

# La geometría vista por Grace Chisholm Young

Adela Salvador<sup>a</sup>, María Molero<sup>b</sup>.

<sup>a</sup> Dpto. de Matemática e Informática Aplicadas a la Ing Civil. Universidad Politécnica de Madrid.  
ma09@caminos.upm.es

<sup>b</sup> IES Juan de la Cierva. maria.molero@free.fr

Queremos utilizar la biografía de Grace Chisholm Young para hacer una propuesta sobre la enseñanza de la geometría en dimensión tres, y animar a hacer geometría en el aula.

El artículo consta de tres partes, la primera trata sobre la biografía de esta mujer matemática, de sus dificultades y de sus logros, con comentarios sobre situaciones similares de alguna otra mujer matemática.

En la segunda se recogen párrafos de su obra, Primer libro de Geometría en la que comenta los obstáculos que encuentra la enseñanza de la geometría en dimensión tres e invita a pesar de ello a su enseñanza.

Por último, en la tercera parte, siguiendo sus consejos, se sugieren actividades adecuadas para el aula.

En las escuelas de ingeniería, como la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, o en las escuelas de arquitectura se requieren elevados conocimientos geométricos, de los que, en muchos casos, el alumnado no tiene.

## Palabras clave:

Enseñanza de la geometría, geometría, Grace Chisholm Young.

## Abstract

In this paper Grace Chisholm Young's biography is used to make a proposal about the teaching of Geometry in dimension three, a second purpose is to encourage the use of Geometry in the classroom.

This paper is divided in three sections. The first one deals with the biography of this mathematician woman, her difficulties and her achievements, with commentaries on similar situations of some another mathematical woman.

Paragraphs of her work "*First book of Geometric*" are gathered in the second section. She describes the obstacle she comes across in the teaching of Geometry of the geometric in three

dimensions and she invites to the teaching of this discipline in spite of these difficulties.

Finally, in the third report, suitable



classroom activities adapted for the classroom are suggested following her advices. Engineering Schools, as E.T.S.I. de Caminos or Architecture Schools, there are needed and demanded high geometric knowledge which students lack in many cases.

## Keyword:

Geometric, Grace Chisholm Young, teaching of geometric.

## 1. Grace Chisholm Young

Grace Chisholm Young nació en 1868, en Inglaterra, durante el reinado de la reina Victoria. Para hacernos una idea clara sobre el estado de la educación en esa época recordemos que hacia 1881, el 20 por ciento de la población de Inglaterra todavía no sabía escribir su nombre.

Su familia era una familia de clase alta, con elevada educación. El padre, Henry William Chisholm, había tenido un prestigioso cargo en el Departamento de Pesas y Medidas del Gobierno británico y la madre, Anna Louisa Bell, era una consumada pianista que, junto a su padre, daba recitales de violín y piano en Haslemere Town Hall. Tenían 44 y 59 años, respectivamente, cuando ella nació. Uno de sus hermanos mayores, Hugo Chisholm obtuvo fama por la edición de la Enciclopedia Británica e influencias en la edición de The Times.

### 1.1. Estudios

Era la más pequeña de cuatro hermanos y también la más consentida. Sólo le enseñaban lo que ella quería aprender y en este sentido su educación fue un tanto informal. Le gustaba el cálculo mental y la música, y como en ambas materias su madre podía darle clases, se educó en su casa hasta que tuvo diez años. La educación de sus hermanos varones fue muy diferente. A los diez años su madre le puso una institutriz, que constituyó la única educación formal en su infancia. Sin embargo fue una preparación suficiente para, a los 17 años, pasar los exámenes de Cambridge (Cambridge Señor Examination). Si hubiese sido un varón, el año siguiente hubiese comenzado sus estudios universitarios, pero al ser una mujer, esta posibilidad no fue considerada, y siguiendo los deseos de su familia se ocupó de trabajos sociales con la gente pobre de Londres.

Cuando Grace, con 21 años, decidió continuar estudiando, su madre no deseaba que ella estudiase medicina, su primera elección, y con el apoyo de su padre comenzó a estudiar matemáticas. En abril de 1889 entró en la universidad de Cambridge, en el Gritón Collage, el mejor centro en matemáticas de aquella época, donde, entre otros profesores, enseñaba Arthur Cayley (1821-1895). Su tutor fue William Young.

Su tutor le sugirió que fuese a las clases de Cayley. Pidió a su amiga Isabel Maddison que le ayudase y ambas hicieron la solicitud que se requería para poder asistir a las clases de un determinado profesor. El permiso no fue autorizado con facilidad, pero al ser por indicación de su tutor, finalmente fue concedido. En 1892 Grace obtuvo su diploma en Cambridge, pero allí todavía una mujer no podía doctorarse.

Para proseguir su carrera como matemática tuvo que abandonar su país e ir a Göttingen (la

ciudad universitaria alemana donde se habían doctorado Sofía Kovalevskaya y Emmy Noether). Grace había elegido el lugar adecuado en el momento oportuno. Allí estaba Felix Klein, que le ayudó con su cordialidad y su apoyo. Pero la conformidad para admitirla tenía que darla el Ministerio de Cultura de Berlín. También fue en esto Grace afortunada pues el oficial encargado de la educación superior en Alemania era en ese momento Friedrich Althoff, liberal e interesado en la educación superior de la mujer.

Ella describió así a Felix Klein en una carta: “La actitud del Profesor Klein es esta, no admite la admisión de cualquier mujer que no haya ya realizado un buen trabajo y que pueda superar las pruebas de grado o equivalentes... El Profesor Klein es moderado. Hay miembros en la Facultad que no están de acuerdo con la admisión de mujeres y otros que lo desapruaban totalmente”.

### 1.2. Los estudios de Sofía Kovalevskaya

Recordemos que Sofía Kovalevskaya aunque se había doctorado en Göttingen, nunca había sido admitida en esa universidad con los mismos derechos que los varones. Sofía tuvo muchísimas más dificultades para poder estudiar. En 1861 la universidad de San Petersburgo habría sus aulas a las mujeres. Poco después el gobierno cerró todas las escuelas debido a la agitación política de los estudiantes. Cuando las volvieron a abrir el **privilegio de la educación a las mujeres había quedado abolido**. Cuando Sofía está preparada para ir a la universidad las mujeres todavía no tenían acceso a las universidades rusas. Cientos de chicas rusas pertenecientes a las mejores familias decidían abandonar sus hogares y marcharse a estudiar a universidades extranjeras. Una mujer soltera no podía conseguir pasaporte sin permiso de sus padres. Para superar este obstáculo, algo usual en el círculo de estudiantes radicales era que las mujeres hicieran “*matrimonios blancos*” (contratos entre jóvenes para eludir la autoridad paterna y poder viajar al extranjero y estudiar) y así podían viajar a las universidades extranjeras en las que sus “*maridos*” las dejaban estudiar en paz. Entre las jóvenes parejas estaba bien visto este tipo de matrimonio. Este complicado sistema fue utilizado por otras muchas mujeres de esa época. A los 17 años, la familia pasó el invierno en San Petersburgo. Como estaban en boga los *matrimonios blancos*, Sofía, su hermana y una amiga, Anna Mijaillovna Evreinova (Zhanna)

comprendieron que la única forma de estudiar era salir de Rusia, y propusieron a un compañero, Vladimir Kovalevsky, asociado con el movimiento reformista de ese momento en Rusia, que se casase, mediante un *matrimonio blanco* con una de ellas y así las otras dos acompañarían al matrimonio. Mediante este matrimonio platónico adquirirían las tres la libertad para viajar y estudiar. Anyuta y Zhanna estaban en tratos para casarse una de ellas con Vladimir. En uno de los encuentros llevaron a Sofía. Vladimir al verla tan guapa e inteligente cambió de opinión. Sofía fue la elegida. Realmente esto suponía un problema pues Sofía era muy joven, y su hermana, seis años mayor, se presumía que debía casarse primero. Pero a Vladimir nada pudo hacerle cambiar. Su padre estipuló un compromiso largo, pero capituló cuando la tímida Sofía, sin permiso, visitó sola la casa de Vladimir, algo muy poco ortodoxo en esa época, dejando una nota a su padre en la que le hacía ver que estaba dispuesta a fugarse con él. El padre consideró entonces como irremediable el matrimonio y se casaron cuando ella tenía 18 años. Sofía se entusiasmó con la investigación avanzada. Decidió estudiar con Weierstrass (1815-1897), "*padre del análisis matemático*". En otoño de 1870 se trasladó a Berlín pero allí sufrió una gran decepción pues estaba prohibido el acceso de las mujeres a las actividades universitarias. Sofía no podía ser la excepción a la regla, a pesar de las recomendaciones favorables de sus profesores precedentes. En la universidad de Berlín las mujeres no podían ni siquiera escuchar las conferencias.

Con enormes esfuerzos se dirigió a Weierstrass para solicitar recibir clases particulares. El célebre profesor, un hombre de 50 años, comprensivo y simpático, se mostró perplejo por la demanda de Sofía. No tenía confianza en sus capacidades y la recomendó que recibiera clases de uno de sus alumnos. La determinación de Sofía no lo permitía: ella quería sólo aprender con él. Por fin, únicamente para librarse de ella, le dio un conjunto de problemas, preparados para sus alumnos más avanzados, que con gran sorpresa, ella le devolvió resueltos una semana más tarde. "*Sus soluciones son eminentemente claras y originales*". Weierstrass, impresionado por su talento matemático, la admitió como alumna particular y acordó que se reuniría con ella dos veces a la semana, dándole clases gratuitas durante los cuatro años siguientes (1868-1872),

para guiarla en sus investigaciones. De esta forma Sofía pudo completar sus estudios.

### 1.3. Doctorado

Bajo la supervisión de Felix Klein obtuvo su doctorado en 1895. El título de su memoria de doctorado es "*Grupos algebraicos y trigonometría esférica*". Por lo tanto se puede considerar a Grace como la primera mujer que consiguió su doctorado en matemáticas de una forma "*normal*". A las clases de Klein asistían ella y otras dos mujeres. Como anécdota se cuenta que Klein tenía por costumbre comenzar con "¡Caballeros!" y debió modificarlo con "¡Oyentes!", aunque alguna vez se confundió y rectificó con una sonrisa. Se examinó de doctorado y volvió a Inglaterra. Su tesis fue reproducida y enviada a las personas que podían estar interesadas. Una de ellas, William Young, su futuro esposo, le pidió colaboración para un libro de astronomía. Es muy difícil separar la aportación de ella en dicho libro de la de él.

### 1.4. Matrimonio

La primera vez que la pidió en matrimonio ella rehusó pero la insistencia de William no cesó hasta que se casaron en Londres en Junio de 1896. El primer año de su matrimonio vivieron en Cambridge donde ella pudo continuar investigando y escribiendo, pero al final de ese año nació su primer hijo y William Young decidió trasladarse a Alemania. Entre 1897 y 1908 tuvo seis hijos y una familia tan numerosa no la permitía desarrollar muchas actividades fuera del hogar.

### 1.5. Su obra

Su creatividad se dirigió fundamentalmente a la educación de sus hijos a quienes están dirigidas las obras que escribió en aquella época. Escribió por ejemplo un libro para enseñar biología a uno de sus hijos, en el que describe el proceso de la división celular, que se publicó en 1905, con el nombre de *Bimbo*. En ese mismo año escribe *Primer libro de Geometría* en colaboración con su marido. Además, el temperamento de William fue

muy bohemio, y debido a esto pasaron gran parte



de su vida viajando por Alemania, Inglaterra, Italia....

Ocupó mucho de su tiempo en la educación de sus hijos. Su hijo Frank (Bimbo) que murió durante la primera guerra mundial prometía ser un gran científico. Janet fue física, como a Grace le hubiese gustado ser. Cecily se doctoró en matemáticas en Cambridge, como también hubiese deseado Grace. Laurie también fue matemática. Pat fue un químico reconocido.

Observemos cómo estamos contando en su biografía los nombres de sus hijos, de su marido... y que si leemos una biografía de Euler, Gauss, Weierstrass... no sabremos lo mismo de su familia. En todas las biografías de mujeres científicas se da esta circunstancia. Sabremos si estuvo casada o no lo estuvo, el nombre de su marido, de sus hijos, cuántos tuvo... Por ejemplo sabemos que Hipatia nunca se casó, igual que Sophie Germain, Caroline Hersche, María Gaetana Agnesi o Emmy Noether, y sabemos los nombres de los maridos de la marquesa de Châtelet, de Mary Sommerville o de Sofía Kovalevskaya.

Comenzó la segunda guerra mundial. A William le causaba preocupación la reacción que pudiera haber en su país por su simpatía por

Alemania y Grace volvió sola a Inglaterra. En el verano de 1942, cuando llevaban dos años separados, William murió repentinamente, pocos días antes de cumplir 79 años. Ella murió dos años después, en 1944, con 76 años.

Como ella trabajó a menudo en colaboración con su marido es difícil distinguir su contribución en las obras en las que trabajaron juntos. Cuando ella estudiaba en Cambridge era considerada como una matemática brillante. Por otro lado, William era considerado un buen profesor pero no hizo ninguna investigación original antes de trabajar con ella. Después de su matrimonio colaboraron en muchas ocasiones y William, de repente, a la edad de 35 años, se convirtió en un matemático creativo. En las ausencias de su marido, cuando él iba a trabajar fuera, a pesar de sus seis hijos, ella reencontraba su energía productiva y se ponía a trabajar, y fue durante una de esas ausencias, cuando William estuvo en la India en la universidad de Calcuta, cuando ella elaboró una serie de textos sobre los fundamentos del cálculo diferencial e integral. No podía producir a su lado. *“Cuando William estaba en casa monopolizaba completamente la vida de Grace. Él sabía que sus demandas eran excesivas, pero...”* (Grattan-Guinness; 1972, 117).

A pesar de sus difíciles condiciones de vida fue capaz de conseguir una considerable cantidad de excelentes trabajos y desgraciadamente las obras y los más de 200 artículos que publicaron juntos llevaron impresa la autoría exclusiva de su



marido.

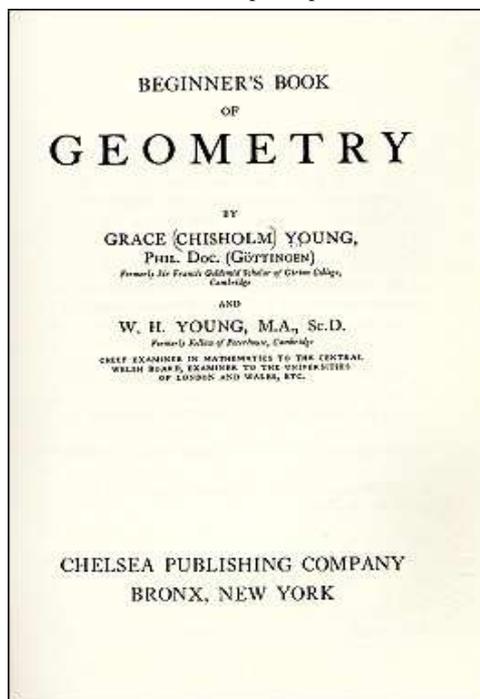
### 1.6. Utilización del nombre

Observemos el problema de la utilización del nombre. Si las mujeres cambian de nombre al casarse, como Mary Somerville, se dificulta mucho conocer su autoría. Mary se casó en 1804 con Samuel Greig, capitán de la marina rusa, y adquirió una mayor libertad para continuar sus estudios en matemáticas a pesar de que su marido no tenía ningún conocimiento científico y no le gustaban las mujeres sabias. La pareja vivió en Londres. Samuel murió pronto, en 1807, y Mary se encontró viuda, con dos hijos pequeños e independiente familiar y económicamente. Pudo continuar sola su educación matemática. Por primera vez era libre para conducir su vida, sin el control de padres y esposo. Ganó una medalla de plata por la solución de un problema sobre las ecuaciones diofánticas en el *Mathematical repository* de W. Wallace. Sus amigos la animaron a que siguiera estudiando. Adquirió un conjunto de libros, recomendados por un profesor amigo. Poco después ya leía los “*Principia*” de Newton. Se levantaba temprano, y estudiaba o escribía durante horas para estar disponible para la familia, las amistades o los compromisos sociales que tuviera.

En 1812, con 32 años, volvió a casarse con el Dr. William Somerville, su primo, de profesión médico, que la apoyó y la alentó en sus trabajos, y que compartió su interés por la ciencia. Era un hombre de gran inteligencia y poca ambición personal. Estaba orgulloso de los éxitos y la fama de Mary. Fue un matrimonio duradero y feliz. Su marido podía usar la biblioteca de la Real Sociedad en beneficio de Mary, le presentaba a científicos importantes, y cuando ya era famosa le ayudó a editar sus libros.... Dice Ch. Lyell: “*Si nuestra amiga la señora Somerville se hubiera casado con Laplace, o con un matemático, nunca habríamos oído hablar de su trabajo. Lo habría fundido con el de su marido, presentándolo como si fuera de él*”. Tuvieron dos hijas. Su otra hija, la mayor murió en 1823, causando uno de los mayores disgustos de la vida de Mary. En su rutina diaria también se incluía la educación de esas otras dos hijas, Marta y Mary.

El 27 de marzo de 1827, lord Henry Brougham, presidente de la Cámara de los Lores, escribió a su marido pidiéndole que convenciera a Mary para que escribiera una traducción de la

*Mecánica Celeste* de Laplace para su “Biblioteca



de Conocimientos Útiles”, dirigida a personas no instruidas. (Es curioso que en ese tiempo, y a pesar de que Mary ya era muy conocida, la correspondencia que le enviaban iba dirigida a su marido). Mary vacilaba, pero decidió hacerlo con la condición de que se mantuviera el proyecto en secreto, y con el compromiso de que su manuscrito fuese quemado si no se consideraba aceptable. Con una organización excepcional, sin renunciar a su vida social y doméstica, trabajó en su libro e hizo frente a todas las dificultades durante cuatro años. Escribió en su autobiografía: “*Frecuentemente abandonaba mi trabajo tan pronto como me anunciaban una visita, para que nadie pudiera descubrir mi secreto*”. “*Un hombre siempre puede tener el control de su tiempo alegando que tiene negocios, a una mujer no se le permite tal excusa*”. (Alic; 1991, 217).

En su obra, Laplace estudiaba el sistema solar y observaba los cometas, satélites y planetas, utilizando la teoría de la gravitación de Newton. En 1808 John Playfair comentaba que en Gran Bretaña apenas había una docena de matemáticos capaces de siquiera leerla. Era una obra larga y compleja. Se comentaba que, un día, cuando

Laplace estaba cenando con los Somerville en 1817 afirmó ingenuamente: “*He escrito libros que nadie puede leer. Sólo dos mujeres han leído la “Mecánica Celeste”;* ambas son escocesas: la señora Greig y usted”, pues Laplace no conocía el nombre del primer marido de Mary: Samuel Greig.

Pero, además, muchas mujeres no utilizaban su nombre, como Sophie Germain que utilizaba un pseudónimo. Tenía 19 años en 1795, cuando se fundó la Escuela Politécnica. Aunque las mujeres no eran admitidas, (la Escuela Politécnica no admitirá mujeres hasta 1970) consiguió hacerse con apuntes de algunos cursos, entre ellos, el de *Análisis* de Lagrange. Los estudiantes podían presentar sus eventuales investigaciones y observaciones a sus profesores. Al final del período lectivo, presentó un trabajo firmándolo como Antoine-Auguste Le Blanc. El trabajo impresionó a Joseph Lagrange por su originalidad y quiso conocer a su autor. Al conocer su verdadera identidad, fue personalmente a felicitarla y le predijo éxito como analista, animándola de esta forma a seguir estudiando. Su nivel de conocimientos era absolutamente inhabitual para una mujer de su época ya que ella había estudiado realmente las obras científicas, no los ensayos escritos para mujeres.

A partir de 1801, después de leer *Disquisitiones Arithmeticae* que Karl Friedrich Gauss acababa de publicar, se dedicó al estudio de la Teoría de Números. Entre 1804 y 1809 escribió varias cartas a Gauss mostrando sus investigaciones. Temerosa del ridículo que en aquella época suponía una mujer erudita, esta correspondencia estaba firmada con el seudónimo “*Le Blanc*”. Gauss estaba tan ocupado en su propia investigación monumental que sólo contestaba cuando el trabajo de Sophie estaba relacionado con sus propios teoremas. (Alic; 1991, 176).

La propia Ada Lovelace que firmó su trabajo sólo con sus iniciales.

## 2. Primer libro de geometría

Este libro, *Primer libro de Geometría (First Book of Geometry)* fue publicado en 1905 en Londres, traducido al alemán se publicó en Leipzig en 1908 bajo el título “*Der Kleine Geometer*”, al hebreo en Dreden en 1921 y ha sido recientemente reeditado en 1970 bajo el título “*Beginner’s Book of*

*Geometry*” edición prácticamente igual a la original salvo la corrección de erratas, y causado sorpresa por lo *moderno* que aún hoy resulta.

En su introducción, Grace escribía que el estudio de la geometría en primaria y en secundaria padece considerablemente por el hecho de que los escolares no han adquirido previamente el hábito de la observación geométrica, no se les ha animado a la práctica natural del pensamiento en dimensión tres, que recibía mucha menos atención que la geometría del plano. Opinaba que esto no debía ser así porque “*en cierto sentido la geometría plana es más abstracta que la tridimensional, o también llamada Geometría del Sólido*”, (Young; 1970, Introduction), y consideraba que la geometría tridimensional era más cercana a la experiencia, era más natural.

Una de las razones por las que la geometría plana ha mantenido esta situación privilegiada durante cientos de años y se estudia en los cursos preliminares es probablemente debido al valor didáctico de l dibujo de los diagramas planos en papel o en la pizarra o en otros medios equivalentes. Estos métodos tienen las siguientes ventajas:

1. No requieren un equipamiento especial.
2. Es fácil de enseñar y comprender, y sólo requiere cuidado y práctica.
3. Los diagramas pueden reproducirse tan a menudo como sea necesario, incluso por el estudiante, adquiriendo la necesaria destreza.

Pero admitía, sin embargo, muy difícil representar figuras tridimensionales en una superficie bidimensional como es una página de un libro, y consideraba que ésta era la razón por la no se trabajaba (y actualmente tampoco se trabaja) adecuadamente.

“*El obstáculo en el camino del propio desarrollo de las ideas geométricas ha sido la carencia de un método que ocupe el lugar del dibujo de la geometría plana. El dibujo de los cuerpos sólidos es demasiado difícil. Los modelos, la mayor parte de cartón, tienen el mismo defecto... relativamente caros y requieren constante supervisión*”.

Grace opinaba que el alumnado debía construir figuras espaciales, utilizando *papel, lápiz, alfileres, tijeras, cosas que cualquier niño pequeño debe y puede tener*, por lo que incluyó en su libro muchos diagramas de figuras tridimensionales para ser recortados y contruidos. “*Los métodos adoptados en el presente libro*

requieren pocos utensilios, sólo papel, ocasionalmente unos pocos alfileres, un lápiz y un par de tijeras”. Opinaba que esa era la forma en que el alumnado debía familiarizarse con las propiedades de estas figuras y que utilizándolas, con su ayuda, podía visualizar los teoremas de la geometría tridimensional.

Podemos observar como estas teorías didácticas resultan muy actuales.

### 3. Enseñanza de la Geometría: Algunas sugerencias

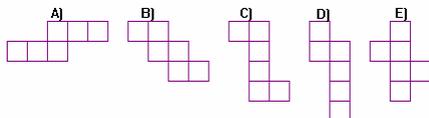
#### Construcción de muchos cuerpos geométricos mediante sus desarrollos

##### 3.1. Tramas de cuadrados

Utilizar una trama de cuadrados en actividades como:

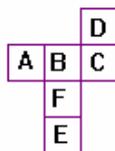
##### Actividad a):

¿Cuál de las siguientes figuras no representa el desarrollo de un cubo?



##### Actividad b):

Al formar un cubo con el desarrollo de la figura, ¿cuál será la letra opuesta a F?



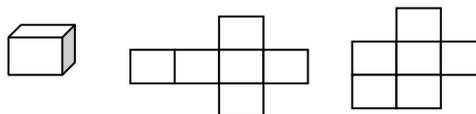
##### Actividad c):

Obtener todos los hexaminos con los que sea posible construir un cubo.

##### Actividad d)

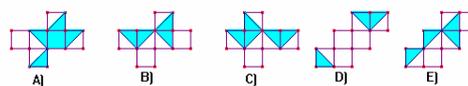
Utiliza una trama de cuadrados o papel cuadriculado, y busca todos los diseños de seis

cuadrados que se te ocurran. Decide cuáles pueden servir para construir un cubo.



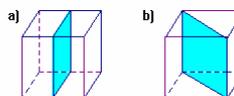
##### Actividad e)

A partir de uno de estos desarrollos bicolors, se puede fabricar un cubo, de forma que los colores sean los mismos en las dos partes de cada una de las aristas. ¿Cuál de ellos lo verifica?



##### 3.2. Secciones del cubo

Una actividad muy interesante es la de construir distintas secciones de un cubo. Se puede hacer cortando mediante un hilo candente cubos de estiropor, para luego confeccionar su desarrollo plano y construirlos en cartulina:



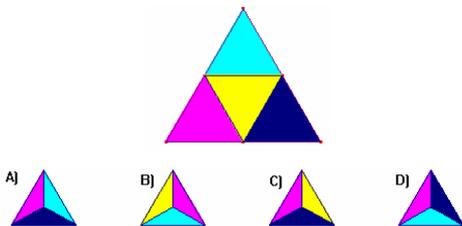
##### Actividad:

Es posible cortar un cubo en dos cuerpos geométricos iguales, de muchas formas, como por ejemplo, mediante un plano que pase por dos aristas y dos diagonales de las caras, tal y como se observa en la ilustración. Haz el desarrollo plano de esa sección del cubo, y construye dos de esos cuerpos. Descríbelos. Piensa otros ejemplos de secciones del cubo en dos cuerpos geométricos iguales, confecciona su desarrollo plano y construye dichas secciones.

##### 3.3. Trama de triángulos

##### Actividad:

El triángulo de la figura se ha plegado para obtener un tetraedro. Teniendo en cuenta que el triángulo no está pintado por detrás. ¿Cuál de las siguientes vistas en perspectiva del tetraedro es falsa?



**Actividad:** Dibuja desarrollos planos que sirvan para construir un tetraedro regular.

### 3.4. Deltaedros

Utilizar una trama de triángulos para investigar los poliedros que se pueden construir con ellos. Construirlos. Contra sus vértices, aristas, lados y comprobar como existe el deltaedro de 4, 6, 8..., 20 caras, pero hay uno, el de 18 caras, que no se puede construir.

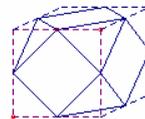
**Actividad:**

Dibuja en una cartulina una trama de triángulos y utilízala para construir deltaedros. Un deltaedro es un poliedro que tiene todas las caras triángulos. Con cuatro triángulos puedes construir un tetraedro. Con seis, la bpirámide triangular. Con ocho, el octaedro. Con veinte, el icosaedro. Comprueba que no puedes construir ningún poliedro convexo con cinco caras triángulos. Construye los deltaedros de 10, 12, 14, y 16 caras. Completa el cuadro siguiente:

Nº de caras	6	8	10	12	14	16	20
Nº de vértices							
Nº de aristas							
Nº de vértices de orden 3							
Nº de vértices de orden 4							
Nº de vértices de orden 5							

### 3.5. Otros desarrollos

**Actividad:** Haz el desarrollo del cuerpo siguiente:



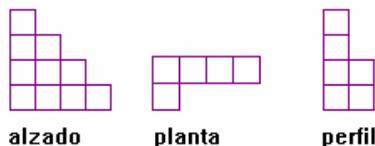
### 3.6. Del plano al espacio y del espacio al plano

En todas estas actividades, siguiendo a Grace, pasamos del **desarrollo plano** de un cuerpo, a construirlo en el espacio. O bien, de conocer al cuerpo en el espacio y diseñar su desarrollo plano. Es decir, se pasa del plano al espacio y del espacio al plano.

Otros trabajos son, utilizar la **planta, perfil y alzado** de los cuerpos. Cuando los arquitectos y los ingenieros necesitan representar en papel los edificios o las piezas de las máquinas que diseñan, las dibujan tomando diferentes puntos de vista. De nuevo se trabaja pasando del espacio, con un cuerpo o una pieza, al plano, dibujando sus tres proyecciones. O bien dadas las tres proyecciones, tener que obtener el cuerpo del que provienen:

**Actividad:**

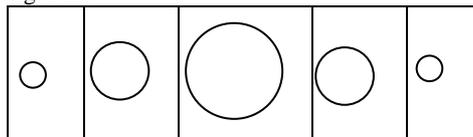
Aquí tenemos las tres vistas, alzado (de frente), planta (desde arriba) y perfil (lateral) de un mismo "castillo" de cubos. ¿Con cuántos cubos se ha construido el castillo?



Los médicos y otros profesionales utilizan técnicas distintas. Para conocer la forma de un órgano, o de otro objeto, hacen **tomografías**. Esta técnica consiste en obtener imágenes de distintas secciones paralelas del objeto.

**Actividad:**

Por ejemplo: ¿de qué objeto es la tomografía siguiente:



Igual que en los casos anteriores se proponen actividades que hagan ir del plano al espacio y del espacio al plano.

### 3.7. Otros poliedros

#### *Actividad:*

Es posible construir poliedros utilizando **materiales** muy variados: cartulina, material plástico... si queremos ver sus caras y aristas, o como una armazón de aristas, utilizando palillos, varillas, pajitas de refresco, escobillas de limpiar pipas... Utiliza pajitas de refresco que puedes unir con aguja e hilo, y puedes afianzar con pegamento una vez construido, y construye tres poliedros.

#### *Actividad:*

Utiliza el procedimiento anterior para construir **bipirámides**, es decir, poliedros que se obtienen al juntar dos pirámides iguales haciendo coincidir sus bases. Construye una bipirámide triangular y otra cuadrangular. Dibújalas en perspectiva caballera. Haz su desarrollo plano. ¿Puedes construir una bipirámide triangular con todas sus caras triángulos equiláteros e iguales? ¿Y una bipirámide cuadrangular? ¿Alguna bipirámide, es un poliedro regular?

#### *Actividad:*

Utiliza el procedimiento anterior para construir **antiprismas**, es decir, poliedros que tienen dos bases iguales, pero cuyas caras laterales no son rectángulos, sino triángulos. Construye un antiprisma de base triangular y otro de base cuadrangular. Dibújalos en perspectiva caballera. Haz su desarrollo plano.

### 3.8. Movimientos en el espacio

Traslaciones, giros, simetrías pueden estudiarse en dimensión tres analizando el entorno que nos rodea. En general, en un edificio se aprecian **traslaciones**, elementos que se repiten.

Una puerta gira, las patillas de las gafas giran, las ruedas de un coche giran... Observa que para determinar un giro en el espacio se necesita, además del ángulo (y su sentido), conocer el **eje de giro**. ¿Qué puntos se transforman en sí mismos? El giro en el espacio deja invariantes a los puntos del eje de giro.

Si  $P'$  es el simétrico de  $P$  respecto a la **simetría central** de centro  $O$ , entonces,  $O$  es el

punto medio del segmento  $PP'$ . La simetría central en el espacio no es un giro. Además solo deja un punto invariante, el centro.

Muchos animales son casi simétricos. Los coches son simétricos. Si nos miramos en un espejo vemos una imagen reflejada que es simétrica a la nuestra. Para determinar una **simetría** en el espacio es necesario conocer un plano, el plano de simetría. Una simetría en el espacio deja invariantes los puntos pertenecientes al plano de simetría.

Además se tiene la simetría con deslizamiento, la simetría rotativa y el movimiento helicoidal.

Es interesante estudiar el grupo de autosimetría de objetos cotidianos.

#### *Actividad:*

¿Cuál es el grupo de autosimetría de estas pirámides?



#### *Actividad: Un juego de dos jugadores:*

Se forma sobre la mesa un polígono regular utilizando monedas (o fichas o bolitas de papel) como vértices. Cada jugador retira, alternativamente, o una moneda o dos monedas adyacentes. Gana quien retire la última moneda. (Ayuda: Es un juego de estrategia ganadora que puedes descubrir utilizando la simetría central).

## 4. Conclusiones: Geometría y coeducación

En la enseñanza de las Matemáticas en Secundaria se proponen algunas estrategias, como hacer Matemáticas en la clase de Matemáticas, promover la investigación en el aula, la colaboración y la cooperación frente a la

competitividad, prestar atención a las exposiciones orales y escritas, trabajar la visión espacial en el aula especialmente en la enseñanza de la geometría, proporcionar modelos de mujeres matemáticas en la historia y analizar datos en la clase de estadística que tengan en cuenta la variable de género.

Queremos hacer especial mención a que, en nuestra opinión, se están dando pasos hacia atrás en este sentido. Hubo un momento en que se trabajó al menos por una educación conjunta de chicos y chicas, y sin embargo ahora hay muchos centros subvencionados con separación de géneros. Por esa razón he querido comentar lo importante que es para las mujeres el tener acceso a la mejor formación. Cuando todavía no hemos llegado a tener una auténtica coeducación ya se ha comenzado a separar, lo que conduce a tener una formación diferente.

Conviene no descuidar la **enseñanza de la geometría en la clase de matemáticas**. No dejar los trabajos de geometría "para casa" sino dar un tiempo y un lugar para hacerlos en el aula. Es conveniente poder dotar de intuiciones geométricas apoyándonos en materiales de aula adecuados según la edad del alumnado. Si no proporcionamos este trabajo en el aula, desmerecerá el aprendizaje de todos, pero en particular de aquellas chicas que, por el tipo de juegos de su infancia, han desarrollado poco la visión espacial. Tradicionalmente el niño salta, corre, juega con construcciones mientras que la niña juega tranquilamente sentada con una muñeca entre los brazos.

## Bibliografía

- [1] Alic, Margaret: *El legado de Hipatia. Historia de las mujeres desde la Antigüedad hasta fines del siglo XIX*. Siglo veintiuno editores. Madrid. 1991.
- [2] Brihuega, Javier; Molero, María y Salvador, Adela: *Didáctica de las Matemáticas*. ICE de la Universidad Complutense. Madrid. 1995.
- [3] Eychenne, Eliane: *Mathématiciennes, ... des inconnues parmi d'autres*. Brochure de l'IREM de Besançon. 1993.
- [4] Figueiras, L.; Molero, M.; Salvador, A.; Zuasti, N.: *Género y Matemáticas*. Editorial Síntesis. Madrid. 1998.
- [5] Figueiras, L.; Molero, M.; Salvador, A.; Zuasti, N.: *El juego de Ada. Matemáticas en las Matemáticas*. Proyecto Sur de Ediciones, S. L. Granada. 1998.
- [6] Grattan-Guinness, Ivor: *A Mathematical Union: William Henry and Grace Chisholm Young*. *Annals of Science*, 29. 2 Agosto de 1972.
- [7] Lafortune, Louise: *Femmes et mathématiques*. Les éditions du remue-ménage. Montreal. 1986.
- [8] Mataix, Susana: *Matemática es nombre de mujer*. Editorial Rubes. 1999.
- [9] Molero, María; Salvador, Adela: *Sonia Kovalevkaya*. Editorial Orto.
- [10] Perl, Teri: *Biographies of Women Mathematicians + Related Activities*. Math Equals. Addison-Wesley Innovative Series. USA. 1978.
- [11] Polubarinova-Kochina, P.: *Sophia Vasilyevna Kovalevskaya. Her life and work*. Foreign Languages Publishing House. Moscú. 1957.
- [12] Salvador, Adela; Salvador, Ana y Molero, María: *Mujeres y Matemáticas. Propuestas para una acción compensatoria*. Números. 22. 37-40. Tenerife. 1992.
- [13] Tee, G. J.: *The pioneering Women Mathematicians*. The Mathematical Intelligencer. Vol 5. nº 4. 1983.
- [14] Young, Grace Chisholm: *Beginners Book of Geometry*. Chelsea Publishing. New York. 1970.