c, 17a y 17b

El objetivo que perseguimos en este bloque es el de cuantificar en qué medida el utilizar correctamente una técnica comporta interpretar correctamente el resultado obtenido (o el procedimiento utilizado). Las tareas que se proponen para contrastar esta conjetura no deberían ser problemáticas para los alumnos que han acabado la enseñanza secundaria, esto es, forman parte del *medio matemático* del alumno.

Ítems	2a	2b	7a	7b	12a	12b	15a	15c	17a	17b

%	48,2	16,10	30,73	10,73	64,88	21,95	60,49	32,20	51,22	31,22

Tabla 3: Porcentaje de respuestas correctas

♦ Los datos de la tabla reflejan que los alumnos tienen dificultades para pasar de una propiedad analítica de las derivadas (ítem 2a) a la interpretación geométrica del resultado (ítem 2b).

♦ También aparece una caída en el porcentaje de aciertos entre los alumnos que conocen la técnica del cálculo del límite de una función racional (ítem 7a) y los que la interpretan correctamente (ítem 7b).

♦ Hay una distancia importante entre el porcentaje de respuestas del ítem 12a (conocimiento de la técnica del cálculo de una integral definida) y el porcentaje de alumnos que interpretan correctamente el resultado de aplicar dicha técnica (ítem 12b).

♦ Después de construir una función afín (ítem 15a), las respuestas al ítem 15c muestran claramente que la inmensa mayoría de los estudiantes tienen dificultades para interpretar la derivada de dicha función.

♦ Por último, los resultados de los porcentajes de aciertos respecto de los ítems 17a (cálculo del límite de una función exponencial) y 17b (interpretación del resultado) reafirman los resultados anteriores.

En resumen, podemos afirmar claramente que la mayoría de alumnos no ha sabido interpretar los resultados que obtenía o, incluso, que no entendían qué se les pedía al solicitarles una interpretación, como pone de manifiesto el alto porcentaje de respuestas en blanco.

Los resultados que arroja el análisis de los libros de texto en relación a este grupo de conjeturas específicas son los siguientes:

	Tipo de tareas	**Ejercicios de realización (sin interpretación)**	**Ejercicios con interpretación de la técnica o resultado**

C2A	Cálculo de límites	698	5
C2B	Cálculo de derivadas en un punto	78	3
C2C	Cálculo de integrales definidas	121	8

Tabla 4: ejercicios de interpretación

La tabla refleja claramente la distancia que existe en los libros de texto consultados, entre la gran cantidad de ejercicios que se proponen para resolver mecánicamente y la casi ausencia absoluta de ejercicios en los que se requiera la interpretación del resultado.

El estudio estadístico de los dos tipos de datos empíricos manejados permite avanzar otra de las conclusiones:

SECUNDARIA: Los datos empíricos en relación con la conjetura 2 apuntan a que no existen, tareas institucionales que tengan por objetivo interpretar el funcionamiento o el resultado de una técnica. Es de suponer que esta restricción institucional que concentra la actividad en el bloque práctico-técnico generará una matemática de carácter "mostrativo".

UNIVERSIDAD: Es previsible, por lo tanto, que el fuerte carácter **"**demostrativo**"** de las OM que se estudian en la Universidad obstaculice el tránsito al estudio universitario de las matemáticas y tenga un coste didáctico importante, tanto para la institución universitaria como para los propios.

Conjetura 3: Inexistencia de dos técnicas diferentes para una misma tarea

Ítems: 3 y 22, 8 y 25, 13 y 28, 18a y 18b.

Para comprobar el porcentaje de alumnos que conocen dos técnicas diferentes para una misma tarea, proponemos tareas algorítmicas muy elementales con las que forzosamente el alumno debe estar familiarizado: cálculo de un porcentaje, cálculo del máximo común divisor, resolución de una inecuación de segundo grado y cálculo de una derivada muy sencilla.

Ítems	22	3	25	8	13	28	18a	18b
%	44,39	29,76	84,88	63,90	36,10	23,41	57,56	21,95

Tabla 5: Porcentaje de respuestas correctas

♦ Para calcular el mínimo común múltiplo de dos números, los alumnos están mucho más familiarizados con la técnica de descomposición de factores primos (ítem 22) que con la utilización del máximo común divisor, propuesta en el ítem 3.

♦ Para calcular el precio final después de aplicar un descuento, los alumnos prefieren la técnica aditiva (ítem 25) a la multiplicativa (ítem 8) y, además, el análisis cualitativo de las respuestas muestra que la técnica multiplicativa no es utilizada espontáneamente sino que es construida a partir de la técnica aditiva, dado que la distancia entre ambas técnicas es mínima.

♦ Los resultados del ítem 18a muestran que más de la mitad de los alumnos dominan la técnica de la derivada de un cociente de funciones, mientras que los que conocen otra técnica distinta se reduce a menos de la cuarta parte (ítem 18b).

♦ En lo que se refiere a la resolución de inecuaciones de segundo grado, la técnica dominante es la algebraica (ítem 13), mientras que la técnica gráfica (ítem 28) presenta más dificultades.

En resumen, el porcentaje de estudiantes que utilizan dos técnicas diferentes para cada una de las tareas propuestas es, en la mayoría de los casos, inferior al 30%.

Los resultados que arroja el análisis de los libros de texto en relación este grupo de conjeturas específicas son los siguientes:

	Tipo de tareas	**Ejercicios de realización con una sola técnica**	**Ejercicios de realización con más de una técnica**

C3A	Cálculo del mcm	82	1
C3B	Cálculo porcentajes	43	37
C3C	Cálculo de derivadas	952	8
C3D	Resolución de una inecuación cuadrática	**Algebraicamente**	**Gráficamente**
		25	4

Tabla 6: inexistencia de técnicas diferentes

La tabla anterior refleja que para llevar a cabo determinadas tareas (el cálculo del mcm, el cálculo de derivadas y la resolución de inecuaciones cuadráticas) los libros de texto oficiales proponen exclusivamente una única técnica.

El estudio estadístico de los dos tipos de datos empíricos permite avanzar otra de las conclusiones:

SECUNDARIA: Los datos empíricos de los cuestionarios y los extraídos de los libros de texto, correspondientes a dicha conjetura, permiten explicar porqué los alumnos no comparan nunca el coste de dos técnicas diferentes para decidir cuál es la más adecuada en cada caso.

UNIVERSIDAD: El contrato institucional vigente en la institución universitaria supone implícitamente que, dado un amplio tipo de problemas, puede dejarse al estudiante la responsabilidad de decidir cuál es la técnica más adecuada para abordar cada subtipo de problemas.

Conjetura 4: Ausencia de técnicas para realizar la tarea inversa

Ítems: 4 y 23, 9 y 26, 19 y 31, 6 y 29, 24 y 29.

Para estudiar esta conjetura proponemos, de nuevo, tareas que en S son rutinarias como, por ejemplo, buscar las raíces de un polinomio de tercer grado (cuando son enteras o pueden calcularse fácilmente), representar una función polinómica de grado 2 y resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Ítems	4	23	9	26	19	31	24	29
%	25,37	70,24	55,12	7,80	35,61	20,00	69,27	16,10

Tabla 7: Porcentaje de respuestas correctas

♦ Vemos que los aciertos en la representación gráfica de una parábola alcanzan un porcentaje del 69,27% (ítem 24), mientras que la tarea inversa (pasar de la gráfica de la parábola a su ecuación) baja a un 16,10% (ítem 29).

♦ En el caso de la tarea de resolver un sistema de dos ecuaciones lineales (ítem 9), se pasa de un 55,12% de aciertos en la tarea "directa" a un 7,8% de aciertos en la tarea inversa (escribir un sistema dadas las soluciones, ítem 26).

Los resultados de la tabla anterior muestran que el porcentaje de aciertos en dichas tareas, que tomaremos como "directas", es muy superior al de las correspondientes tareas "inversas".

En relación con este conjunto de conjeturas especificas, los datos que aportan los libros de texto son los siguientes:

	TAREA DIRECTA	**TAREA INVERSA**
	Representar la gráfica a partir de la expresión analítica	Expresar analíticamente una función a partir de la gráfica
C4A	156	35
	Resolver una ecuación polinómica	Determinar una ecuación polinómica dadas las raíces
C4B	237	29
	Resolver un sistema de ecuaciones lineales	Determinar un sistema de ecuaciones lineales a partir de sus soluciones
C4C	516	1
	Traducción del lenguaje natural al	Traducción del lenguaje algebraico al

	lenguaje algebraico	lenguaje natural
C4D	145	40

Tabla 8: Ausencia técnicas tarea inversa

La tabla recoge de una forma clara que en los libros de texto consultados y en lo que se refiere a los cuatro tipos de tareas considerados, la distancia considerable que existe entre el número de tareas directas que se proponen y el correspondiente número de tareas inversas. Destacamos, en particular, que en el caso de la resolución de un sistema de ecuaciones lineales (incluso en el caso más sencillo, de dos ecuaciones con dos incógnitas) que es una tarea que forma parte del “entorno familiar del alumno”, los libros de texto no plantean en ningún momento la posibilidad de invertir el proceso.

El estudio estadístico de los dos tipos de datos empíricos analizados permite avanzar otra de las conclusiones:

SECUNDARIA: De nuevo los datos relativos a la conjetura 4 sugieren que las OM que se estudian en Secundaria abordan las tareas matemáticas en una sola dirección y muy raramente consideran las correspondientes tareas inversas.

UNIVERSIDAD: Esta restricción institucional sobre la actividad matemática que es posible llevar a cabo en Secundaria provoca disfunciones en la propia enseñanza secundaria de las matemáticas en el tránsito a la enseñanza universitaria, debido al carácter plenamente algebrizado de las organizaciones matemáticas que se proponen para ser estudiadas en la Universidad (lo que comporta la reversibilidad de las tareas y de las técnicas matemáticas).

Conjetura 5: Ausencia de situaciones abiertas de modelización

Ítems: 5, 10, 15 y 20.

Para estudiar esta conjetura proponemos únicamente tareas matemáticas en las que se trata principalmente de manipular un modelo matemático dado en el enunciado. Hemos renunciado a proponer tareas de modelización matemática de una situación en la cual el estudiante tuviese que decidir cuáles eran los datos y las incógnitas pertinentes para elaborar el modelo en cuestión.

Ítems	5a	5b	10a	10b	15a	15b	15c	20a	20b
%	54,63	23,90	29,27	7,32	60,49	46,83	32,20	20,0	11,2

Tabla 9: Porcentaje de respuestas correctas

Los datos de la Tabla 9 muestran claramente que los estudiantes tienen graves dificultades para manipular el modelo matemático elemental de una situación. El análisis cualitativo de las respuestas muestra que en la mayoría de los casos los estudiantes no utilizan adecuadamente el modelo dado en el enunciado para responder a las cuestiones que se proponen. Los porcentajes bajan de una forma considerable cuando la tarea de modelización incluye una interpretación, en términos de la situación modelizada, de los objetos matemáticos que aparecen

Por otra parte los datos obtenidos del análisis de los manuales muestran muy claramente que en el conjunto de las tareas de los tipos considerados, las tareas que incluyen algún aspecto de la modelización son pocas.

	Tipos de tareas	**Total**	**Incluyen alguna etapa de la modelización**
C5A	Problemas de inecuaciones	152	22
C5B	Problemas de derivadas	1957	176
C5C	Problemas de integrales	1887	132

Tabla 10: ausencia de modelización

El estudio estadístico de los dos tipos de datos empíricos analizados para esta conjetura permite avanzar otra de las conclusiones:

SECUNDARIA: Los datos obtenidos del análisis de los manuales muestran muy claramente que en el conjunto de las tareas de los tipos considerados, las tareas que incluyen algún aspecto de la modelización son excepcionales.

UNIVERSIDAD: Postulamos que, en la medida en que la actividad matemática se plantee por parte de la institución universitaria como una actividad de modelización matemática, aparecerá un nuevo obstáculo que vendrá a aumentar las dificultades en el tránsito de Secundaria a la Universidad.

Podemos concluir, en resumen, que la comparación entre los dos tipos de datos empíricos obtenidos (los que provienen de las respuestas del cuestionario y los que hemos extraído del análisis de los libros de texto) permite afirmar, tal como suponíamos, que las respuestas al cuestionario no reflejan características personales de los estudiantes sino más bien la práctica institucionalizada que han llevado a cabo durante los años escolares anteriores.

4. RECORRIDOS DE ESTUIDO E INVESTIGACIÓN

Hasta aquí la mayor parte de nuestro análisis se han centrado esencialmente en las organizaciones matemáticas que se reconstruyen en la Enseñanza Secundaria. Hemos descrito algunos de los aspectos de la rigidez de las organizaciones matemáticas que se estudian en dicha institución escolar.

Todo lo anterior pone de manifiesto fuertes restricciones institucionales en la actividad matemática de Secundaria, que no caen a nuestro juicio, bajo la responsabilidad del profesor ni supone ningún tipo de crítica negativa hacia el profesorado de Secundaria porque están fuera de su alcance. Nuestro objetivo es otro bien distinto. Creemos que el problema, extraordinariamente complejo de estudiar matemáticas en Secundaria a estudiar matemáticas en Secundaria, no puede ser abordado sin entrar a analizar y cuestionar el diseño curricular de ambos niveles y este problema tiene difícil solución, si la comunidad matemática escolar se mantiene al margen [1].

Para introducir en el aula el proceso de matematización, la TAD propone recurrir a un nuevo tipo de dispositivo didáctico que designa como **Recorridos de Estudio e Investigación** (ver [3]). Se considera que un Recorrido de Estudio e Investigación (REI) viene generado por el **estudio de una cuestión viva *Q*** y con fuerte poder generador, capaz de imponer un gran número de cuestiones derivadas. El estudio de Q y de sus cuestiones derivadas conduce a la construcción de un gran número de saberes que delimitarán el mapa de los posibles recorridos y sus límites. La cadena de cuestiones que se generan es, de hecho, una cadena de cuestiones y de respuestas (Qi, Ri).

Nuestra propuesta de REI viene caracterizada por tres variables:

1) Una **Razón de Ser** donde sea posible responder a una serie de cuestiones del estudio de la actividad matemática a realizar, tales como: ¿Cuáles son las razones históricas que motivaron su estudio?. ¿Cuáles son las situaciones problemáticas a las que responde la nueva OM que se va a construir?. ¿Qué Situaciones Problemáticas emergen que antes no era posible formular?.

2) Una ***Situación Generatriz*** (SG) lo suficientemente rica como para provocar la aparición de una actividad matemática de complejidad creciente que complete y amplíe las nuevas OM que vayan apareciendo. Esta SG se debe mantener viva a lo largo del proceso de estudio.

3) En nuestro proceso de estudio de un REI, juega un papel muy importante la OMLRC [4]. Un REI viene caracterizado por algo muy importante, como es la utilización de indicadores matemáticos, que permiten estudiar la completitud de la OM construida. Este proceso de estudio tiene dos partes diferenciadas, una relativa al proceso de construcción o reconstrucción de la propia OM determinada por los Momentos Didácticos, y otra, relativa al propio producto resultante, que viene determinado por unos indicadores. Es a partir de ambas facetas: proceso de construcción y producto como se determina el grado de completitud de la OML. Presentamos a continuación una versión muy resumida de una OMLRC.

a. de la actividad matemática, es un proceso de Ingeniería Didáctica El proceso de construcción y, viene articulado alrededor de los Momentos Didácticos:

i. OD1.Debe haber un momento informativo.

ii. *OD2.* Debe haber un momento del primer encuentro.

iii. OD3. Debe contener *momentos exploratorios.*

iv. OD4. Debe provocar un *desarrollo progresivo de la técnica*.

v. OD5. Debe existir un Momento Teórico de justificación de las técnicas.

vi. OD6. Debe de precisarse lo que es "exactamente" la organización matemática elaborada, que corresponde al momento institucional.

vii. OD7. Es preciso evaluar la calidad de los componentes de la OML construida, aparece de esta forma el momento de la evaluación.

viii. OD8. Momento de las TIC La organización didáctica debe integrar los diversos instrumentos del trabajo matemático. En particular, las Calculadoras Simbólicas deben permitir construir nuevas técnicas matemáticas que, cuando se utilizan adecuadamente, mejoran la eficacia y la economía del trabajo matemático y amplían el tipo de problemas que se pueden estudiar.

b. El proceso de construcción de la OM es un producto de Ingeniería Matemática. Para medir el grado de completitud de la misma se utilizarán los siguientes indicadores:

i. OML1. Deben aparecer tipos de tareas asociados al "cuestionamiento tecnológico", esto es, tareas que hagan referencia a la interpretación, la justificación, la fiabilidad, la economía y el alcance de las técnicas, así como a la comparación entre ellas.

ii. OML2. Existencia de diferentes técnicas para cada tipo de tareas y de criterios para elegir entre ellas.

iii. OML3. Existencia de diferentes representaciones de la actividad matemática.

iv. OML4. Existencia de tareas y de técnicas "inversas".

v. OML5. Interpretación del funcionamiento y del resultado de la aplicación de las técnicas

vi. OML6. Existencia de tareas matemáticas "abiertas"

vii. OML7. Necesidad de construir técnicas nuevas capaces de ampliar los tipos de tareas.

viii. OML8. Debe existir la posibilidad de perturbar la situación inicial.

Hay que subrayar, que la noción de "completitud" es relativa. No tiene sentido hablar de OML "completas" ni de OML "incompletas". Se trata, en todo caso, de una cuestión de grado: existen OML más o menos "completas" que otras en función del grado en que sus componentes cumplen las condiciones descritas por los indicadores OML1-OML7 [1].

Estamos creando y experimentando en un taller de problemas, procesos de estudio de REI en las Escuelas de Ingeniería Técnica Industrial de Vigo y Forestal de Pontevedra. Los que tenemos mas desarrollados tienen que ver con el estudio de la derivada y de la diagonalización de matrices [5].

En los REI que estamos experimentando

- Aparece un nuevo contrato didáctico: hay un por qué y un para qué de la actividad matemática., la responsabilidad del proceso de estudio pasa de tener un solo director (el profesor) a compartirse por los sujetos de la institución.
- El protagonismo del alumno aumenta de forma considerable.
- Existe una integración del trabajo del aula con el trabajo del laboratorio de forma que permita ampliar y completar la actividad matemática desarrollada en las clases teóricas.
- Se pretende que el estudiante pueda ver analogías y diferencias entre tareas, comprobar la validez de las respuestas, intercambiar experiencias, y plantearse preguntas sobre el sistema que se estudia.
- El soporte informático (programas de cálculo simbólico y geometría dinámica) juega un papel importante.
- Un REI permite estudiar en profundidad un campo de problemas.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ARTIGUE, M. (2003), ¿Qué Se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nivel Universitario. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, No. 2 (2003) 117.

[2] CHEVALLARD, Y., BOSCH, M.. y GASCÓN, J. (1997). Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. Horsori, Barcelona.

[3] CHEVALLARD, Y. (2005). Steps towards a new epistemology in mathematics adeucation. IV Conference of the european Society

for Research in Mathematics Education (CERME 4). Sant Feliu de Guíxols (Spain).

[4] FONSECA, C. (2004). Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Enseñanza Secundaria y la Enseñanza Universitaria. Tesis Doctoral. Universidad de Vigo.

[5] FONSECA, C., CORRAL, N. y CASAS, J. M. (2008), Un recorrido de estudio e investigación entorno a una tarea de modelización: el cálculo del volumen máximo de una pisicina. Actas XVI Congreso Universitario de Innovación Educativa en las Enseñanzas Técnicas, Cádiz.

6. ANEXO

CUESTIONARIO

1. Calcula la integral definida: $\int_1^3 2x\,dx$.

2. Si una función es *par*, es decir, $f(-x) = f(x)$ [como, por ejemplo, $f(x) = x^4$].

   (a) ¿Qué relación hay entre $f'(-a)$ i $f'(a)$? [por ejemplo, entre $f'(-1)$ y $f'(1)$].

   (b) ¿Cómo interpretarías geométricamente esta relación?. Haz una gráfica e interprétala.

3. Calcula el mínimo común múltiplo de 280 y 350 sin descomponer los números en factores primos (puedes utilizar el hecho de que el máximo común divisor es 70). Explica como lo haces.

4. Busca una función polinómica de grado tres que corte al eje de les x en los puntos siguientes: (1, 0), (– 2, 0) y (3, 0).

5. Una maquinaria industrial, que tiene una antigüedad de x años, genera unos ingresos (en euros por año) de $I(x) = 5000 - 20\,x^2$ y unos costos de $C(x) = 2000 + 10\,x^2$:

   (a) ¿Durante cuantos años es rentable esta maquinaria?

   (b) ¿Qué harías para calcular las ganancias netas generadas por la maquinaria durante el periodo en que es rentable? Deja indicada la operación que crees se debe hacer para calcular dichas ganancias.

6. Representa gráficamente la función: $t(p) = 4\,p - p^2$.

7. Las funciones $f(x) = 3x^4 + x$ y $g(x) = x^3 - 100\,x^2$ tienden a cero cuando x tiende a cero.

   (a) Calcula el límite de la función cociente: $f(x)$ /(x) cuando x tiende a cero.

   (b) ¿Cuál de las dos funciones crees que tiende mas rápidamente a cero cuando x tiende a cero? Justifica tu respuesta.

8. ¿Por qué número has de multiplicar una cantidad para disminuirla en un 18%?. Pon un ejemplo.

9. Busca dos soluciones del sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 2x - y + 4 = 0 \\ -4x + 2y - 8 = 0 \end{cases}$.

10. Un estudio de la eficacia del turno matinal (de 8 h. a 15 h.) de una fábrica demuestra que el número, $Q(t)$, de unidades producidas (en un período de t horas) por un trabajador que llega a la fabrica a las 8:00 horas, es de $Q(t) = \frac{-t^3}{3} + 2t^2 + 12t$ unidades (en promedio).

    (a) ¿En qué momento de la mañana la eficacia es máxima?.

    (b) ¿En qué momento el ritmo de crecimiento de la producción deja de aumentar y comienza a disminuir?.

11. Calcula les derivadas de les siguientes funciones:

    (a) $f(x) = 8s^x$ (b) $k(x) = \frac{3s}{x}$, $s \in$ R .

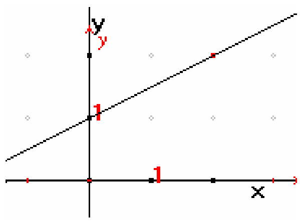
12. Si la velocidad v (en m/s) de un móvil y el tiempo t (en segundos) transcurrido desde que comienza el movimiento están relacionados mediante la ecuación siguiente: $v = 2\,k \cdot t$,

    (a) Calcula la integral $\int_{t=0}^{t=3} 2kt\,dt$

    (b) Interpreta el resultado anterior en términos del movimiento.

13. Resuelve la inecuación $(x - 1)(x + 3) \geq 0$ estudiando los cambios de signo de la función asociada (sin hacer ninguna gráfica).

14. Escribe la ecuación de la recta adjunta, justificando los cálculos.



15. El volumen ***C*(*t*)** (agua acumulada hasta el instante ***t***) de agua que mana de un grifo (en litros) viene dada por una función afín respecto del

tiempo t (en segundos). Si en el primer segundo el agua recogida es de 3 litros, en el segundo es de 5 litros y en el tercer segundo es de 7 litros,

(a) ¿Cuál es el volumen de agua recogido en un instante cualquiera t?.

(b) ¿Cuál es el volumen de agua recogido en una hora?.

(c) ¿Cuando arroja más agua por segundo el grifo a los 10 segundos o a los 12 segundos?.

16. Racionaliza los denominadores de las fracciones siguientes: (a) $\dfrac{3}{7^{\frac{3}{5}}}$ (b) $\dfrac{7}{4^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{1}{2}}}$

17. Las ventas $V(t)$ (en miles de unidades) de un producto, t años después de ser lanzado al mercado son:

$$V(t) = 30 \cdot e^{\frac{-1,8}{t}}$$

(a) Calcula el límite de $V(t)$ cuando t tiende a infinito.

(b) Interpreta el resultado anterior en términos de ventas del producto en cuestión.

18. Dada la función: $f(x) = \dfrac{5}{(3x - 2)^2}$,

(a) Calcula su derivada.

(b) ¿Sabrías calcular esta misma derivada utilizando una técnica diferente a la que has utilizado en el apartado anterior?.

19. Expresa en lenguaje algebraico el enunciado siguiente**:** “El producto de tres números pares consecutivos es igual a 1680”.

20. En una autopista la velocidad máxima permitida es de 120 km/h. Un coche circula por esta autopista en el intervalo de tiempo comprendido entre $t = 0$ h. y $t = 6$ h. Si su posición s(**t**) en cada instante del intervalo viene dada por la ecuación: $s(t) = \dfrac{-t^3}{3} - 5t^2 + 155t$.

(a) ¿Excede en algún momento el límite máximo de 120 km/h?.

(b) ¿En qué momento su velocidad es máxima?.

21. Calcula la integral definida $\int_1^2 3x^2\, a\; da$.

22. Utilizando la descomposición en factores primos de 450 y 270, calcula el mínimo común múltiplo de estos dos números.

23. ¿En qué puntos la gráfica de la función $f(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 3)$ corta al eje de las x?.

24. Representa gráficamente la función $f(x) = x^2 - 4x$.

25. Compras una camisa que marca un precio de 4000 ptas. y te hacen un descuento del 15%. Calcula cuánto te cuesta la camisa.

26. Escribe un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que acepte como soluciones los puntos (– 1, 3) y (5, 6).

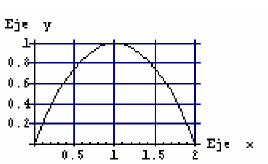
27. Calcula les derivadas de les siguientes funciones:

    (a) $g(s) = 3x^s$, $(x\in$ R).

    (b) $h(s) = \dfrac{x}{2s}$ $(x\in$ R).

28. Resuelve la inecuación $(x + 4)(x - 2) \geq 0$ dibujando la gráfica de la función asociada.

29. Escribe la ecuación de la parábola adjunta, justificando tus cálculos.



30. Racionaliza los denominadores de las fracciones siguientes:

    (a) $\dfrac{5}{\sqrt[4]{8^3}}$ (b) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}$

31. Expresa en lenguaje natural la siguiente igualdad $2x + (2x - 1) + (2x + 1) = 240$, $x\in$ N